Kleyers Encyklopädie.

# Lehrbuch der Körperberechnungen

Zweites Buch

von

Dr. A. Kleyer

Ma.
o.
167 m

# Dr. A. Kleyer's

## Mathematisch-technisch-naturwissenschaftliche Encyklopädie.

# Lehrbuch

der

# Körperberechnungen.

Zweites Buch.

Dr. A. Kleyer's

# Mathem.-techn.-naturwissenschaftliche Encyklopädie

enthält die **sämtlichen Definitionen, Lehrsätze, Formeln, Regeln etc.**, sowie die **denkbar mannigfaltigsten gelösten** und analogen **ungelösten Beispiele und praktische Aufgaben,** welche in den sämtlichen Zweigen der

**Rechenkunst, der niederen, höheren und angewandten Mathematik,**

nämlich in den kaufmännischen und bürgerlichen Rechnungsarten, in der Algebra, Planimetrie, Stereometrie, synthetischen Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, Differential- und Integralrechnung etc., in der Physik, Elektrotechnik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, math. Geographie, Astronomie, in dem Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- und Hochbau, sowie in den Konstruktionslehren, als darstellende Geometrie, Polar- und Parallelperspektive, Schattenkonstruktion etc.

vorkommen und ist, infolge der eigentümlichen und praktischen Anordnung dieser Disciplinen, infolge der zahlreichen, jedem einzelnen Lehrsatz und Abschnitt beigegebenen

**mannigfaltigen vollständig gelösten und analogen ungelösten praktischen Aufgaben,**

sowie infolge der vielen sauberen **in den Text gedruckten Holzschnitte** und beigefügten **lithographischen Tafeln,** von zahlreichen fachmännischen Seiten aus allen Teilen Europas und Amerikas als

**das praktischste Lehrbuch für Schüler aller Schulen** (indem jedes Hauptkapitel als ein für sich bestehendes Ganze abgeschlossen ist und allein bezogen werden kann), als

**das beste Handbuch für Lehrer und Examinatoren** (indem Definitionen etc. meist in Fragen und Antworten gegeben sind), als

**das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium für jeden einzelnen Teil der erwähnten Wissenschaften,** und als

**ein vortreffliches Nachschlagebuch für Fachleute, Militärs, Ingenieure, Architekten, Techniker jeder Art**

anerkannt worden.

Stuttgart, im Januar 1886.

Die Verlagshandlung.

---

Von diesem Werk sind erschienen:

1). **Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln;**
2). „ „ **Logarithmen;**
3). **Fünfstellige korrekte Log.-Tafeln;**
4). **Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Reihen;**
5). „ „ **Zinseszins- und Rentenrechnung;**
6). „ „ **Gleichungen des ersten Grades mit 1 Unbekannten;**
7). „ des **Magnetismus und des Erdmagnetismus;**
8). „ der **Reibungselektricität** (statischen oder ruhenden Elektricität);
9). „ „ **Körperberechnungen,** 1tes Buch;
10). „ „ „ 2tes Buch (d. i. das vorliegende).

Sämtlich nach eigenem System bearbeitet für den Schulunterricht und das Selbststudium von Dr. **A. Kleyer.**

Im Druck befinden sich:

11). **Das Lehrbuch der Goniometrie.**
12). „ „ „ **ebenen Trigonometrie.**
13). „ „ „ **Körperberechnungen,** 3tes Buch.
14). „ „ „ **Kontaktelektricität** (des Galvanismus).
15). „ „ „ **in der Mechanik und der in der Elektrotechnik gebräuchlichen Masse.**

# Lehrbuch

der

# Körperberechnungen.

## Zweites Buch.

Eine Sammlung

von

**772 vollständig gelösten und analogen ungelösten Aufgaben**

nebst

**742 Erklärungen**

und 256 in den Text gedruckten Holzschnitten

zum

**Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie zum rationellen Selbststudium**

bearbeitet

**nach eigenem System**

von

Dr. A. Kleyer.

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

# Vorwort.

Nachdem mein 1$^{\text{tes}}$ Buch über die Lehren von den Körperberechnungen in den weitesten Kreisen eine so gütige Aufnahme gefunden hat, übergebe ich das vorliegende, das 2$^{\text{te}}$ Buch über die Lehren von den Körperberechnungen, hiermit der Oeffentlichkeit.

Dieses 2$^{\text{te}}$ Buch, bedeutend umfangreicher als das 1$^{\text{te}}$, enthält, wie in meinem Vorwort zum 1$^{\text{ten}}$ Buch erwähnt und wie aus nachstehendem Inhaltsverzeichnis, um dessen gütige Durchsicht ich bitte, ersichtlich ist, eine grosse Anzahl der mannigfaltigsten Aufgaben, meist in vollständig gelöster Form, nebst einer grossen Anzahl von Erklärungen, in welchen Formeln, die im 1$^{\text{ten}}$ Buche noch nicht zur Entwicklung kamen, entwickelt sind; ferner enthält dasselbe eine solche Anzahl von Figuren, wie sie wohl kein anderes Buch aufzuweisen hat; letzteres aus dem Grunde, weil ich von der Ansicht durchdrungen bin, dass die Lösung schwieriger stereometrischer Aufgaben fast nur an der Hand solcher Figuren ermöglicht wird, aus welchen der Zusammenhang zwischen den Bestimmungsstücken des betreffenden Körpers ersichtlich ist, und weil der Studierende, welcher keine besondere Uebung in der projektiven Darstellung von Figuren hat, nur durch Vorführung von Figuren es verstehen lernt, ähnliche Figuren zu skizzieren, um mittels derselben, wie vorstehend erwähnt, schwierige stereometrische Aufgaben lösen zu können. —

Zur Auswahl der in diesem Buch vorgeführten stereometrischen Aufgaben benutzte ich die besten und bekanntesten stereometrischen Aufgabensammlungen, wie z. B. die vorzügliche Aufgabensammlung von Dr. Friedr. Reidt, welche wohl als eine der inhaltreichsten und am besten angeordneten Aufgabensammlungen betrachtet werden kann.

Von seiten mehrerer Abonnenten der von mir bearbeiteten math.-techn.-naturwissenschaftl. Encyklopädie wurden mir während der Ausgabe der einzelnen Lieferungen jener Encyklopädie, aus welchen vorliegendes Buch teilweise besteht, einzelne Druckfehler und Berichtigungen zugesandt; dieselben sind am Schlusse des Buchs zusammengestellt. Jenen Herren spreche ich hierfür nochmals meinen besten Dank aus und bitte gleichzeitig, im Fall noch weitere Berichtigungen erforderlich sein sollten, mir solche gefälligst namhaft machen zu wollen,

indem nur hierdurch ein nach allen Richtungen vollkommenes Werk geschaffen werden kann.

Indem ich bitte, dieses Buch, durch welches eine fühlbare Lücke in der Reihe derjenigen Bücher ausgefüllt werden soll, welche vor allem zum wirklichen Selbststudium geeignet sind, mit demselben Wohlwollen aufzunehmen, als die übrigen seither von mir herausgegebenen Lehrbücher math.-techn.-naturwissenschaftlichen Inhalts, mache ich schliesslich noch darauf aufmerksam, dass das demnächst erscheinende 3te Buch über die Lehren von den Körperberechnungen, praktische Aufgaben aus allen Teilen der Physik, der math. Geographie etc. etc.; Aufgaben über Maxima und Minima und ferner solche Aufgaben enthalten wird, welche mittels Anwendung der Trigonometrie gelöst werden müssen und deren Auflösungen teilweise auf kubische Gleichungen führen.

**Frankfurt a. M.**, im Januar 1886.

Dr. A. Kleyer.

# Inhaltsverzeichnis.

Seite.

I. Praktische Aufgaben über die fünf einfachen geometrischen Körper:
a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1—34
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34—38

II. Aufgaben über die gegenseitigen Beziehungen und Aehnlichkeit der fünf einfachen geometrischen Körper:
a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39—85
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85—91

III. Aufgaben über die gegenseitigen Beziehungen der fünf konvexen regulären Polyeder:
a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91—99
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99—100

IV. Aufgaben über die fünf einfachen geometrischen Körper in ihrer Verbindung mit Schnittebenen:
a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100—140
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141—147

V. Aufgaben über die fünf konvexen regulären Polyeder in ihrer Verbindung mit Schnittebenen:
a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148—157
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 157—159

VI. Aufgaben über die einfachen geometrischen Körper in Verbindung mit der ein- und umbeschriebenen Kugel:
a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159—224
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224—230

VII. Aufgaben über die fünf konvexen regulären Polyeder in Verbindung mit der um- und einbeschriebenen, sowie derjenigen Kugel, welche sämtliche Kanten berührt:
a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230—247
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 247—251

VIII. Aufgaben über die einfachen geometrischen Körper in gegenseitiger Verbindung (Berechnung von zusammengesetzten, ineinandergestellten und ineinandergeschobenen Körpern, centrale Durchbohrungen etc.):
a). Gelöste Aufgaben:
1). Das Prisma in Verbindung mit dem Prisma . . . . . . . . . 251—253
2). Die Pyramide in Verbindung mit der Pyramide . . . . . . . . 253—261
3). Die Pyramide in Verbindung mit dem Prisma . . . . . . . . 261—265

Seite.

4). Der Pyramidenstumpf in Verbindung mit der Pyramide . . . . 266—268
5). Der Cylinder in Verbindung mit dem Cylinder . . . . . . . . 268—271
6). Der Cylinder in Verbindung mit der Pyramide . . . . . . . . 271—275
7). Der Cylinder in Verbindung mit dem Prisma . . . . . . . . . 275—284
8). Der Kegel in Verbindung mit dem Kegel — Hohlkegel . . . . 284—287
9). Der Kegel in Verbindung mit dem Cylinder . . . . . . . . 287—293
10). Der Kegel in Verbindung mit der Pyramide . . . . . . . . 293—297
11). Der Kegel in Verbindung mit dem Prisma . . . . . . . . 297—298
12). Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Kegel . . . . . . . 298—301
13). Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Cylinder . . . . . . 301—308
14). Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Pyramidenstumpf . . . 308—312
15). Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Prisma . . . . . . . 312—313
16). Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit der Kugel . . . . 314—321
17). Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Kegelstumpf . 321—325
18). Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Kegel . . . . 325—346
19). Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Cylinder . . . 346—353
20). Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit der Pyramide und dem Pyramidenstumpf . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 353—357
21). Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Prisma . . . . 357—358

b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 358—371

IX. Aufgaben über die konvexen, regulären Polyeder in gegenseitiger Verbindung und in Verbindung mit den fünf einfachen geometrischen Körpern:

a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 371—396
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 397—400

X. Aufgaben über die einfachen, schiefen Körper; über die einfachen, schiefen Körper in Verbindung mit Schnittebenen (Prismenstumpf und Cylinderhuf) und Aufgaben über solche Körper, welche sich durch Zerlegung auf einfache, schiefe Körper zurückführen lassen:

a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 400—430
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 430—432

XI. Aufgaben über das Prismatoid, den Obelisken und Antiobelisken, das Antiprisma, das Ponton, den Keil und andere zusammengesetzte Körper:

a). Gelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 433—469
b). Ungelöste Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 469—472

XII. Ueber die Berechnung von Rotationsflächen und Rotationskörper:

a). Ueber die Rotationsflächen und Rotationskörper im allgemeinen . . . 472—477
b). Gelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern durch Zurückführung auf die einfachen geometrischen Körper . . . . . . . . 477—494
c). Erklärungen über die Guldinischen Regeln, gelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern mittels der Guldinischen Körperregel . 494—508
d). Erklärungen über die Simpsonschen Regeln und gelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern mittels der Simpsonschen Körperregel 509—514
e). Ungelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern . . . 514—517

XIII. Ueber die Berechnung besonderer Körper . . . . . . . . . . 517—519

XIV. Zusammenstellung der in diesem Buche vorkommenden stereometrischen Formeln . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 520—527

Berichtigungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 528

# Körperberechnungen.

## Zweites Buch.

## I.
## Praktische Aufgaben über die fünf einfachen geometrischen Körper.

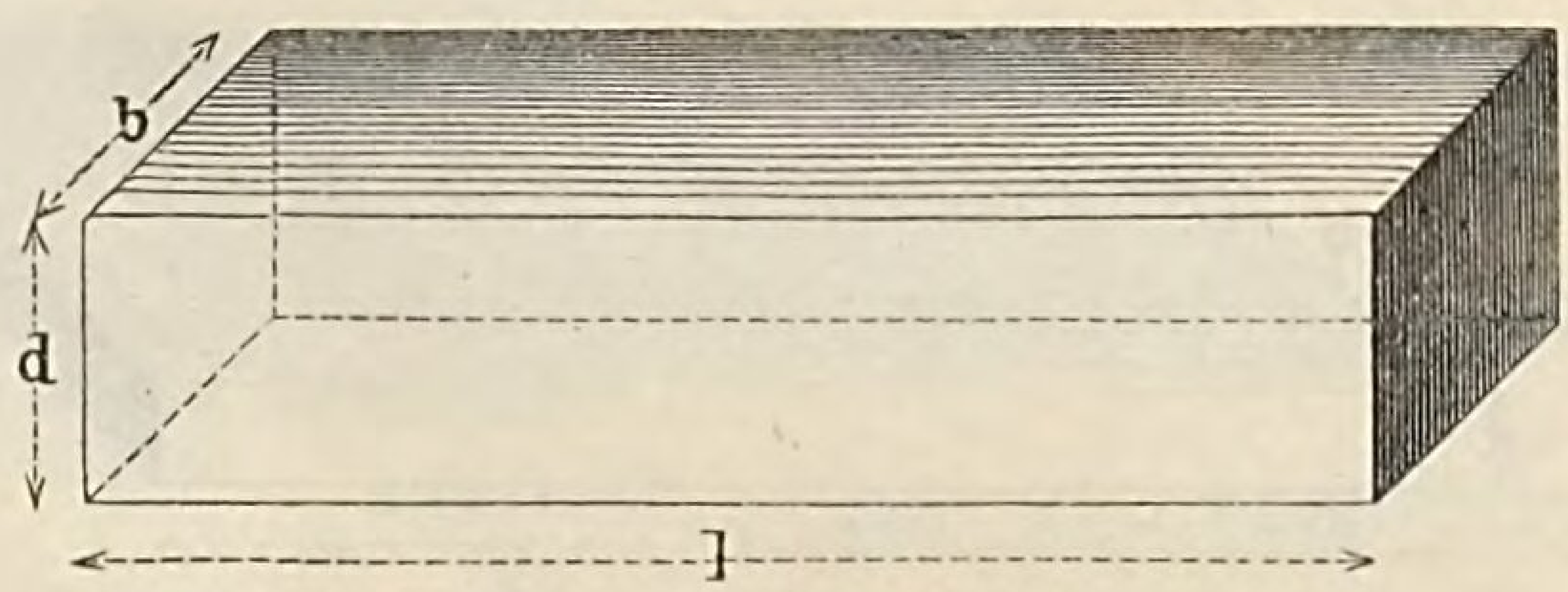
### a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll den Kubikinhalt von 20 **Balken** Schiffsholz in **Loads** (siehe Erkl. 2 und 3) angeben, wenn jeder dieser Balken 11,2 m lang, 0,372 m breit und 0,316 m dick ist.

**Formel:**

$V = G \,.\, H$ (siehe Erkl. 1).

Figur 1.




**Auflösung.** Da ein Balken, siehe Figur 1, in seiner gewöhnlichen Form ein gerades Prisma mit rechteckiger Basis, bezw. ein rechtwinkliges Parallelopipedon darstellt, so findet man das Volumen $V$ eines solchen nach der Formel:

$$V = G \,.\, H \quad \text{(siehe Erkl. 1).}$$

Für die gegebene Aufgabe ist:

$$G = 0{,}372 \,.\, 0{,}316 \text{ qm}$$
$$H = 11{,}2 \text{ m},$$

folglich das Volumen $V$ **eines** Balkens $= 0{,}372 \,.\, 0{,}316 \,.\, 11{,}2$ cbm.

Für das gesuchte Volumen $x$ der 20 Balken findet man hiernach:

$$x = 20 \,.\, 0{,}372 \,.\, 0{,}316 \,.\, 11{,}2 \text{ cbm}$$

oder nach der Erkl. 3:

$$x = 20 \,.\, 0{,}372 \,.\, 0{,}316 \,.\, 11{,}2 \,.\, 0{,}7064 \textbf{ Loads}$$

Die hier noch auszuführende Rechnung kann nun entweder durch einfache Multiplikation, oder mittelst Logarithmen, wie folgt, geschehen:

**Erkl. 1.** Die Kubikinhaltsformel für ein Prisma, bezw. für ein Parallelopipedon (ppd) ist, wenn $V$ den Kubikinhalt (das Volumen), $G$ den Inhalt der Grundfläche und $H$ die Höhe des Prismas bedeutet:

$$V = G \,.\, H \text{ Kubikeinheiten.}$$

Man siehe den Abschnitt im 1. Buche der Körperberechnungen, welcher über **das Prisma** handelt.

**Erkl. 2.** *Load* (engl. die Last, Mehrzahl Loads) ist die Bezeichnung mehrerer in England gebräuchlicher Maasse.

Da in der vorstehenden Aufgabe von Schiffsholz die Rede ist, so sei hier bemerkt, dass 1 Load behauenes Schiffsholz = 50 engl. Kubikfuss, mithin:

$$1 \text{ engl. Kubikfuss} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ Loads sind.}$$

**Erkl. 3.** Da der Aufgabe entsprechend das gesuchte Volumen nicht in Kubikmeter sondern in Loads angegeben werden soll, so beachte man, dass:

$$1 \text{ m} = 3{,}281 \text{ engl. Fuss, folglich}$$

1) . $1 \text{ cbm} = 3{,}281^3 = 35{,}320$ engl. Kubikf. sind.

Da nun nach der Erkl. 2

$$1 \text{ engl. Kubikfuss} = 0{,}02 \text{ Loads, mithin}$$

2) . $35{,}320 \text{ engl. Kubikfuss} = 0{,}02 \,.\, 35{,}320 = 0{,}70640$ Loads

sind, so folgt aus den Relationen 1) und 2), dass 1 cbm = 0,7064 Loads ausmachen.

$$\log x = \log 20 + \log 0{,}372 + \log 0{,}316 + \log 11{,}2 + \log 0{,}7064$$

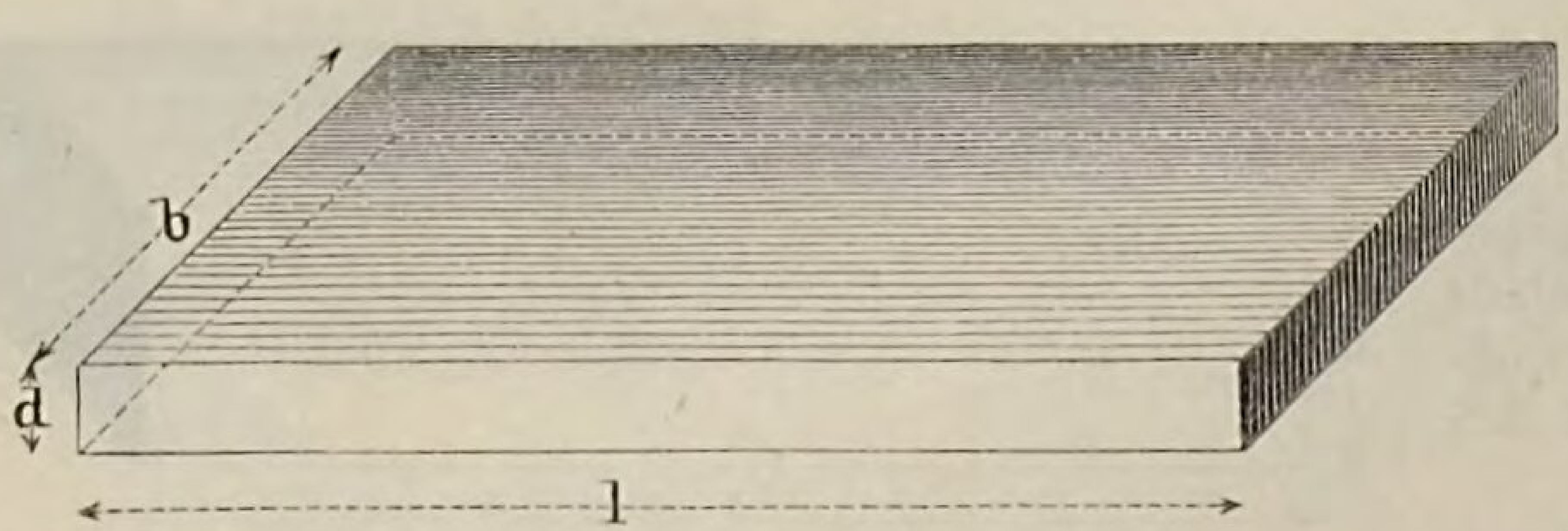
$$\begin{aligned} \log 20 &= 1{,}3010300 \\ +\log 0{,}372 &= 0{,}5705429 - 1 \\ +\log 0{,}316 &= 0{,}4996871 - 1 \\ +\log 11{,}2 &= 1{,}0492180 \\ +\log 0{,}7064 &= 0{,}8490507 - 1 \\ \hline \log x &= 4{,}2695287 - 3 \text{ oder} \\ \log x &= 1{,}2695287 \\ & \quad 5129 \\ & \quad 158 \\ & \quad 163 \\ \text{numlog } x &= 18{,}6007. \end{aligned}$$

Das gesuchte Volumen $x$ ist hiernach:
$= 18{,}601$ Loads.

---

**Aufgabe 2.** Die Länge $l$ einer **Planke** (siehe Erkl. 4) misst 16,14 m, die Breite $b = 0{,}48$ m, die Dicke $d = 0{,}08$ m; wie gross ist das Volumen einer solchen Planke?

Figur 2.




**Erkl. 4.** Unter **Planken** und **Bohlen** versteht man starke Bretter.

Die Bezeichnung „Planke" ist besonders im Schiffsbau, die Bezeichnung „Bohle" in der Maurerkunst etc. gebräuchlich.

**Formel:**

$V = G \,.\, H$ (siehe Erkl. 1).

**Auflösung.** Da eine Planke — siehe Figur 2 und die Erklärung 4 — in ihrer gewöhnlichen Form ein rechtwinkliges ∥ppd darstellt, so findet man deren Volumen nach der Formel:

$V = G \,.\, H$ (siehe Erkl. 1).

Für die Aufgabe ist:

$G = 0{,}48 \,.\, 0{,}08$ qm

$H = 16{,}14$ m

folglich das gesuchte Volumen $V$ einer solchen Planke:

$V = 0{,}48 \,.\, 0{,}08 \,.\, 16{,}14$ cbm

Durch einfache Multiplikation erhält man, abgerundet:

$V = 0{,}620$ cbm

---

**Aufgabe 3.** Wie teuer kommt eine **Bohle** (siehe Erkl. 4) von 3 m Länge, 0,9 m Breite und 0,09 m Dicke, wenn der Kubikmeter behauenes Holz zu 20 *M.* gerechnet wird?

**Formel:**

$V = G \,.\, H$ (siehe Erkl. 1).

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Kreises beachte man, dass der Aufgabe gemäss

1 cbm Holz = 20 *M.* kostet

und dass somit, wenn das Volumen der gedachten Bohle = $V$ cbm ist, der Preis einer Bohle

$= V \,.\, 20$ *M.* beträgt.

Das Volumen $V$ der Bohle findet man, da dieselbe ein rechtwinkliges ∥ppd darstellt (s. die Figur 2 und die Erkl. 4), mittelst der Formel:

$V = G \,.\, H$ (siehe Erkl. 1).

Setzt man in derselben:

$G = 0{,}9 \,.\, 0{,}09$ qm und

$H = 3$ m, so ergibt sich:

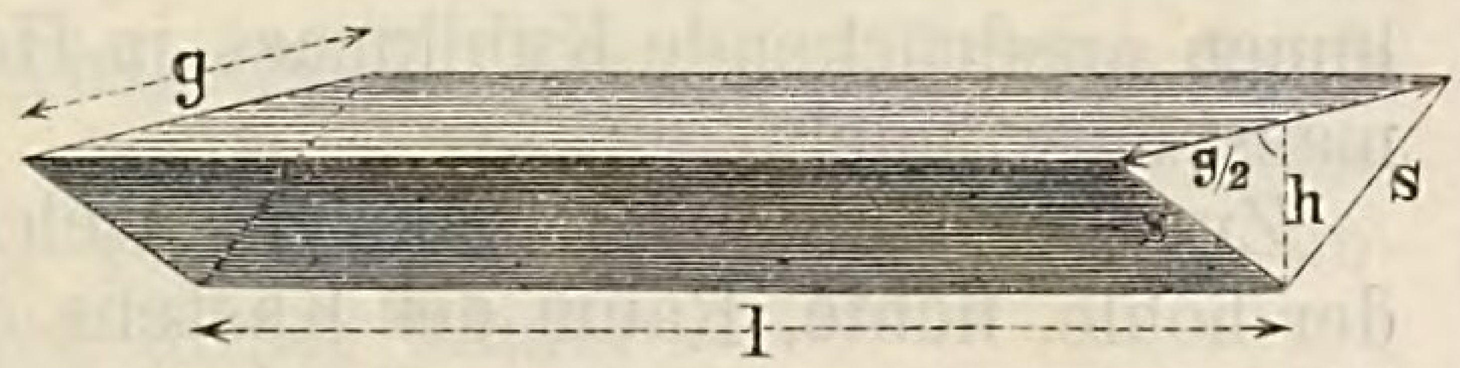
$V = 0{,}9 \,.\, 0{,}09 \,.\, 3$ cbm

Der gesuchte Preis ist somit
$= 0,9 \,.\, 0,09 \,.\, 3 \,.\, 20$ oder
$= 4,86$ *M.*, d. i.
4 *M.* 86 pf.

---

**Aufgabe 4.** Welches Volumen haben 1200 **Eisenbahnschwellen** (siehe Erkl. 5), deren Endflächen gleichschenklige Dreiecke mit den Grundlinien $g = 0,33$ m und den Schenkeln $s = 0,29$ m sind und von welchen jede eine Länge $l$ von 2,75 m hat?

Figur 3.




**Erkl. 5.** Unter dem technischen Ausdruck „**Schwelle**“ versteht man im allgemeinen eine Unterlage.

Im Eisenbahn-Oberbau versteht man unter **Schwelle** (engl. Sleeper) prismatisch zugeschnittene Hölzer oder prismatisch geformte eiserne Stäbe, auf welchen die Eisenbahnschienen befestigt sind. Die Endflächen der Eisenbahnschwellen sind grösstenteils Rechtecke, jedoch gibts auch solche, deren Endflächen Dreiecke oder Paralleltrapeze sind.

**Erkl. 6.** Für den Inhalt $G$ der End- bezw. Grundfläche einer Schwelle, welche ein dreiseitiges gerades Prisma vorstellt, hat man nach der Erkl. 7, die Relation:

$$G = \frac{g}{4} \,.\, \sqrt{(2s+g)\,.\,(2s-g)} \text{ oder:}$$

$$G = \frac{0,33}{4} \,.\, \sqrt{(2\,.\,0,29+0,33)\,.\,(2\,.\,0,29-0,33)}\text{qm},$$

wenn man die in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte für $g$ und $s$ substituiert.

**Erkl. 7.** Der Inhalt $J$ eines jeden Dreiecks, dessen Grundlinie $g$ und dessen Höhe $h$ ist, wird mittelst der Formel:

$$1) \;.\;.\;.\;.\; J = \frac{g\,.\,h}{2} \text{ Quadrateinheiten}$$

gefunden.

Im **gleichschenkligen** Dreieck findet man die Höhe $h$, wenn ein Schenkel $s$ und die Grundlinie $g$ gegeben ist, mittelst der Relation:

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2, \text{ indem sich hieraus}$$

$$h = \sqrt{s^2 - \frac{g^2}{4}} = \sqrt{\frac{4s^2 - g^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(2s)^2 - g^2}$$

oder:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{(2s+g)\,.\,(2s-g)} \text{ ergibt.}$$

Setzt man diesen Wert in vorsteh. Gleich. 1) ein, so erhält man:

**Formel:**

$$V = G\,.\,H \text{ (siehe Erkl. 1).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des Volumens der 1200 Eisenbahnschwellen beachte man, dass jede derselben — siehe Figur 3 und die Erkl. 5 — ein gerades dreiseitiges Prisma darstellt, folglich das Volumen eines solchen nach der Formel:

$$V = G\,.\,H \text{ (siehe Erkl. 1).}$$

gefunden werden kann.

Der Aufgabe gemäss ist nach der Erkl. 6:

$$G = \frac{0,33}{4} \,.\, \sqrt{(2\,.\,0,29+0,33)\,.\,(2\,.\,0,29-0,33)}\text{qm}$$

ferner ist: $H = l = 2,75$ m

Das Volumen **einer** der Schwellen ist hiernach

$$= \frac{2,75\,.\,0,33}{4} \,.\, \sqrt{(0,58+0,33)\,.\,(0,58-0,33)}\text{ cbm}$$

und zur Berechnung des gesuchten Volums $x$ der 1200 Schwellen besteht die Gleichung:

$$x = \frac{1200\,.\,2,75\,.\,0,33}{4} \,.\, \sqrt{0,91\,.\,0,25}\text{ cbm}$$

oder:

$$x = 300\,.\,2,75\,.\,0,33\,.\,\sqrt{0,91\,.\,0,25}\text{ cbm}$$

woraus man $x$ auf logarithmische Weise, wie folgt, berechnen kann:

$$log\, x = log\, 300 + log\, 2,75 + log\, 0,33 + \frac{1}{2}\,.\,(log\, 0,91 + log\, 0,25)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 300 &= 2,4771213 \\ +\, log\, 2,75 &= 0,4393327 \\ +\, log\, 0,33 &= 0,5185139 - 1 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2}\,.\,(log\, 0,91 + log\, 0,25)$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,(0,9590414 - 1 + 0,3979400 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,(1,3569814 - 2) \qquad = 0,6784907 - 1$$

$$log\, x = 4,1134586 - 2$$

$$\text{oder } log\, x = 2,1134586$$

$$\begin{array}{r} 4420 \\ \hline 166 \\ 167 \end{array}$$

mithin:

$$numlog\, x = 129,855.$$

2) . . . . $J = \frac{g}{4} \cdot \sqrt{(2s+g) \cdot (2s-g)}$

als Formel zur Berechnung des Inhalts eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie $g$ und dessen Schenkel $s$ gegeben ist.

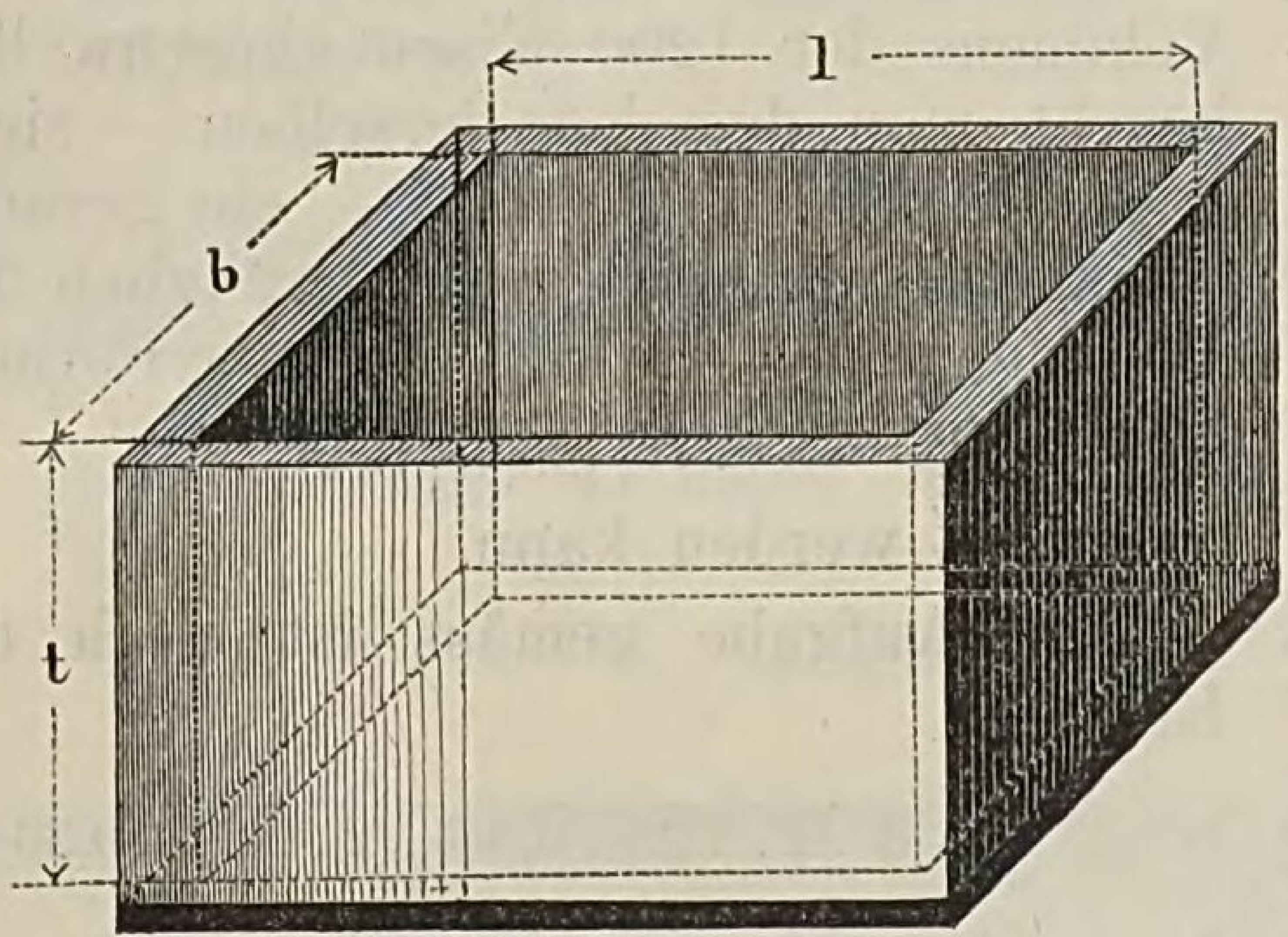
Das gesuchte Volumen ist somit

$= 129{,}855$ cbm

---

**Aufgabe 5.** Wie viel Hektoliter Getreide fasst ein rechtwinkliger **Kasten** (Behälter), der im Lichten (siehe Erkl. 8) 2,2 m lang, 1,75 m breit u. 1,83 m tief ist.

Figur 4.



**Erkl. 8.** Bei Ausmessung **hohler** Körper und Gegenstände sagt man für die Maasse, die sich nur auf den hohlen Raum beziehen: sie sind **im Lichten** gemessen.

**Erkl. 9.** 1 cbm = 1000 cdm
1 cdm = 1 Liter
100 Liter = 1 Hektoliter.

Aus diesen drei Relationen ergibt sich, dass
1 cbm = 1000 Liter oder
$$1 \text{ cbm} = \frac{1000}{100} \text{ oder } = 10 \text{ Hektoliter}$$
enthält.

**Formel:**

$V = G \cdot H$ (s. Erkl. 1, S. 1).

**Auflösung.** Um die Anzahl der **Hektoliter** Getreide zu finden, welche der Kasten fasst, muss man das Volumen desselben berechnen und das dieses Volumen ausdrückende Kubikmass in Hohlmass umwandeln.

Zur Berechnung des Volumens, welches der hohle, **lichte**, Raum des Kastens enthält, denn dieser Raum soll mit Getreide ausgefüllt werden, beachte man, dass dieser hohle Raum — s. Figur 4 — ein rechtwinkliges ||ppd darstellt, mithin dessen Volumen nach der Formel:

$V = G \cdot H$ Kubikeinheiten (s. Erkl. 1).

berechnet wird.

Da nun der Aufgabe gemäss der Kasten im Lichten (siehe Erkl. 8) 2,2 m lang und 1,75 m breit ist, so hat man für den Inhalt der Grundfläche $G$ des parallelopipedischen hohlen Raums

$G = 2{,}2 \cdot 1{,}75$ qm

Ferner hat man für die Höhe $H$ dieses Raumes, das ist die Tiefe des Kastens:

$H = 1{,}83$ m.

Mithin ist das Volumen des hohlen Raumes:

$V = 2{,}2 \cdot 1{,}75 \cdot 1{,}83$ cbm

Um nun das hierdurch ausgedrückte Kubikmass in Hohlmass umzuwandeln, hat man dasselbe nach der Erkl. 9 nur mit 10 zu multiplizieren, wonach man für die gesuchte Anzahl $x$ der Hektoliter

$x = 2{,}2 \cdot 1{,}75 \cdot 1{,}83 \cdot 10$ oder

$x = 70{,}455$ Hektoliter erhält.

---

**Aufgabe 6.** Eine ebene Fläche von 79850 qm Inhalt soll zur Anlage eines Bahnhofs um $1^1/_2$ m gleichmässig erhöht werden. Wie viel Kubikmeter Erde sind zur Auffüllung nötig?

**Formel:**

$V = G \cdot H$ (s. Erkl. 1, S. 1).

**Auflösung.** Da die Erhöhung der ebenen Fläche in gleichmässiger Weise geschehen soll, so stellt die ganze Erdmasse, welche zur Auffüllung nötig ist,

ein gerades Prisma dar, dessen Grundfläche $G = 79850$ qm, nämlich gleich dem Inhalt der ebenen Fläche und dessen Höhe $H = 1^1/_2$ m, nämlich gleich der Höhe der aufzufüllenden Erde ist.

Nach der Formel:

$V = G \,.\, H$ Kubikeinheiten (s. Erkl. 1, S. 1).

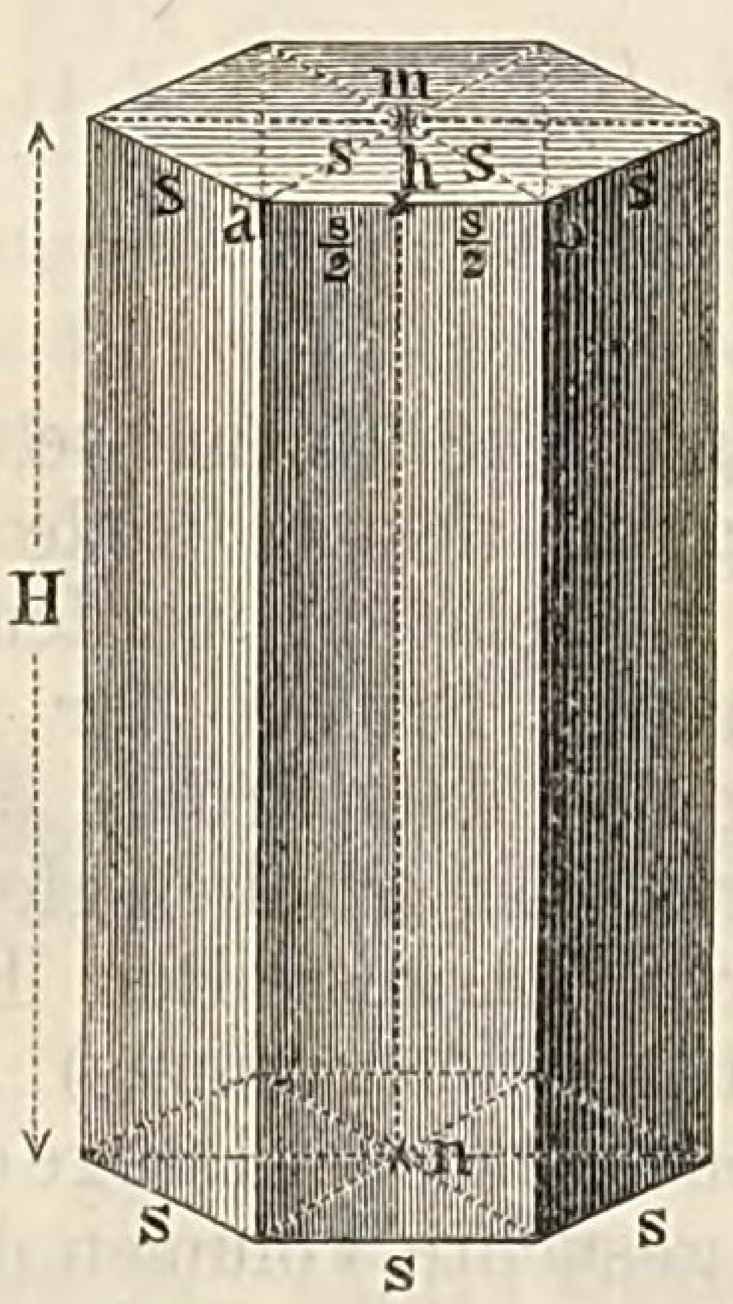
erhält man somit für das gesuchte Volumen der ganzen Erdmasse:

$$V = 79850 \,.\, 1^1/_2 = \frac{79850 \,.\, 3}{2}$$
$$= 39925 \,.\, 3 = \underline{119775 \text{ cbm}}$$

---

**Aufgabe 7.** Eine sechsseitige **Säule** hat eine Höhe von 30 m und einen Umfang von 5,4 m. Wie gross ist das Volumen dieser Säule?

Figur 5.




**Erkl. 10.** Der Inhalt eines **regul. Sechsecks** besteht, wenn der Mittelpunkt des um- bezw. eingeschriebenen Kreises mit den Ecken verbunden wird, aus der Summe der Inhalte von 6 kongruenten **gleichseitigen** Dreiecken. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite $s$ ist $= \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ (siehe Erkl. 11), mithin der des regul. Sechsecks $= \frac{6 \,.\, s^2}{4}\sqrt{3}$. Zur Berechnung des Inhalts eines regul. Sechsecks besteht hiernach die Relation:

$$J_6 = \frac{3s^2}{2} \,.\, \sqrt{3}$$

**Erkl. 11.** Der Inhalt $J$ des gleichseitigen Dreiecks $abm$ in Fig. 5 ist $= \frac{s \,.\, h}{2}$.

Nach dem pythagoräischen Lehrsatz hat man für die Höhe $h$ die Relation:

**Formel:**

$$V = G \,.\, H \text{ (s. Erkl. 1, S. 1).}$$

**Auflösung.** Eine Säule mit ebenen Begrenzungsflächen hat die Form eines geraden Prismas, folglich wird deren Volumen nach der Formel:

$V = G \,.\, H$ Kubikeinheiten (s. Erkl. 1, S. 1).

berechnet.

Zur Berechnung des Inhalts $G$ der Grundfläche der ein gerades Prisma vorstellenden sechsseitigen Säule — siehe Figur 5 — beachte man, dass dieselbe ein reguläres Sechseck ist, dessen Inhalt nach der in der Erkl. 10 enthaltenen Formel gefunden wird. Man hat somit:

$$1) \;. \,. \,. \; G = \frac{3s^2}{2}\sqrt{3}$$

Die in dieser Relation vorkommende Seite $s$ des regulären Sechsecks findet man, da der Umfang $U$ desselben (d. i. der Umfang der Säule) in der Aufgabe mit 5,4 m gegeben ist, nach der Erkl. 12 mittelst der Relation:

$$6s = U = 5{,}4 \text{ m, woraus sich}$$
$$2) \;. \,. \,. \; s = \frac{5{,}4}{6} = 0{,}9 \text{ m ergibt.}$$

Aus den Gleich. 1) und 2) erhält man:

$$G = \frac{3 \,.\, 0{,}9^2}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Da ferner die Säule die Höhe

$$H = 5{,}4 \text{ m hat,}$$

so hat man für das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{3 \,.\, 0{,}9^2}{2} \cdot \sqrt{3} \,.\, 5{,}4 \text{ cbm}$$

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{ oder:}$$

$$h = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}}$$

$$1) \ldots . \quad h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$$

Zur Berechnung des Inhalts $J$ eines gleichseitigen Dreiecks hat man hiernach die Formel:

$$J = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3} \text{ oder:}$$

$$2) \ldots . \quad J = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

**Erkl. 12.** Unter dem **Umfang** einer geradlinigen Figur versteht man die Summe aller Begrenzungslinien.

In den regulären Polygonen sind die Begrenzungslinien einander gleich, somit hat man z. B. für den Umfang $U$ eines regulären Sechsecks, dessen Seite $= s$ ist:

$$U = 6 \,.\, s$$

Durch Reduktion erhält man:

$$V = 2{,}43 \,.\, 2{,}7 \,.\, \sqrt{3}$$

Dies kann man weiter mittelst Logarithmen, wie folgt berechnen:

$$log\, V = log\, 2{,}43 + log\, 2{,}7 + \frac{1}{2} \,.\, log\, 3.$$

Nun ist: $log\, 2{,}43 = 0{,}3856063$

$+ log\, 2{,}7 = 0{,}4313638$

$+ \frac{1}{2} \,.\, log\, 3 = \frac{1}{2} \,.\, 0{,}4771213 = 0{,}2385606$

$log\, V = 1{,}0555307$

mithin: 5312

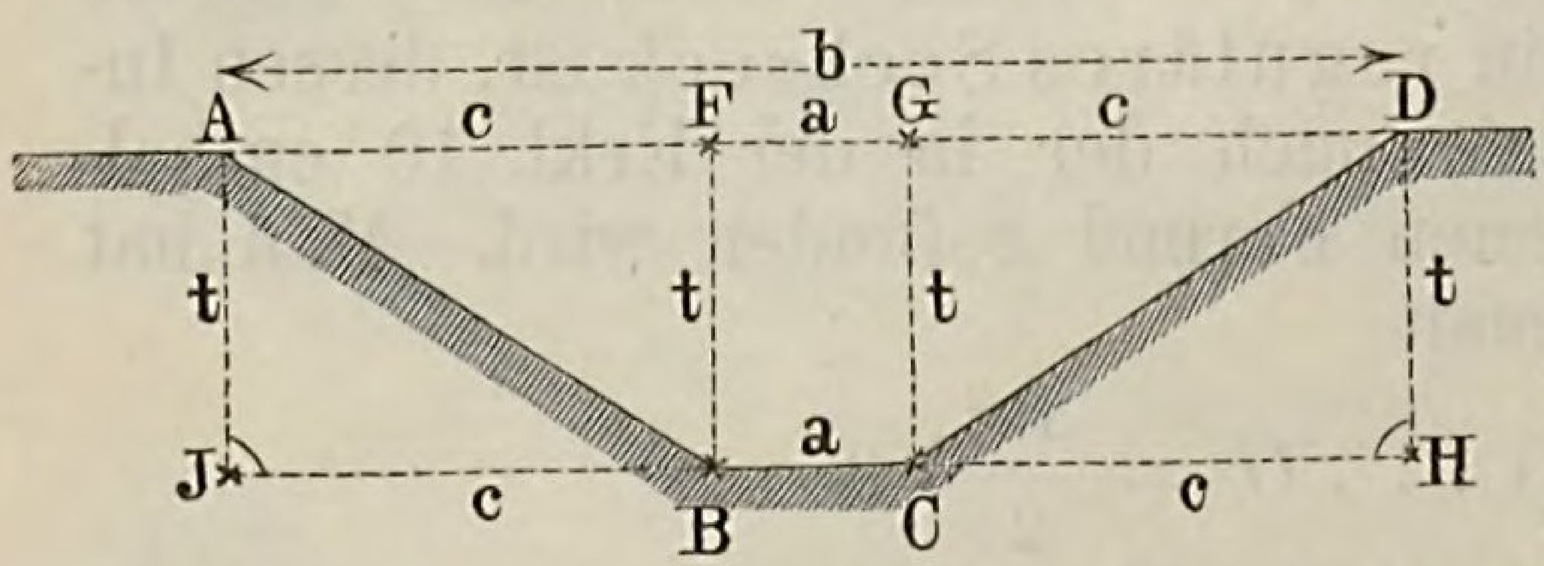
$numlog\; V = 11{,}364.$

Das gesuchte Volumen ist somit $= 11{,}364$ cbm.

---

**Aufgabe 8.** Wie viel Kubikmeter Erde sind bei der Anlegung eines **Grabens** auszuheben, welcher $l = 140$ m lang ist und eine Tiefe $t$ von 1,55 m hat, wenn die Sohlbreite $a$ (siehe Erkl. 15) des Grabens $= 0{,}8$ m misst und die Böschung (siehe Erkl. 18) $1^1/_2$ fache Anlage hat?

Figur 6.




**Erkl. 13.** Unter **Graben** versteht man jede künstliche Erdvertiefung, deren Länge bedeutend grösser ist als ihre Breite. Meistens dienen dieselben zur Abführung von Wasser oder bilden Bestandteile von Befestigungen im Kriegswesen (siehe Aufgabe 9).

**Erkl. 14.** Die eigentliche Form eines Grabens wird bestimmt durch dessen **Profil.**

Unter dem **Profil** oder **Querschnitt** (Seitenansicht) eines Grabens versteht man die Durchschnittsfigur, welche man erhält, wenn man sich **senkrecht** zur Längsrichtung des Grabens eine Ebene gelegt denkt. So stellt die Figur 6 das Profil, den Querschnitt, des in Rede stehenden Grabens dar.

**Erkl. 15.** Die horizontale Grundfläche eines Grabens heisst **Sohle**, deren Breite im Profil gemessen, heisst **Sohlbreite.** In der Fig. 6 ist $BC = a$ die **Sohlbreite** des Grabens.

**Erkl. 16.** Unter **Böschung** (eines Grabens oder einer Erderhöhung) versteht man die schräge

**Formel:**

$$V = G \,.\, H \text{ (s. Erkl. 1, S. 1).}$$

**Auflösung.** Die Erdmasse, welche bei der Anlegung des in Rede stehenden Grabens ausgehoben werden muss, stellt ein gerades Prisma dar, dessen Grundfläche gleich **dem Profile** des Grabens (siehe Erkl. 14), nämlich gleich dem in der Figur 6 dargestellten Paralleltrapezes (Antiparallelogramms) $ABCD$ und dessen Höhe gleich der Länge des Grabens ist. Das gesuchte Volumen der Erdmasse findet man somit nach der Formel:

$$1) \ldots . \quad V = G \,.\, H \text{ (siehe Erkl. 1, S. 1).}$$

Den Inhalt G der Grundfläche des Prismas, welches die auszuhebende Erde darstellt, findet man, da diese Grundfläche gleich dem in der Fig. 6 gezeichneten $\| tr\; ABCD$ ist, mittelst der Gleich.:

$$1) \ldots \quad G = \frac{BC + AD}{2} \cdot DH \text{ (s. Erkl. 19).}$$

In dieser Gleichung ist:

$BC$ gleich der **Sohlbreite** $a$ (s. Erkl. 15).

Dann ist: $AD = JB + BC + CH$ od. $= BC + 2\,CH$ ist, denn der Erkl. 16 zufolge ist $JB = CH$ oder da: $BC = a$

$$CH = 1\tfrac{1}{2}\, DH = 1\tfrac{1}{2}\, t$$

Abdachung. Unter **Böschungsdreieck** versteht man, siehe das Profil Figur 6, eines der rechtwinkligen Dreiecke $AJB$ oder $CHD$, welche bei Gräben meistens **kongruente** Dreiecke sind

**Erkl. 17.** Die Hypotenuse eines Böschungsdreiecks heisst **Böschungslinie**, wie z. B. $CD$ in Figur 6.

Die horizontale Kathete eines Böschungsdreiecks heisst **Anlage** oder **Böschungsgrundlinie**, wie z. B. $CH$ in Figur 6.

Die vertikale Kathete eines Böschungsdreiecks, wie z. B. $DH$ in Figur 6 gibt die Höhe, bezw. die Tiefe, der Böschung an.

**Erkl. 18.** Eine Böschung wird benannt nach dem Verhältnis der Höhe zur Böschungsgrundlinie und man sagt:

eine Böschung hat **ganze Anlage**, wenn die Böschungsgrundlinie und die Höhe gleich sind, wenn also z. B. in Figur 6 $CH = DH$ wäre,

eine Böschung hat **doppelte Anlage**, wenn die Böschungsgrundlinie doppelt so gross ist, wie die Höhe, wenn also z. B. in Figur 6 $CH = 2\,DH$ wäre,

eine Böschung hat $1\frac{1}{2}$ **fache Anlage** (wie in der Aufgabe), wenn die Böschungsgrundlinie $= 1\frac{1}{2}$ mal so gross ist als die Höhe, wenn also z. B. in der Figur 6 $CH = 1\frac{1}{2}\,DH$ ist.

**Erkl. 19.** Den Inhalt $J$ eines Paralleltrapezes, dessen parallele Seiten $= a$ und $b$ sind und dessen Höhe (Abstand dieser parallelen Seiten) $= h$ ist, findet man mittelst der Formel:

$$J = \frac{a+b}{2} \,.\, h$$

(denn $DH$ ist die Höhe der Böschung, bezw. die Tiefe $t$ des Grabens), so ist:

$$AD = a + 2 \,.\, 1\tfrac{1}{2}\, t = a + 3t$$

Ferner ist, wie soeben erwähnt:

$$DH = t$$

Obige Gleichung geht somit über in:

$$G = \frac{a + a + 3t}{2} \cdot t \text{ oder in}$$

$$2) \;\ldots\; G = \frac{2a + 3t}{2} \cdot t$$

Die Höhe $H$ des Prismas, welches die auszuhebende Erde darstellt, ist gleich der Länge $l$ des Grabens. In Rücksicht der für $G$ und $H$ gefundenen Werte erhält man für das gesuchte Volumen der aushebenden Erdmasse:

$$V = \frac{2a + 3t}{2} \,.\, t \,.\, l$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Setzt man hierin die gegebenen Zahlwerte ein, so ist:

$$V = \frac{2 \,.\, 0{,}8 + 3 \,.\, 1{,}55}{2} \cdot 1{,}55 \,.\, 140$$

oder:

$$V = \frac{1{,}6 + 4{,}65}{2} \cdot 217$$

$$V = \frac{6{,}25}{2} \cdot 217 = 3{,}125 \,.\, 217$$

Woraus man schliesslich für das gegebene Zahlenbeispiel

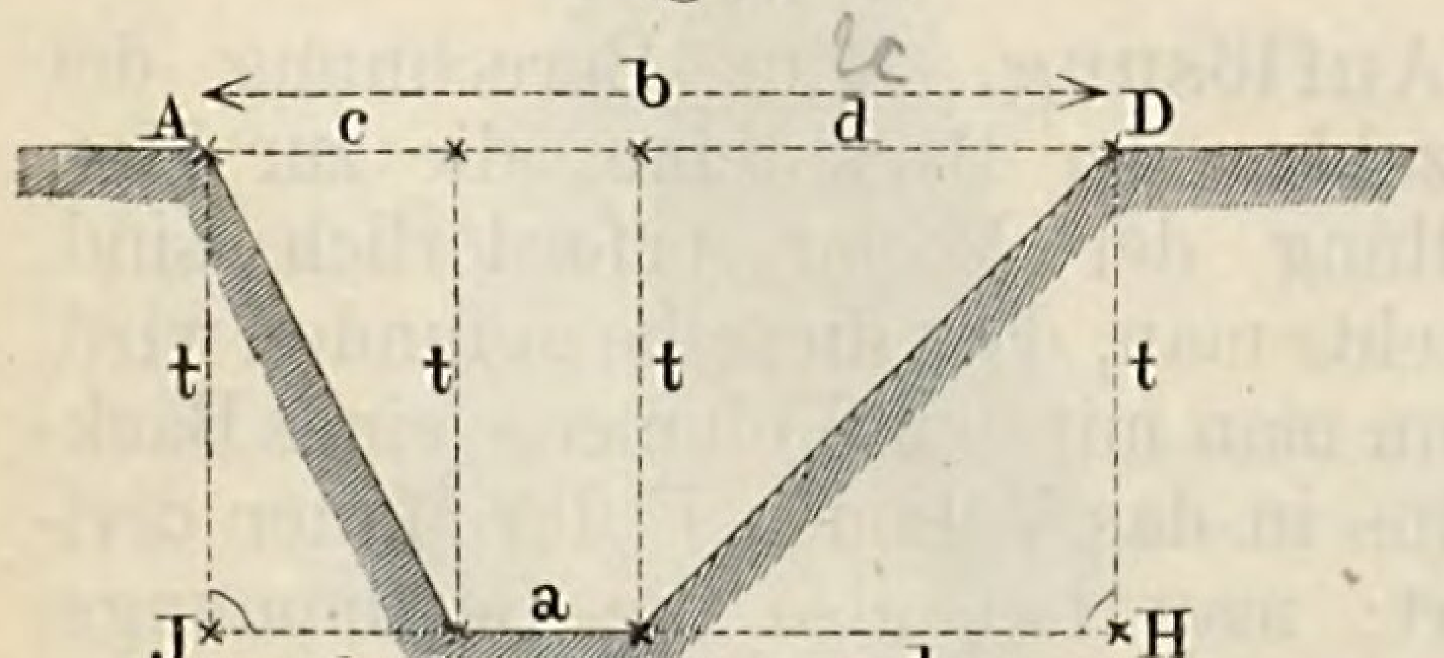
$$\underline{V = 678{,}125 \text{ cbm}}$$

findet.

---

**Aufgabe 9.** Eine **Feldschanze** hat einen Graben (siehe Erkl. 20), dessen Sohlbreite $a = 1$ m, dessen Tiefe $t = 3$ m und dessen Länge $l = 85$ m misst. Wie viel Kubikmeter Erde mussten zur Herstellung dieses Grabens ausgehoben werden, wenn die Escarpe ganze und die Contre-Escarpe (siehe Erkl. 21) halbe Anlage hat?

Figur 7.




**Formel:**

$$V = G \,.\, H \text{ (s. Erkl. 1, S. 1).}$$

**Auflösung.** Die Erdmasse, welche zur Herstellung des Grabens ausgehoben wurde, stellt ein gerades Prisma dar, dessen Grundflächen gleich dem in der Figur 7 gezeichneten Profile des Grabens, nämlich gleich dem tr $ABCD$ sind und dessen Höhe gleich der Länge des Grabens ist.

Das gesuchte Volumen der Erdmasse findet man sonach mittelst der Formel:

1) . . . $V = G \,.\, H$ (siehe Erkl. 1, S. 1).

Den Inhalt $G$ der Grundfläche des gedachten Prismas, bezw. den Inhalt des

**Erkl. 20.** Die Gräben bei Befestigungen bilden einen der wichtigsten Bestandteile derselben, indem die ausgehobene Erde zur Anschüttung der Brustwehr benutzt wird, der Graben selbst als ein bedeutendes Hindernissmittel gegen den Feind dient.

**Erkl. 21.** Bei Befestigungsgräben nennt man die innere Böschung (siehe Erkl. 16) **Escarpe** (franz.), die äussere **Contre-Escarpe.**

In der das **Profil** (s. Erkl. 14) eines Festungsgrabens darstellenden Figur 7 ist: $CD$ die Escarpenlinie und $AB$ die Contre-Escarpenlinie.

Bei Feldschanzen haben die Gräben nur geringe Dimensionen, die **Sohlenbreite** $BC$, siehe Figur 7, ist gewöhnlich $= 1$ m, die obere Breite $AD$ mindestens $= 4$ m, damit der Graben nicht übersprungen werden kann.

Die Escarpe erhält bei Feldschanzen meist **ganze Anlage,** wie auch in der Aufgabe angegeben ist, d. h. nach der Erkl. 18 ist in der Figur 7:

1) . . . . $CH = DH = t$

Die Contre-Escarpe wird stets so steil als möglich gehalten. Da dieselbe in der Aufgabe **halbe Anlage** haben soll, so ist der Erkl. 18 entsprechend:

2) . . . . $JB = \frac{1}{2}AJ = \frac{1}{2}DH = \frac{1}{2}t$

tr $ABCD$, siehe Fig. 7, findet man nach der Erkl. 19 aus der Relation:

2) . . . $G = \frac{BC + AD}{2} \cdot DH$

In dieser Gleichung ist:

$BC = a$, nämlich gleich der gegebenen Sohlbreite, dann ist:

$AD = JH = JB + BC + CH$

od. da: $JB = \frac{1}{2}AJ = \frac{1}{2}t$ (siehe Erkl. 21)

$CH = DH = t$ ( „ „ 21)

$BC = a$ gesetzt werden kann, so ist: $AD = \frac{1}{2}t + a + t = \frac{3}{2}t + a$;

ferner ist:

$DH = t$, nämlich gleich der Tiefe des Grabens.

Obige Gleich. 2) geht somit über, in:

$$G = \frac{a + \frac{3}{2}t + a}{2} \cdot t \text{ oder in}$$

8) . . $G = \frac{4a + 3t}{4} \cdot t$

Da schliesslich noch die Höhe $H$ des gedachten Prismas gleich der Länge $l$ des Grabens ist, so ergibt sich aus den Gleichungen 1) und 3):

$$V = \frac{4a + 3t}{4} \cdot t \cdot l$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $a$, $t$ und $l$ gegebenen Zahlenwerte erhält man:

$$V = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{4} \cdot 3 \cdot 85 \text{ oder}$$

$$V = \frac{13 \cdot 3 \cdot 85}{4} = \frac{39 \cdot 85}{4} = \frac{3315}{4} = 828{,}75$$

Das gesuchte Volumen der ausgehobenen Erdmasse ist also $= 828{,}75$ cbm.

---

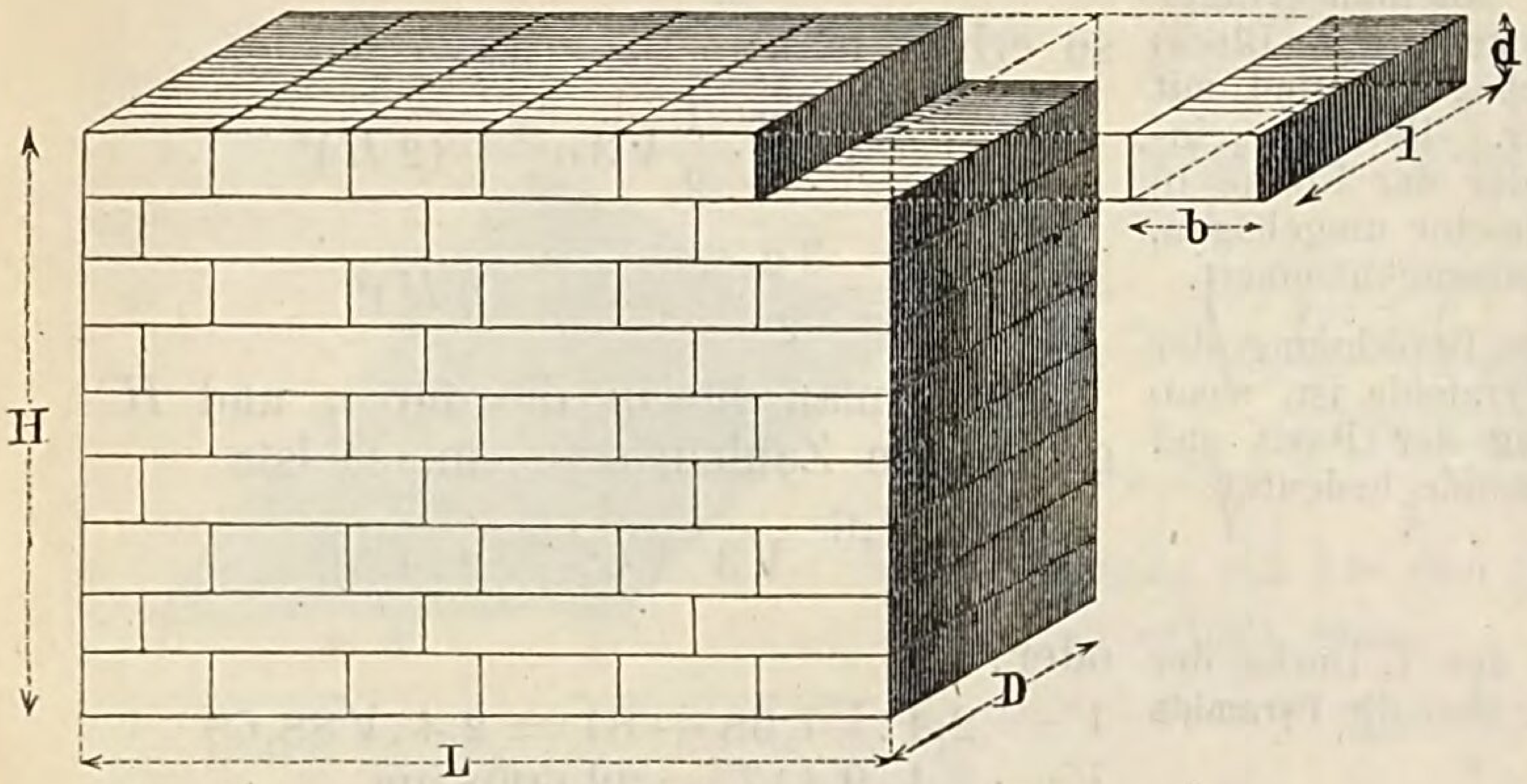
**Aufgabe 10.** Eine **Mauer** von $L = 14$ m Länge, $D = 0{,}28$ m Dicke und $H = 2{,}1$ m Höhe soll aufgeführt und dazu Backsteine — Mauerziegel — verwandt werden, die $l = 0{,}28$ m lang, $b = 0{,}14$ m breit und $d = 0{,}07$ m dick sind. Wie viel solcher Ziegel sind erforderlich, wenn die Mörtelfugen unberücksichtigt bleiben?

**Formel:**

$V = G \cdot H$ (s. Erkl. 1, S. 1).

**Auflösung.** Zur Berechnung der Anzahl $x$ der Backsteine, die zur Herstellung der Mauer erforderlich sind, beachte man, dass dieselbe gefunden wird, wenn man mit dem Volumen $v$ eines Backsteins in das Volumen $V$ der Mauer dividiert; man hat also die Bestimmungsgleichung:

Figur 8.




1) . . . $x = \frac{V}{v}$

Die Mauer, ebenso jeder einzelne Backstein, stellt ein rechtwinkliges ∥ppd (ein gerades Prisma) dar, s. Figur 8. Das Volumen $V$ der Mauer und das Volumen $v$ eines Backsteines findet man sonach mittelst der Formel:

$V = G \, . \, H$ (s. Erkl. 1, S. 1)

und man erhält für das Volumen $V$ der Mauer:

2) . . $V = L \, . \, D \, . \, H = 14 \, . \, 0{,}28 \, . \, 2{,}1$ cbm

für das Volumen $v$ eines Backsteins:

3) . . $v = l \, . \, b \, . \, d = 0{,}28 \, . \, 0{,}14 \, . \, 0{,}07$ cbm

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) ergibt sich für die gesuchte Anzahl der Backsteine:

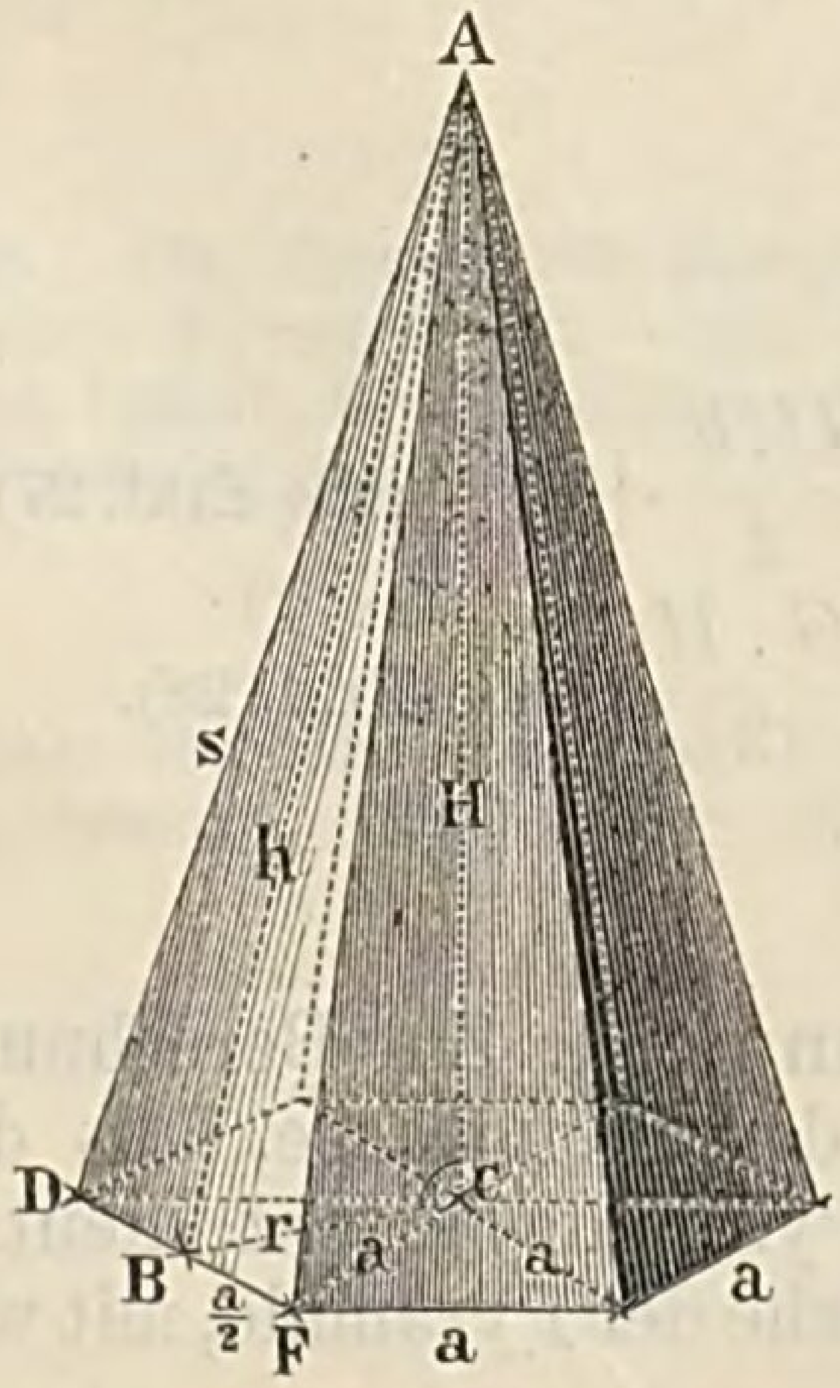
$$x = \frac{14 \, . \, 0{,}28 \, . \, 2{,}1}{0{,}28 \, . \, 0{,}14 \, . \, 0{,}07} = \frac{14 \, . \, 2{,}1}{0{,}14 \, . \, 0{,}07} \text{ oder}$$

$$\underline{\underline{x = 3000}}$$

---

**Aufgabe 11.** Eine **Turmspitze**, welche eine sechsseitige gerade Pyramide bildet, hat eine Höhe $H = 4{,}5$ m; eine Grundkante der Turmspitze misst $a = 1{,}6$ m. Wie viel Quadratmeter Zinkblech sind erforderlich, um die Turmspitze damit zu bedecken, wenn keine Rücksicht auf die erforderlichen Falze genommen wird (siehe Erkl. 22).

Figur 9.




**Formel:**

$$M = \frac{U \, . \, h}{2} \text{ (s. Erkl. 23).}$$

**Auflösung.** Die gesuchte Anzahl $x$ der Quadratmeter Zinkblech, welche zur Bedeckung der Turmspitze erforderlich sind, ist, da auf die etwaigen Falze keine Rücksicht genommen werden soll (siehe Erkl. 22), gleich dem in Quadratmeter ausgedrückten Inhalt des Mantels der in Fig. 9 dargestellten sechsseitigen geraden Pyramide. Man hat somit die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $x = M = \frac{U \, . \, h}{2}$ qm (s. Erkl. 23).

Setzt man: $U = 6a$

und drückt die seitliche Höhe $h$ der Pyramide in die gegebene körperliche Höhe $H$ und die gegebene Grundkante $a$ nach der Erkl. 24, wie folgt aus:

**Erkl. 22.** Unter **Falz** versteht man bei zwei zu vereinigenden Blechen (die Bedeckung der Turmspitze geschieht durch Aneinanderfügen mehrerer passend zugeschnittener Stücke Blech) die an beiden Blechen umgebogenen und mit einander verbundenen Ränder. Bei dem einfachen Falz werden die Ränder der Bleche in einer Breite von einigen Millimeter umgebogen, in einander gehakt und zusammengehämmert.

**Erkl. 23.** Die Formel zur Berechnung der Mantelfläche einer geraden Pyramide ist, wenn $M$ den Mantel, $U$ den Umfang der Basis und $h$ die seitliche Höhe der Pyramide bedeutet:

$$M = \frac{U \cdot h}{2}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über die **Pyramide** handelt.

**Erkl. 24.** Zur Berechnung der seitlichen Höhe $h$ der Pyramide, Fig. 9, aus der Höhe $H$ und der Grundkante $a$ des Körpers, hat man in dem rechtwinkligen Dreieck $ABC$ die Relation:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

Da nun:

$AB = h$

$BC = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (siehe Erkl. 25) und

$AC = H$ ist, so erhält man:

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + H^2 = \frac{3a^2}{4} + H^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + H^2} = \sqrt{\frac{3a^2 + 4H^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + (2H)^2}$$

**Erkl. 25.** Die Grundfläche der in Figur 9 dargestellten Pyramide ist ein reguläres Sechseck.

Jedes Bestimmungsdreieck, wie $CDF$ in Figur 9, eines regulären Sechsecks ist ein reguläres, d. i. **gleichseitiges** Dreieck.

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= a$ ist, wie z. B. die Höhe $BC$ in dem Dreieck $CDF$ in Figur 9, ist nach der Erkl. 11, Seite 5, $= \frac{a}{2}\sqrt{3}$ Man hat also:

$$BC = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + (2H)^2}$$

so erhält man:

$$V = \frac{6a}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + (2H)^2}$$

$$V = \frac{3a}{2} \cdot \sqrt{3a^2 + (2H)^2}$$

Setzt man hierin die für $a$ und $H$ gegebenen Zahlenwerte ein, so ist:

$$V = \frac{3 \cdot 1{,}6}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot 1{,}6^2 + (2 \cdot 4{,}5)^2}$$

oder:

$$V = 2{,}4 \cdot \sqrt{7{,}68 + 81} = 2{,}4 \cdot \sqrt{88{,}68}$$

$$V = 2{,}4 \cdot 9{,}417 = 22{,}6008 \text{ qm}$$

(siehe nachstehende Hülfsrechnung).

Somit sind:

22,601 qm Blech

zur Bedeckung d. Turmspitze erforderlich.

**Hülfsrechnung.**

```
√88,|68 = 9,4170
 81
18|768
   736
188|3200
    1881
1882|131900
     131789
18834|11100
```

---

**Aufgabe 12.** Die grösste **ägyptische Pyramide** bei Gizeh in der Nähe von Kairo (wo das frühere Memphis stand), hatte nach den Messungen von Perrin vor der Versandung (siehe Erkl. 26) eine $a = 233$ m lange und breite Grundfläche und eine Höhe $H = 146$ m. Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen der Steinmasse, aus welcher diese Pyramide besteht?

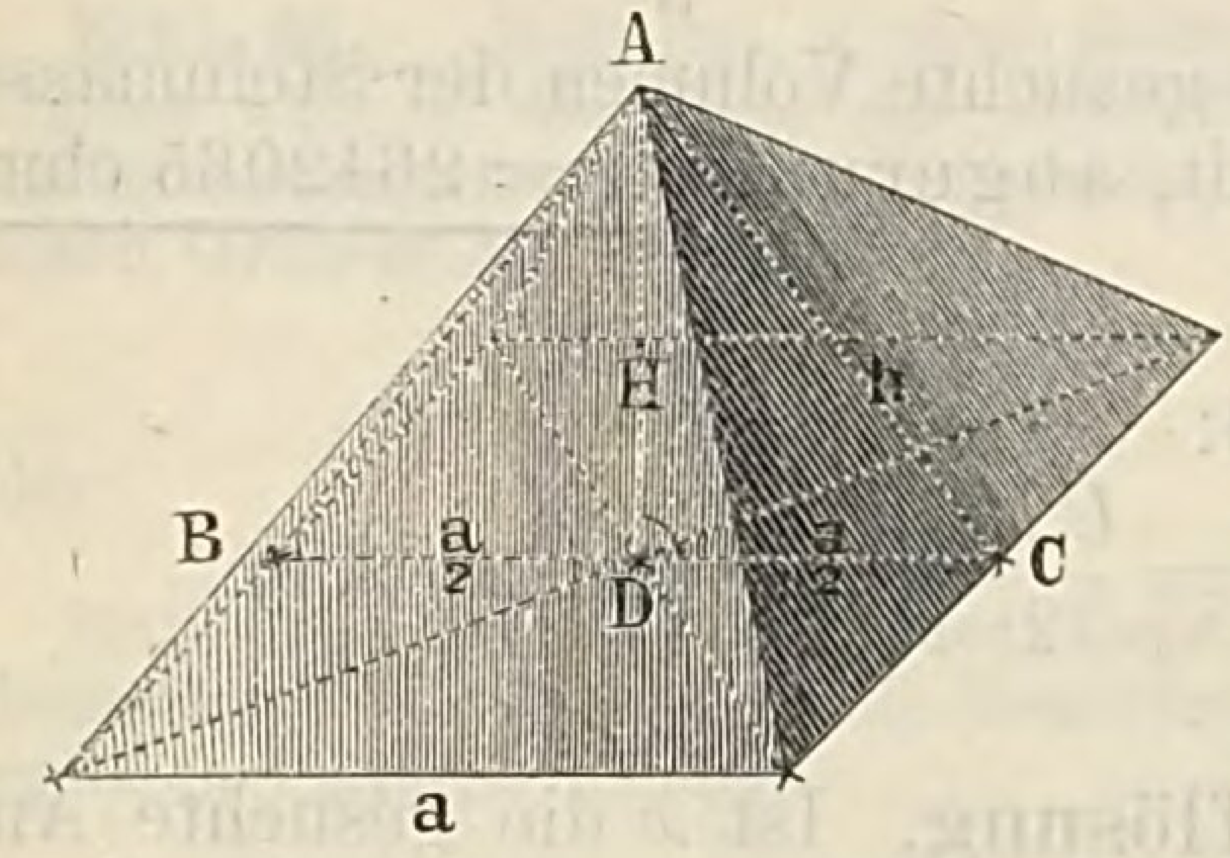
**Formeln:**

I . . $O = \frac{U \cdot h}{2} + G$ (siehe Erkl. 27).

II . . $V = \frac{G \cdot H}{3}$ (siehe Frkl. 28).

**Auflösung.** 1. Zur Berechnung der **Oberfläche** der Steinmasse, aus der die ägyptische Pyramide besteht, dient, wenn auch die Fläche der Pyramide, mit welcher

Figur 10.




**Erkl. 26.** Die **ägyptischen Pyramiden** dienten als Grabmäler der ägyptischen Könige und haben die Gestalt von geraden Pyramiden mit quadratischen Grundflächen (s. Figur 10). Die letzte dieser Pyramiden wurde ca. 2300 v. Chr. erbaut. Diese Pyramiden sind somit die denkbar ältesten Bauwerke.

Die grösste der ägypt. Pyramiden ist die in der vorstehenden Aufgabe erwähnte, nämlich die Pyramide des **Königs Cheops** (Chufu), sie hatte die in der Aufgabe 12 angegebenen Dimensionen, jetzt hat sie in Folge der allmählichen Versandung nur noch eine Länge und Breite von 227,5 m und eine Höhe von 137,18 m.

**Erkl. 27.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche einer geraden Pyramide ist, wenn $O$ die Oberfläche, $U$ den Umfang, $h$ die seitliche Höhe und $G$ den Inhalt der Grundfläche der Pyramide bedeutet:

$$O = \frac{U \cdot h}{2} + G$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über die **Pyramide** handelt.

**Erkl. 28.** Die Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide ist, wenn $V$ das Volumen, $G$ den Inhalt der Grundfläche und $H$ die Höhe der Pyramide bedeutet:

$$V = \frac{G \cdot H}{3}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über die **Pyramide** handelt.

dieselbe auf der Erde sitzt, inbegriffen sein soll, die Formel:

$$O = \frac{U \cdot h}{2} + G \quad \text{(siehe Erkl. 27).}$$

Setzt man in derselben, siehe Fig. 10:

$$U = 4a$$

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4H^2 + a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + a^2}$$

(ergibt sich aus dem rechtwinkl. Dreieck $ADC$)

so erhält man:

$$O = \frac{4a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + a^2}}{2} + a^2$$

oder: $O = a\sqrt{4H^2 + a^2} + a^2$

$$O = a(a + \sqrt{4H^2 + a^2})$$

als **allgemeine** Lösung.

In Rücksicht der für $a$ und $H$ gegeb. Zahlenwerte ergibt sich hieraus:

$$O = 233\,(233 + \sqrt{4 \cdot 146^2 + 233^2})$$

oder: $O = 233\,(233 + \sqrt{85264 + 54289})$

$$O = 233\,(233 + \sqrt{139553})$$

Da nun: $\sqrt{13|95|53} = 373{,}5$ oder **abgerundet** $= 374$ ist.

9
6|495
469
74|2653
2229
746|42400
37325
5075

so erhält man für die gesuchte Oberfläche $O$ der Steinmasse;

$$O = 233\,(233 + 374) = 233 \cdot 607 =$$

$$\underline{141431 \text{ qm}}$$

**2.** Zur Berechnung des **Volumens** der Steinmasse, aus der die ägypt. Pyramide besteht, dient die Formel:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(siehe Erkl. 28).}$$

Setzt man in derselben, s. Figur 10:

$$G = a^2$$

so erhält man:

$$V = \frac{a^2 \cdot H}{3}$$

als **allgemeine** Lösung.

In Rücksicht der für $a$ und $H$ gegeb. Zahlenwerte ergibt sich hieraus:

$$V = \frac{233^2 . 146}{3}$$

oder:

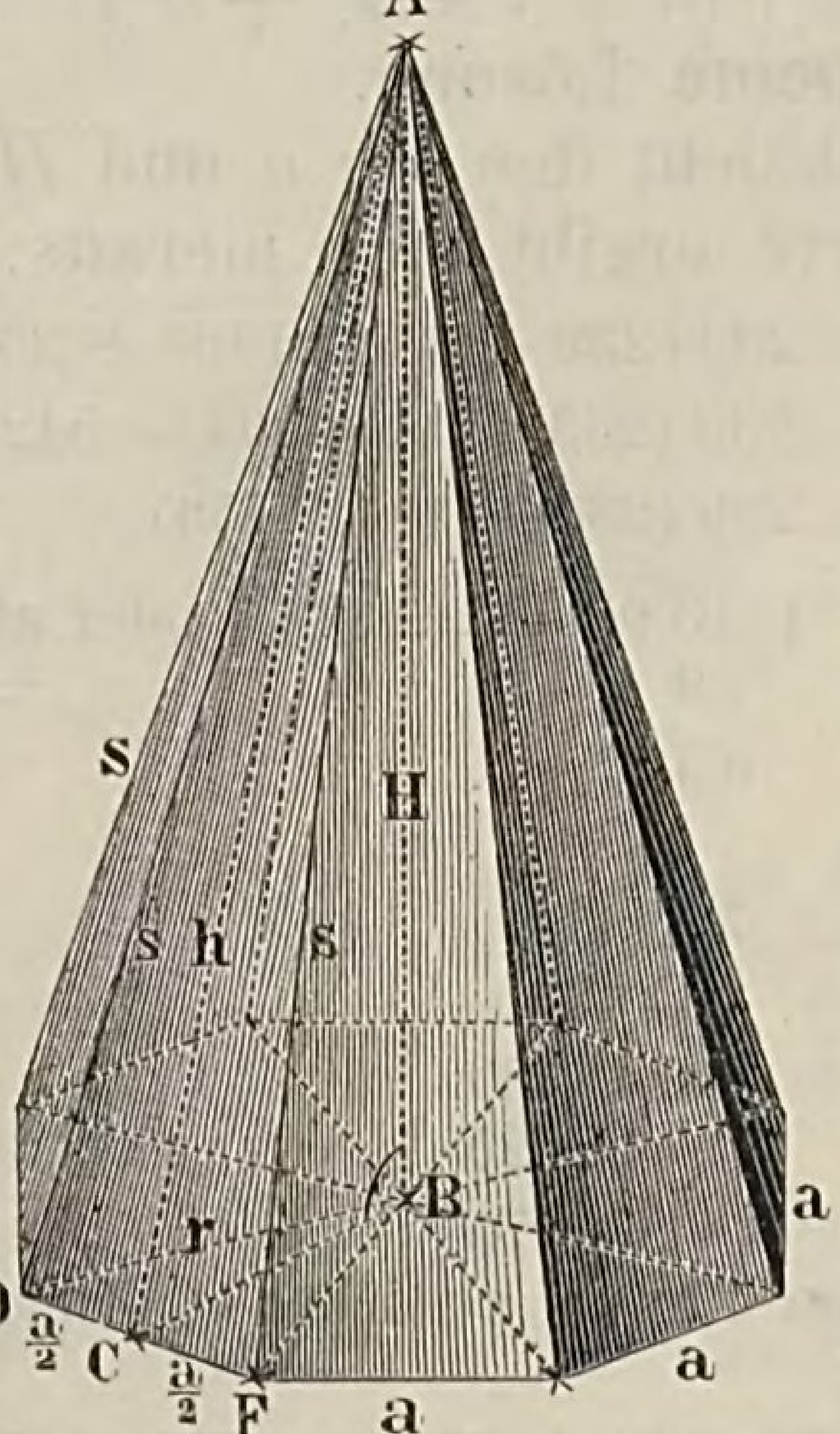
$$V = \frac{7926194}{3}$$

Das gesuchte Volumen der Steinmasse ist somit, abgerundet $=$ 2642065 cbm.

---

**Aufgabe 13.** Eine **Turmspitze** in Form einer achtseitigen geraden Pyramide hat eine Grundkante $a = 1,6$ m und eine Höhe $H = 6,3$ m. Für wie viel Mark Kupferblech ist zur Bedeckung dieser Turmspitze nötig, wenn 1 qm dieses Blechs 27 *M.* kostet und keine Rücksicht auf den erforderlichen Falz (s. Erkl. 22) genommen wird?

Figur 11.




**Erkl. 29.** Zur Bestimmung der seitlichen Höhe $h$ ergibt sich aus dem rechtwinkl. Dreieck $ABC$, siehe Figur 11, die Relation:

$$\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2}$$

oder:

1) . . . . . . . . $h^2 = H^2 + r^2$

Die in dieser Relation vorkommende Grösse $r$, d. i. der Radius des dem **regulären** Achteck, welches die Grundfläche der Pyramide bildet, eingeschriebenen Kreises, kann man auf einfachem Wege durch Trigonometrie in die Seite $ss = a$ dieses Achtecks ausdrücken. Da jedoch in diesem Abschnitt die Trigonometrie noch nicht benutzt werden soll, so beachte man die Erkl. 30. Hiernach erhält man:

$$r = 1,2071068 . a$$

oder, den bei $a$ stehenden Koeffizienten **abgerundet:**

$$r = 1,2071 . a$$

**Formel:**

$$M = \frac{U . h}{2} \text{ (siehe Erkl. 23, S. 9).}$$

**Auflösung.** Ist $x$ die gesuchte Anzahl Mark, welche die Blechbedeckung der Turmspitze kostet und $M$ die Anzahl der Quadratmeter Blech, die zur Bedeckung erforderlich sind, so besteht der Aufgabe gemäss die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $x = 27 . M$ Mark.

Da nun die Turmspitze eine gerade Pyramide vorstellt, so findet man die Anzahl $M$ der Quadratmeter Blech, die zur Bedeckung derselben erforderlich sind, bezw. den Inhalt des Mantels $M$ dieser Pyramide, mittelst der Formel:

2) . . . $M = \frac{U . h}{2}$ (siehe Erkl. 23, S. 9).

Setzt man nämlich hierin:

$$U = 6a = 6 . 1,6$$

und:

$$\left.\begin{aligned} h &= \sqrt{H^2 + (1,2071 . a)^2} \\ &= \sqrt{6,3^2 + (1,2071 . 1,6)^2} \end{aligned}\right\} \text{siehe Erkl. 29}$$

So geht die Gleichung 2) über in:

$$M = \frac{6 . 1,6}{2} \cdot \sqrt{6,3^2 + (1,2071 . 1,6)^2}$$

und diesen Wert in Gleich. 1) substituiert gibt:

$$x = 27 . \frac{6 . 1,6}{2} \cdot \sqrt{6,3^2 + (1,2071 . 1,6)^2}$$

oder:

$$x = 27 . 3 . 1,6 . \sqrt{39,69 + 1,93^2}$$
$$x = 81 . 1,6 . \sqrt{39,69 + 3,7249}$$
$$x = 129,6 . \sqrt{43,4149}$$
$$x = 129,6 . 6,59$$

Hieraus ergibt sich, dass für:

854 *M.* 6 pf.

Kupferblech zur Bedeckung der Turmspitze erforderlich sind.

und die Relation 1) geht über in:

$$h^2 = H^2 + (1{,}2071 \,.\, a)^2$$

Woraus sich: $h = \sqrt{H^2 + (1{,}2071 \,.\, a)^2}$

ergibt:

**Erkl. 30.** Bedeutet $r$ den Radius eines Kreises und $S_8$ die Seite des demselben **umschriebenen regulären Achtecks**, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

$$r = \frac{S_8}{2}(1 + \sqrt{2})$$

oder:

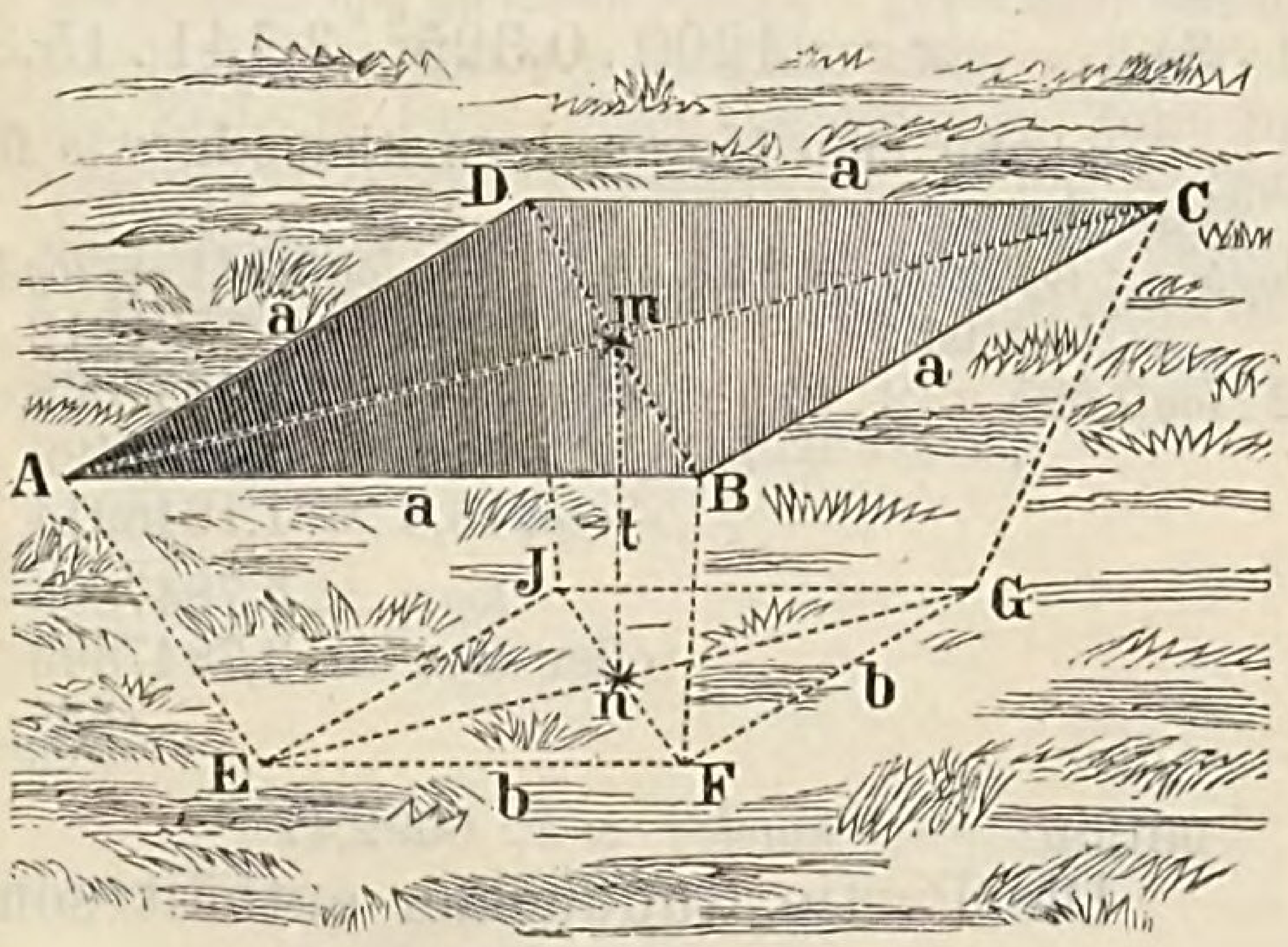
$$r = 1{,}2071068 \,.\, S_8$$

Man siehe den Abschnitt des Kapitels: **Die Planimetrie**, welcher über die Berechnung der **regulären Polygone** handelt.

---

**Aufgabe 14.** Wie viel Hektoliter Wasser fasst ein **Bassin**, dessen obere Umgrenzung ein Quadrat mit der Seite $a = 12$ m ist, dessen Seitenwände gleichmässig abgedacht sind und dessen Bodenfläche ebenfalls ein Quadrat mit der Seite $b = 4$ m ist, wenn die Tiefe $t$ des Bassins $= 2{,}10$ m beträgt?

Figur 12.




**Erkl. 31.** Die Formel zur Berechnung des Volumens einer abgestumpften Pyramide ist, wenn $V$ das Volumen, $H$ die Höhe, $G$ den Inhalt der Grundfläche, $g$ den Inhalt der Deckfläche bedeutet:

$$V = \frac{H}{3}\,(G + \sqrt{G \,.\, g} + g)$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über den **Pyramidenstumpf** handelt.

**Formel:**

$$V = \frac{H}{3}\,(G + \sqrt{G \,.\, g} + g) \quad \text{(s. Erkl. 31).}$$

**Auflösung.** Das Bassin — siehe Figur 12 — hat, da sowohl die obere Begrenzung $ABCD$, als auch die Bodenfläche $EFGI$ Quadrate und die Seitenwände **gleichmässig** abgedacht sind, die Form einer abgestumpften geraden Pyramide. Das Volumen (den Inhalt) dieses Bassins findet man somit mittelst der Formel:

$$V = \frac{H}{3}\,(G + \sqrt{G \,.\, g} + g) \quad \text{(s. Erkl. 31).}$$

Setzt man hierin:

$$H = t = 2{,}10$$
$$G = a^2 = 12^2$$
$$g = b^2 = 4^2$$

so wird:

$$V = \frac{2{,}10}{3}\,(12^2 + \sqrt{12^2 \,.\, 4^2} + 4^2)\ \text{cbm}$$

oder:

$$V = 0{,}7(144 + 12 \,.\, 4 + 16)\ \text{cbm}$$
$$V = 0{,}7 \,.\, 208\ \text{cbm}$$

und man findet für das Volumen des Bassins

$$= 145{,}6\ \text{cbm}$$

Da aber nach **Hektoliter** gefragt ist, so muss man nach der Erkl. 9, Seite 4, um Hektoliter zu erhalten, die soeben gefundenen Kubikmeter mit 10 multiplizieren. Hiernach enthält das Bassin

$$= 1456\ \text{Hektoliter.}$$

---

**Aufgabe 15.** Wie viel Kubikmeter Holz enthält eine Partie **Rundhölzer** (siehe Erkl. 32) von 1200 Stück, wenn jedes derselben einen Durchmesser $D = 0,65$ m und eine Länge $l = 15,3$ m hat?

**Erkl. 32.** Unter **Rundhölzer** versteht man im Schiffsbau die zur Takelage eines Schiffes gehörigen Masten, Stengen, Raaen, Gafeln und Bäume etc. Die Form der Rundhölzer ist meistens die der geraden Kreiscylinder.

**Erkl. 33.** Die Formel zur Berechnung des Volumens eines geraden Kreiscylinders ist, wenn $V$ das Volumen, $r$ den Radius des Grundkreises, $H$ die Höhe des Körpers und $\pi$ die irrationale Zahl 3,141 .. bedeutet:

$$V = R^2 \pi . H$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welches über den **Cylinder** handelt.

**Formel:**

$$V = R^2 \pi . H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet $V$ das Volumen eines Stücks der in der Aufgabe erwähnten Rundhölzer, so hat man zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ der 1200 Stück Rundhölzer, die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $x = 1200 . V$

Da die erwähnten Rundhölzer (siehe Erkl. 32) die Form von geraden Kreiscylindern haben, so findet man das Volumen eines solchen mittelst der Formel:

$$V = R^2 \pi . H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

Setzt man hierin:

$$R = \frac{D}{2} = \frac{0,65}{2} = 0,325 \text{ m}$$

$$H = l = 15,3 \text{ m}$$

$$\pi = 3,141 \ldots$$

so erhält man:

2) . . . $V = 0,325^2 . 3,141 . 15,3$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich:

3) . . . $x = 1200 . 0,325^2 . 3,141 . 15,3$

$x$ kann man hieraus logarithmisch, wie folgt berechnen:

$$\log x = \log 1200 + 2 . \log 0,325 + \log 3,141 + \log 15,3$$

Nun ist: $\log 1200 = 3,0791812$

$+ 2 . \log 0,325 = 2 . (0,5118834 - 1) = 1,0237668 - 2$

$+ \log 3,141 \ldots = 0,4971499$

$+ \log 15,3 = 1,1846914$

$\log x = 5,7847893 - 2$

oder $\log x = 3,7847893$

7884

9

mithin: $numlog\ x = 6092,41$

Die Partie Rundhölzer enthält somit:

$= 6092,41$ cbm.

---

**Aufgabe 16.** Ein Teil eines **eisernen Mastes** (s. Erkl. 34) wird als **Wassertank** (siehe Erkl. 35) benutzt. Dieser Behälter hat im Durchmesser $D = 23,8$ engl. Zoll und eine Höhe $H = 18,5$ engl. Fuss; wie viel Gallonen (siehe Erkl. 36) bezw. wie viel Liter Wasser fasst er?

**Erkl. 34.** Unter „**Mast**" versteht man einen senkrecht oder etwas schief gestellten langen Baum, an welchen die Raaen und Segel eines Schiffes befestigt werden. — Die Masten können von Holz, von Eisen oder von Stahl sein. Die grossen Masten werden aus mehreren Stücken zusammengesetzt.

**Formel:**

$$V = R^2 \pi . H \text{ (siehe Erkl. 33).}$$

**Auflösung.** Die Wassermasse, welche sich in dem als Wassertank (s. Erkl. 35) benutzten Teil des betreffenden eisernen Mastes (s. Erkl. 34) befindet, bezw. welche in demselben Aufnahme finden kann, stellt, da sie den cylindrischen hohlen Raum des Mastes ausfüllt, einen geraden Kreiscylinder dar, dessen Volumen mittelst der Formel:

Da die **eisernen** Maste um ca. 25% leichter als die hölzernen sind, so finden in der neuen Zeit erstere vielfache Anwendung.

Die **eisernen Maste** bestehen aus gewalztem Blech und sind **innen hohl**; dieser hohle Raum wird zu manchen Zwecken benutzt, so z. B. wie in der Aufgabe angegeben ist als Wassertank (siehe Erkl. 35).

**Erkl. 35.** Die Bezeichnung „**Tank**" kommt aus dem Englischen und ist besonders in der Seemannssprache geläufig. — Man versteht unter „Tank" einen eisernen Behälter zum Aufbewahren von Wasser, Oel, Petroleum etc.

**Erkl. 36.** Unter „**Gallone**" versteht man ein englisches Flüssigkeitsmass.

1 Gallone = 4 Quarts = 4,543458 Liter

1 engl. Kubikfuss = 27 Quarts

oder: 1 „ „ $= \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$ Gallonen.

**Erkl. 37.** Bei numerischen Berechnungen muss stets mit **gleichen** Maassen gerechnet werden. In der vorstehenden Aufgabe müssen entweder die Zolle in Fuss, oder die Fuss in Zolle umgewandelt werden; ersteres ist das der Aufgabe entsprechendere. Man beachte hierbei, dass:

1 engl. Kubikfuss = 12 engl. Zoll enthält mithin:

1 engl. Zoll = 1/12 engl. Fuss ist.

$$V = R^2\pi \,.\, H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

berechnet wird.

Setzt man hierin, da der Durchmesser des Wasserbehälters gleich dem der Wassersäule ist:

$$R = \frac{D}{2} = \frac{23{,}8''}{2} = \frac{23{,}8'}{2\,.\,12} \text{ (s. Erkl. 37)}$$

$H = 18{,}5'$ und

$\pi = 3{,}141$ so erhält man:

$$V = \left(\frac{23{,}8}{24}\right)^2 .\, 3{,}141 \,.\, 18{,}5 \textbf{ Kubikfuss.}$$

Da nach Gallonen gefragt ist, so berücksichtige man die Erkl. 36, wonach sich aus vorstehender Gleichung:

$$V = \left(\frac{23{,}8}{24}\right)^2 .\, 3{,}141 \,.\, 18{,}5 \,.\, \frac{27}{4} \textbf{ Gallonen}$$

ergibt.

$V$ kann man hieraus, wie folgt, logarithmisch berechnen:

$$\log V = 2\,.\,(\log 23{,}8 - \log 24) + \log 3{,}141 + \log 18{,}5 + \log 27 - \log 4$$

| | | (+ 1) | (— 1) |
|---|---|---|---|
| Nun ist: | $\log 23{,}8 =$ | 1,3765770 | |
| | $-\log 24 =$ | — 1,3802112 | |
| | $\log 23{,}8 - \log 24 =$ | 0,9963658 | — 1 |
| | | | . 2 |
| | $2\,.\,(\log 23{,}8 - \log 24) =$ | 1,9927316 | — 2 |
| | $+\log 3{,}141 \ldots =$ | 0,4971499 | |
| | $+\log 18{,}5 =$ | 1,2671717 | |
| | $+\log 27 =$ | 1,4313638 | |
| | | 5,1884170 | — 2 |
| | $-\log 4 =$ | — 0,6020600 | |
| | $\log V =$ | 4,5863570 | — 2 |
| | oder $\log V =$ | 2,5863578 | |
| | | 3510 | |
| | | 60 | |
| mithin: | | 56 | |
| | $numlog\ V = 385{,}7954$ | 4 | |

Der in Rede stehende Wassertank enthält somit

= 385,80 **Gallonen.**

Will man diesen Inhalt in Liter wissen, so hat man nach der Erkl. 36:

385,80 Gallonen = 385,80 . 4,54

= 1751,53 **Liter**

---

**Aufgabe 17.** Wie viel Kubikmeter, bezw. wie viel Liter Wasser fasst ein **cylindrischer Dampfkessel** mit ebenen Böden bei halber Füllung, wenn der Umfang $U$ des Kessels = 4,8 m und seine Länge $l$ = 5 m misst.

**Erkl. 38.** Die **Dampfkessel** bilden den ersten Bestandteil der Dampfmaschinen, indem sie zur Aufnahme des Wassers dienen, welches durch

**Formel:**

$$V = R^2\pi \,.\, H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

**Auflösung.** Die Form des in der Aufgabe erwähnten Dampfkessels ist die eines geraden Kreiscylinders (s. Erkl. 38). Das Volumen desselben findet man sonach mittelst der Formel:

Feuerung in Dampf verwandelt, die bewegende Kraft der Maschine gibt.

Die Dampfkessel werden meist aus Platten von Schmiedeisen oder Gussstahlblech zusammengenietet.

Die Form der Dampfkessel ist sehr verschieden. Die einfachste Form ist die in der Aufgabe erwähnte, nämlich die Form eines geraden Kreiscylinders.

**Erkl. 39.** Die Formel zur Berechnung des Umfangs eines Kreises ist, wenn $U$ den Umfang, $r$ den Radius des Kreises und $\pi$ die irrationale Zahl 3,141 .. bedeutet:

$$U = 2r\pi$$

Hieraus erhält man:

$$r = \frac{U}{2\pi}$$

**Erkl. 40.** Da:

1) . . . 1 cdm = 1 Liter und
1 m = 10 dm, also

2) . . . 1 cbm = 1000 cbdm ist, so folgt aus den Gleichungen 1) und 2), dass:

1 cbm = 1000 cbdm = 1000 Liter fasst.

$$V = R^2\pi \, . \, H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

Setzt man hierin:

$$R = \frac{U}{2\pi} = \frac{4{,}8}{2 \, . \, 3{,}141} \text{ (s. Erkl. 39).}$$

u. $H = l = 5$ m

so erhält man:

$$V = \left(\frac{4{,}8}{2 \, . \, 3{,}141}\right)^2 . \, 3{,}141 \, . \, 5 \text{ cbm.}$$

Da nun nach dem in **Liter** ausgedrückten Inhalt $x$ bei **halber Füllung** gefragt ist, so erhält man in Rücksicht der Erkl. 40 aus vorstehender Gleichung:

$$x = \frac{\left(\frac{4{,}8}{2 \, . \, 3{,}141}\right)^2 . \, 3{,}141 \, . \, 5 \, . \, 1000}{2} \text{ Liter}$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$x = \frac{2{,}4^2 \, . \, 2500}{3{,}141} \text{ Liter.}$$

Hieraus kann man $x$ logarithmisch, wie folgt berechnen:

$log\,x = 2 \, . \, log\,2{,}4 + log\,2500 - log\,3{,}141$ . .

| | |
|---|---|
| Nun ist: $log\,2{,}4 =$ | 0,3802112 |
| | .2 |
| | 0,7604224 |
| $+ \, log\,2500 =$ | 3,3979400 |
| | 4,1583624 |
| $- \, log\,3{,}141 \ldots =$ | $-$ 0,4971499 |
| | 3,6612125 |
| | 2067 |
| mithin: | 58 |
| $numlog\;x = 4583{,}66$ | 57 |

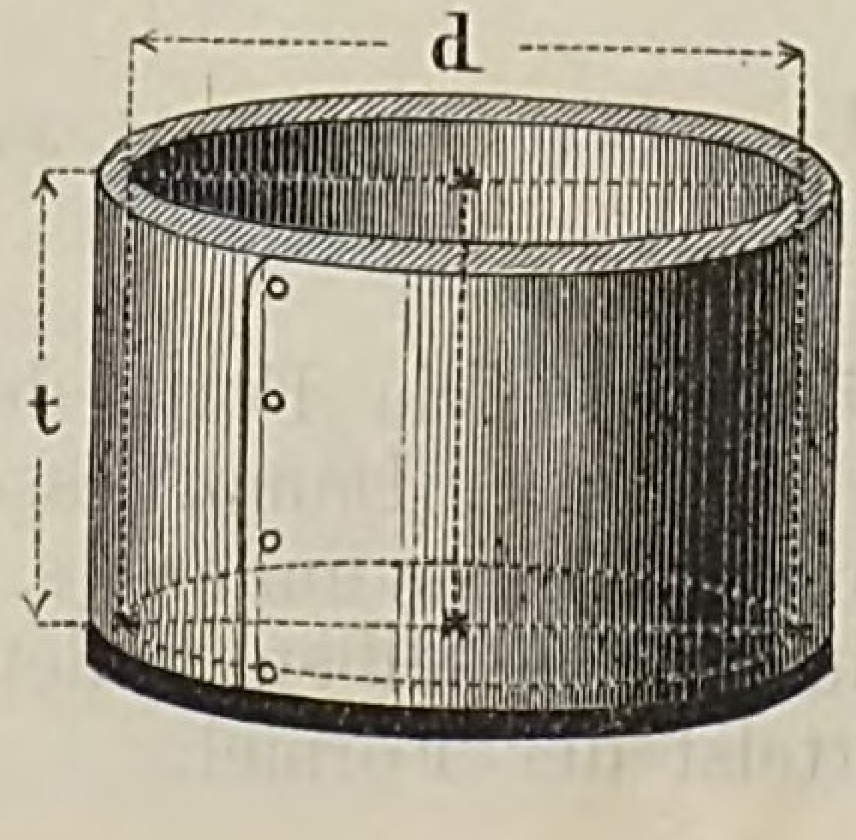
Der Dampfkessel enthält somit bei halber Füllung

= 4583,66 Liter.

---

**Aufgabe 18.** Welche Dimensionen hat ein zur Messung **trockener Gegenstände** bestimmtes **50-Litergefäss**, ein sogenannter **Neu-Scheffel** (s. Erkl. 41)?

Figur 13.




**Formel:**

$$V = R^2\pi \, . \, H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

**Auflösung.** Nach der Erkl. 41 haben die Hohlmaasse, welche zur Messung trockener Gegenstände dienen, die Form eines cylindrischen Gefässes, s. Figur 13, dessen lichte Weite, bezw. dessen Durchmesser zur Tiefe sich wie 3 : 2 verhält.

Da nun ein cylindrisches Gefäss seiner Grösse, seinem Volumen nach vollständig bestimmt ist, wenn man seine lichte Weite (seinen Durchmesser) und seine Tiefe (bezw. Höhe) kennt, so sind der Aufgabe entsprechend diese beiden Dimensionen zu suchen.

**Erkl. 41.** Die zur Messung **trockener Gegenstände bestimmten Hohlmaasse** haben die Form eines cylindrischen Gefässes, dessen Durchmesser (lichte Weite, s. Erkl. 8, Seite 4) zur Tiefe sich **wie 3 : 2** verhält, siehe Fig. 13.

Die Grundlage der sämmtlichen Hohlmaasse bildet das Liter.

Von den Hohlmaassen, welche zur Messung trockener Gegenstände als: Getreide, Mehl, Obst, Kartoffeln, Kohlen etc. dienen, führt das in der Aufgabe erwähnte 50-Liter-Hohlmass den besonderen Namen: „**Neu-Scheffel**“.

**Erkl. 42.** Die aus nebenstehender Bestimmungsgleichung 2) sich ergebenden Werte für $x$ und $y$ sind **Dezimeter**, weil das in dieser Gleichung enthaltene Volumen in Kubikdezimeter (Liter) ausgedrückt ist.

**Hülfsrechnung.**

$$x = \sqrt[3]{\frac{300}{3{,}141}}$$

$$\log x = \frac{1}{3}(\log 300 - \log 3{,}141)$$

| | | |
|---|---|---|
| Nun ist: | $\log 300 =$ | 2,4771213 |
| | $-\log 3{,}141 \ldots =$ | − 0,4971499 |
| | | 1,9799714 |
| | | $. \frac{1}{3}$ |
| | $\log x =$ | 0,6599905 |
| | | 9827 |
| mithin: | | 78 |
| | $numlog\, x = 4{,}57078$ | 76 |

Bezeichnet man die eine dieser Dimensionen, z. B. die lichte Weite, den Durchmesser $d$, siehe Fig. 13, des gedachten Hohlmaasses mit $x$, die andere, also die Tiefe $t$, mit $y$, so hat man nach der Erkl. 41 die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $x : y = 3 : 2$.

Ferner hat man nach der Formel:

$V = R^2 \pi . H$ (s. Erkl. 33).

Da das cylindrische Gefäss 50 Liter oder nach der Erkl. 9, Seite 4, 50 cdm enthalten soll, die Bestimmungsgleichung:

2) . . . $50 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 . 3{,}141 . y$

Zur Berechnung der Grössen $x$ und $y$ aus diesen beiden Gleichungen verfahre man, wie folgt: aus Gleichung 1) erhält man:

3) . . . $y = \frac{2}{3} x$

diesen Wert für $y$ in Gleichung 2) substituiert gibt:

$$50 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 . 3{,}141 . \frac{2}{3} x$$

oder:

$$50 = \frac{x^2 . 3{,}141 . 2 . x}{4 . 3}$$

$$50 = \frac{3{,}141\, x^3}{6}$$

und hieraus erhält man:

$$x = \sqrt[3]{\frac{300}{3{,}141}}$$

oder:

$x = 4{,}57078$ (s. nebenst. Hülfsrechn.)

Die **lichte Weite** (der Durchmesser) des Neu-Scheffels ist somit:

$2 . 4{,}57078 = 9{,}14156$ dm (s. Erkl. 42).

Setzt man diesen Wert in vorstehende Gleichung 3) ein, so erhält man:

$$y = \frac{2}{3} . 9{,}14156$$

oder:

$$y = 6{,}09436$$

Die **Tiefe** des Neu-Scheffels ist hiernach:

$= 6{,}09436$ dm (s. Erkl. 42)

**Aufgabe 19.** Eine **Quelle**, welche stündlich 82 Hektoliter Wasser liefert, wird in ein **cylindrisches Bassin** geleitet, dessen Durchmesser 7,5 m ist. Bis zu welcher Höhe wird das Bassin mit Wasser gefüllt sein, wenn die Quelle 4 Stunden lang in das Bassin geleitet wird?

**Formel:**

$V = R^2 \pi . H$ (s. Erkl. 33, S. 13).

**Auflösung.** Da die in Rede stehende Quelle stündlich 82 Hektoliter Wasser liefert, so wird sie in den 4 Stunden, in welchen sie in das cylindrische

**Erkl. 42a.**

$$1000 \text{ cdm} = 1 \text{ cbm}$$
$$1 \text{ cdm} = \frac{1}{1000} \text{ cbm}$$
$$1 \text{ Liter} = 1 \text{ cdm} = \frac{1}{1000} \text{ cbm}$$
$$1 \text{ Hektoliter} = 100 \text{ Liter} = 100 \text{ cdm}$$
$$= \frac{100}{1000} \text{ oder } = \frac{1}{10} \text{ cbm.}$$

**Erkl. 43.** In Betreff der Subtraktion von Logarithmen siehe man die Regel 19, S. 201 in Dr. Kleyers Lehrbuch der Logarithmen.

**Hülfsrechnung.**

$$log\, 7{,}5 = 0{,}8750613$$
$$\cdot 2$$
$$1{,}7501226$$
$$+ log\, 3{,}141 = 0{,}4971499 \;(= log\, \pi)$$
$$+ 2 \cdot log\, 7{,}5 + log\, 3{,}141 = 2{,}2472725$$

Bassin geleitet wird, 4.82 Hektoliter Wasser in dieses Bassin ergossen haben.

In dem cylindrischen Bassin befindet sich somit nach diesen 4 Stunden eine cylindrische Wassersäule, deren Durchmesser $D$ gleich dem Durchmesser des Bassins, nämlich $= 7{,}5$ m, deren Höhe $H = x$ nämlich gesucht ist und deren Volumen $V = 4.82$ Hektoliter oder, nach der Erkl. 42a, in Körpermass ausgedrückt.

$= 4 \,.\, 82 \cdot \frac{1}{10}$ cbm ist. In Rücksicht dieser Zahlenwerte hat man nach der Formel:

$$V = R^2 \pi \,.\, H \text{ (s. Erkl. 33)}$$

somit die Bestimmungsgleichung:

$$4.82 \,.\, \frac{1}{10} = \left(\frac{7{,}5}{2}\right)^2 . \, 3{,}141 \,.\, x$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$32{,}8 = \frac{7{,}5^2}{4} \cdot 3{,}141 \,.\, x$$

oder:

$$x = \frac{131{,}2}{7{,}5^2 \,.\, 3{,}141}$$

woraus man $x$ logarithmisch, wie folgt, berechnen kann:

$$log\, x = log\, 131{,}2 - (2 \,.\, log\, 7{,}5 + log\, 3{,}141)$$

Nun ist:

$$+1 \qquad -1$$
$$log\, 131{,}2 = 2{,}1179338 \text{ (s. Erkl. 43)}$$
$$-(2 \,.\, log\, 7{,}5 + log\, 3{,}141) = -2{,}2472725 \text{ (s. nebenst. Hülfsrechn.)}$$
$$log\, x = 0{,}8706613 - 1$$
$$6614$$

mithin:

$$numlog\; x = 0{,}74244$$

Die gesuchte Höhe $x$, bis zu welcher das Bassin nach 4 Stunden durch die Quelle mit Wasser gefüllt wird, ist somit abgerundet

$$= 0{,}74 \text{ m}$$

---

**Aufgabe 20.** Ein 50-pfündiger **Mörser** (s. Erkl. 44) hat eine Kammer, deren Weite $= 11{,}8$ cm und deren Länge $= 28{,}8$ cm misst; wie viel Kilogramm Pulver kann diese Kammer aufnehmen, wenn die Abrundung am Boden der Kammer als nicht vorhanden angenommen wird und wenn man weiss, dass 1 cdm des betreff. Pulvers $= 0{,}97$ kg wiegt?

**Formel:**

$$V = R^2 \pi \,.\, H \text{ (s. Erkl. 33, S. 13).}$$

**Auflösung.** Da der Aufgabe gemäss 1 cdm des Pulvers $= 0{,}97$ kg wiegt, so hat man zur Bestimmung der gesuchten $x$ kg, welche die Pulverladung des Mörsers enthalten kann, wenn man das Volumen derselben — **in cdm** ausgedrückt — mit $y$ bezeichnet, die Gleich.:

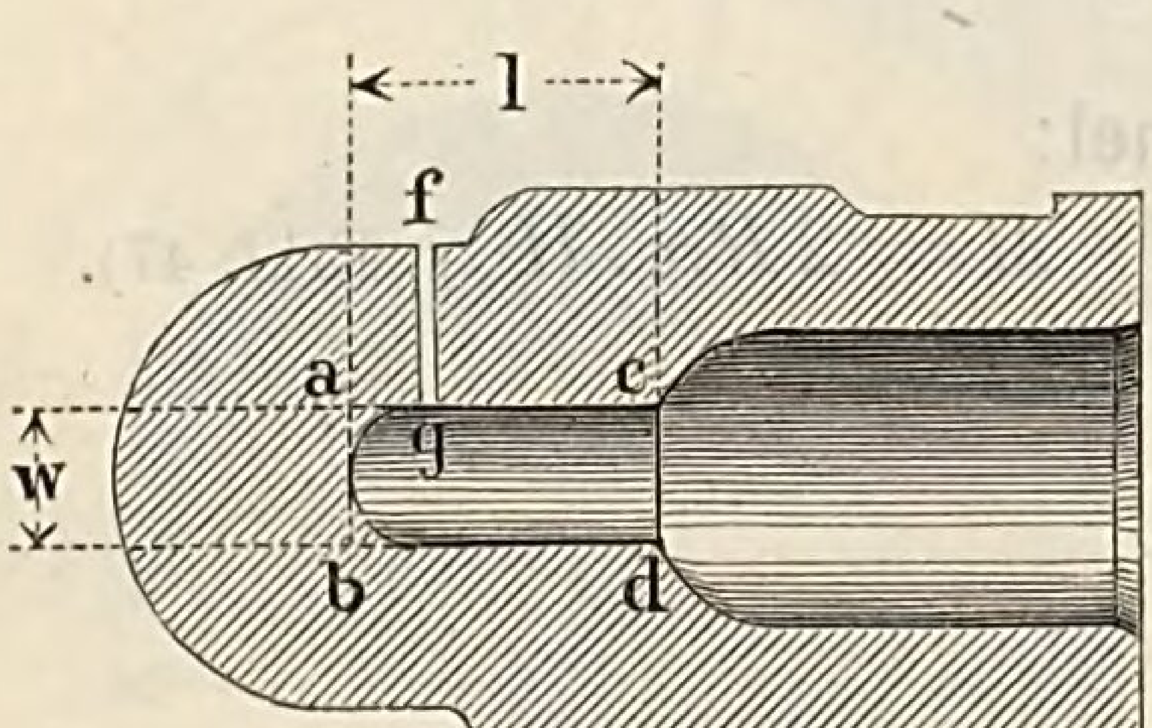
1) . . . $x = 0{,}97 \,.\, y$

**Erkl. 44.** In der Aufgabe ist unter „**Mörser**" ein Geschütz zu verstehen. Die Geschütze zerfallen im allgemeinen in zwei Arten, nämlich in Kanonen und Mörser. Die Kanonen haben lange Rohre und erhalten starke Ladung, dienen dabei meist zum direkten Schuss. Die Mörser haben bedeutend kürzere Rohre und erhalten schwache Ladung, dienen zum indirekten Schuss.

Die Mörser werden nach dem Gewicht der zugehörigen eisernen Vollkugel benannt, dementsprechend unterscheidet man 7-, 25-, 50- etc. **pfündige** Mörser.

**Erkl. 45.** Die cylindrische Bohrung eines Mörserrohres verengt sich, was bei den Kanonen nicht der Fall ist, nach hinten zu der sogenannten **Kammer** $abcd$, siehe Figur 14, welche zur Aufnahme des Pulvers dient und in welche das Zündlicht $fg$ mündet.

Figur 14.




Zur Bestimmung des Volumens $y$ der Pulverkammer beachte man, dass dieselbe, wenn die am Boden $ab$ der Kammer, siehe Figur 14, vorhandene Abrundung als **nicht vorhanden** angenommen wird, einen Cylinder vorstellt, dessen Durchmesser $D$ gleich der Weite $w$ und dessen Höhe $H$ gleich der Länge $l$ der Kammer ist. Für das gesuchte Volumen $V = y$ erhält man somit nach der Formel:

$$V = R^2\pi . H$$

die Gleichung:

$$y = \left(\frac{w}{2}\right)^2 . \pi . l$$

Setzt man hierin für $w$ und $l$ die gegebenen Zahlenwerte und zwar in Decimeter ausgedrückt, weil man das Volumen in Kubikdecimeter haben will, so erhält man die weitere Bestimmungsgleichung:

$$2) \; . \; . \; . \; y = \left(\frac{1{,}18}{2}\right)^2 . 3{,}141 . 2{,}88 \text{ cdm}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man die Gleichung:

$$3) \; . \; . \; . \; x = \left(\frac{1{,}18}{2}\right)^2 . 3{,}141 . 2{,}88 . 0{,}97$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$x = 0{,}59^2 . 3{,}141 . 2{,}88 . 0{,}97$$

woraus man $x$ logarithmisch, wie folgt, berechnen kann:

$$log\, x = 2 . log\, 0{,}59 + log\, 3{,}141 + log\, 2{,}88 + log\, 0{,}97$$

Nun ist: $log\, 0{,}59 = 0{,}7708520 - 1$
$. 2$
$1{,}5417040 - 2$
$+ log\, 3{,}141 = + 0{,}4971499$
$+ log\, 2{,}88 = + 0{,}4593925$
$+ log\, 0{,}97 = 0{,}9867717 - 1$
$log\, x = 3{,}4850181 - 3$
oder $log\, x = 0{,}4850181$
0112

mithin: $numlog\; x = 3{,}0550.$

Unter der gegebenen Voraussetzung beträgt somit die Pulverladung des Mörsers

$$= 3{,}06 \text{ kg}$$

---

**Aufgabe 21.** Ein **Brunnenschacht**, dessen lichte Weite $= 0{,}8$ m, dessen Wanddicke $= 30$ cm und dessen Tiefe $= 9{,}3$ m misst, soll ausgeführt werden. Wie viel cbm Quadersteine sind hierzu erforderlich?

**Formel:**

$$V = \pi . H . (R^2 - r^2) \text{ (s. Erkl. 46).}$$

**Auflösung.** Das Mauerwerk des gedachten Brunnenschachtes stellt einen Hohlcylinder dar. Zur Berechnung des

**Erkl. 46.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines Hohlcylinders ist, wenn $R$ den Radius der äusseren Mantelfläche, $r$ den Radius der inneren Mantelfläche bedeutet:

$$V = \pi . H(R^2 - r^2).$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Cylinder** handelt.

gesuchten Volumens $x$ desselben hat man nach der Formel:

$$V = \pi . H . (R^2 - r^2) \text{ (s. Erkl. 46).}$$

wenn man berücksichtigt, dass der Aufgabe gemäss:

$H = 9{,}3$ m, nämlich gleich der Tiefe,

$r = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$ m, nämlich gleich der halben lichten Weite und

$R = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$, nämlich gleich der halben lichten Weite plus der im Meter ausgedrückten Wanddicke des Mauerwerks des Brunnenschachtes ist,

die Gleichung:

$$x = 3{,}14 . 9{,}3 . (0{,}7^2 - 0{,}4^2).$$

Aus derselben erhält man zunächst:

$$x = 3{,}14 . 9{,}3 . (0{,}7 + 0{,}4) . (0{,}7 - 0{,}4)$$
$$x = 3{,}14 . 9{,}3 . 1{,}1 . 0{,}3.$$

Durch einfaches ausmultiplizieren der rechten Seite dieser Gleichung erhält man für das gesuchte Volumen $x$ der Quadersteine, welche zur Herstellung des Schachtes erforderlich sind

$$= 9{,}6 \text{ cbm.}$$

---

**Aufgabe 22.** Die Fassade eines Gebäudes, welches $l = 15$ m lang und $h = 12{,}5$ m hoch ist, soll zur Abführung des Regenwassers mit einer **Dachrinne** und einem **Wasserabfallrohr** ohne Knie versehen werden. Wie viel qm Blech sind hierzu erforderlich, wenn die Dachrinne halbcylindrisch ist und mit dem Wasserabfallrohr gleichen Durchmesser, nämlich $D = 15$ cm hat? Die zur Herstellung der Rohre erforderlichen Falze etc. sollen unberücksichtigt bleiben.

**Formel:**

$$M = 2 R\pi . H \text{ (s. Erkl. 47).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Anzahl $x$ der qm Blech, welche zur Herstellung der Wasserabflussröhren erforderlich sind, beachte man, dass das Blech der Dachrinnen **den Mantel** eines Halbcylinders, dessen Durchmesser $D = 15$ cm oder $= 0{,}15$ m und dessen Höhe $H$ gleich der Länge $l$ des Gebäudes, nämlich $= 15$ m ist, und dass das Blech des Wasserabfallrohres den Mantel eines geraden Cylinders bildet, dessen Durchmesser $D$ ebenfalls $= 15$ cm oder $= 0{,}15$ m und dessen Höhe $H$ gleich der Höhe $h$ des Gebäudes, nämlich $= 12{,}5$ m ist.

Mit Hülfe der Formel:

$$M = 2 R\pi . H = D . \pi . H \text{ (s. Erkl. 47)}$$

erhält man hiernach die Bestimmungsgleichung:

**Erkl. 47.** Die Formel zur Berechnung **des Mantels** $M$ eines Cylinders ist, wenn $R$ den Radius des Grundkreises und $H$ die Höhe desselben bedeutet:

$$M = 2 R\pi . H$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Cylinder** handelt.

$$x = \frac{0{,}15 . 3{,}141 . 15}{2} + 0{,}15 . 3{,}141 . 12{,}5$$

oder:

$$x = 0{,}15 . 3{,}141 \left(\frac{15}{2} + 12{,}5\right)$$

Woraus sich:

$x = 0{,}471 . 20 = 9{,}42$ ergibt.

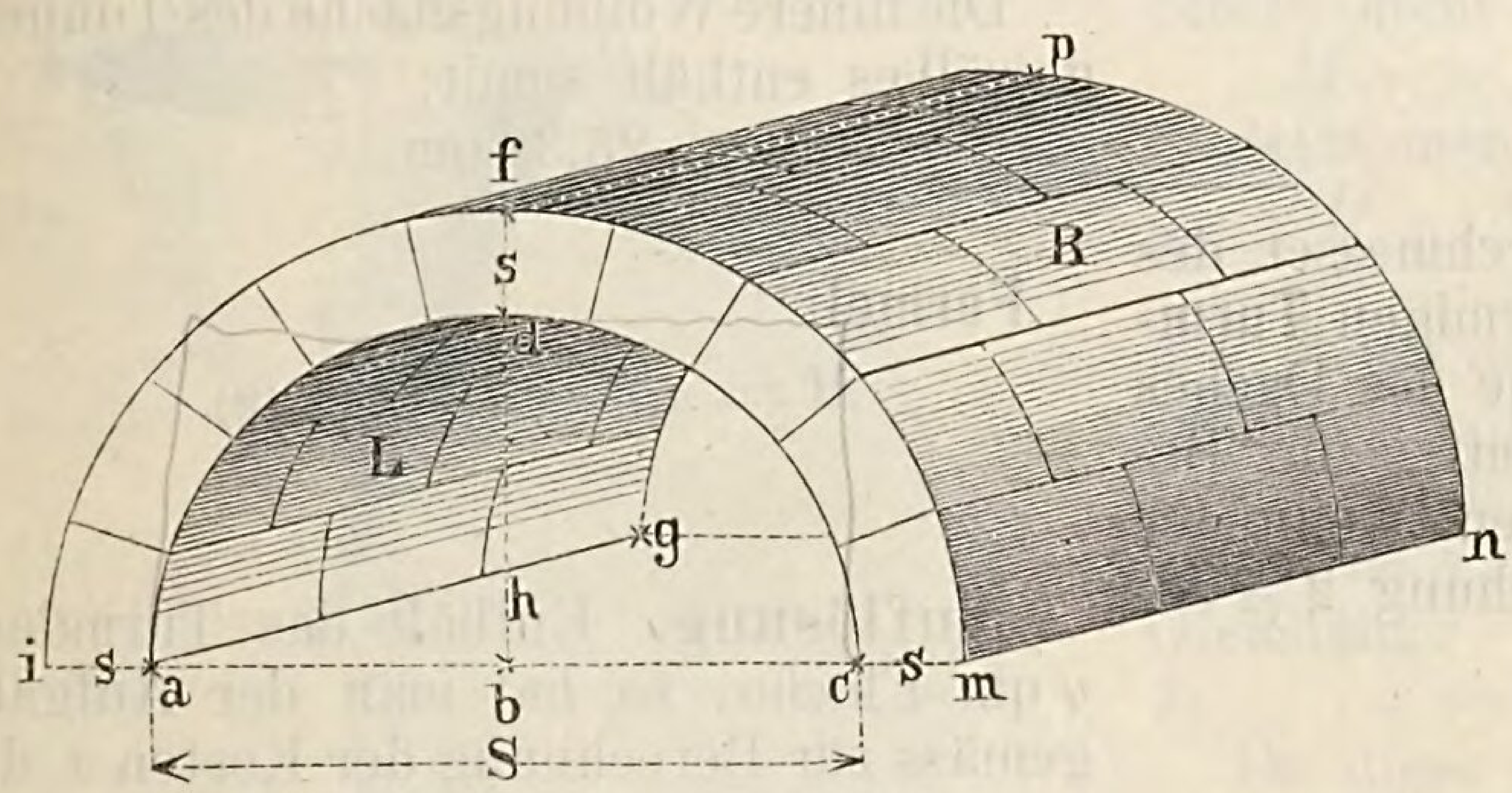
Zur Herstellung der in Rede stehenden Abflussröhren sind somit:

9,42 qm Blech erforderlich.

---

**Aufgabe 23.** Man soll den Kubikinhalt des Mauerwerks und die innere Wölbungsfläche eines **Tonnengewölbes** (s. Erkl. 48) berechnen, welches 6,2 m lang, 40 cm stark ist und im Lichten einen Durchmesser $d = 2{,}6$ m hat.

Figur 15.




**Erkl. 48.** Unter „**Gewölbe**" im allgemeinen versteht man die in Abschnitten eines sphärischen Körpers konstruierte Decke eines Gebäudes. Die Gewölbe werden aus keilförmigen Steinen zusammengefügt, so dass sich keiner derselben bewegen kann.

Die Gewölbe ruhen auf Mauern, sogenannten **Widerlagern** oder auf einzelnen Pfeilern. Die Linien, z. B. die Linie *ag* in Figur 15, längs welcher das Gewölbe auf den Widerlagern aufliegt, heisst **Kämpferlinie** und der wagrechte Abstand der Widerlager, z. B. *ac* in Fig. 15, heisst **Spannung** oder **Sprengung** oder **lichte Weite** des Gewölbes. Die senkrechte Höhe, *db* in Fig. 15 der Bogenlinie über die Anfänge derselben heisst **Gewölb-** oder **Pfeilhöhe.**

Die End- oder Frontansicht eines Gewölbes heisst **Stirnfläche,** sie wird begrenzt durch die innere Wölblinie *adc*, Unterbogen genannt und durch die äussere Wölblinie *ifm*, Oberbogen genannt.

Die innere von unten gesehene Fläche *L* heisst **Laibung,** die äussere von oben gesehene Fläche *R* heisst **Rücken.**

**Formeln:**

1) $V = \pi . H . (R^2 - r^2)$ (s. Erkl. 46)

2) $M = 2 R \pi . H$ (s. Erkl. 47).

**Auflösung.** Das Mauerwerk eines Tonnengewölbes, s. Fig. 15, hat nach der Erkl. 48 die Gestalt eines **halben** hohlen Kreiscylinders. Zur Berechnung des Volumens $V$ dient daher vorsteh. Formel 1):

$$V = \pi . H . (R^2 - r^2)$$

(s. Erkl. 46)

bezw. die Formel:

$$V = \frac{\pi . H . (R^2 - r^2)}{2}$$

da man nur das Volumen des **halben** Hohlcylinders zu berechnen hat.

Setzt man in dieser Formel: $V = x$, $H = 6{,}2$ m, nämlich gleich der Länge $fp$ des Gewölbes, $r = \frac{2{,}6}{2} = 1{,}3$ m, nämlich gleich der halben Spannung, gleich der halben lichten Weite $ac$ des Gewölbes und $R = 1{,}3 + 0{,}40 = 1{,}70$, nämlich $= bd + df (= ba + ai) = r +$ der in Meter ausgedrückten Stärke des Gewölbes, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$x = \frac{3{,}141 . 6{,}2 . (1{,}7^2 - 1{,}3^2)}{2} \text{ oder:}$$

$$x = 3{,}141 . 3{,}1 . (1{,}7 + 1{,}3) . (1{,}7 - 1{,}3)$$

woraus sich:

$x = 9{,}737 . 3{,}0 . 0{,}4 = 9{,}737 . 1{,}2 = 11{,}684$ ergibt.

Das Tonnengewölbe enthält somit:

11,684 cbm Mauerwerk.

---

Die **Dicke** oder **Stärke** eines Gewölbes wird gewöhnlich im Schlussstein, welches der höchstgelegene mittlere Gewölbstein ist, gemessen, dieselbe ist in Figur 15 $= fd$.

Die die Stirnfläche eines Gewölbes begrenzenden Bogen können Halbkreise, ähnliche Kreisbogen, ähnliche elliptische Bogen, ähnliche Spitzbogen etc. etc. sein; je nach der Gestalt dieser Linien richtet sich die Gestalt des Gewölbes und erhalten die Gewölbe dementsprechende besondere Namen.

So nennt man z. B. ein Gewölbe, dessen Wölbungslinie ein Halbkreis ist, ein **Tonnengewölbe**, dann nennt man ein Gewölbe, dessen Wölbungslinie kein ganzer Halbkreis, sondern ein flacherer Kreisbogen ist, ein **Kappengewölbe** u. s. f.

Zur Berechnung der inneren Wölbungsfläche des Tonnengewölbes, der Leibung (s. Erkl. 48), dient, da diese Fläche gleich dem **halben** Mantel eines Kreiscylinders ist, vorstehende Formel 2):

$$M = 2R\pi . H \text{ (s. Erkl. 47)}$$

bezw. die Formel:

$$M = R\pi . H$$

da man nur die **halbe** Mantelfläche des gedachten Cylinders zu berechnen hat. Setzt man in diese Formel: $M = y$, $H = 6{,}2$ m, nämlich gleich der Länge des Gewölbes, $R = \frac{2{,}6}{2} = 1{,}3$ m, nämlich gleich der halben lichten Weite des Gewölbes, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$y = 1{,}3 . 3{,}141 . 6{,}2$$

woraus sich

$$y = 25{,}31646 \text{ ergibt.}$$

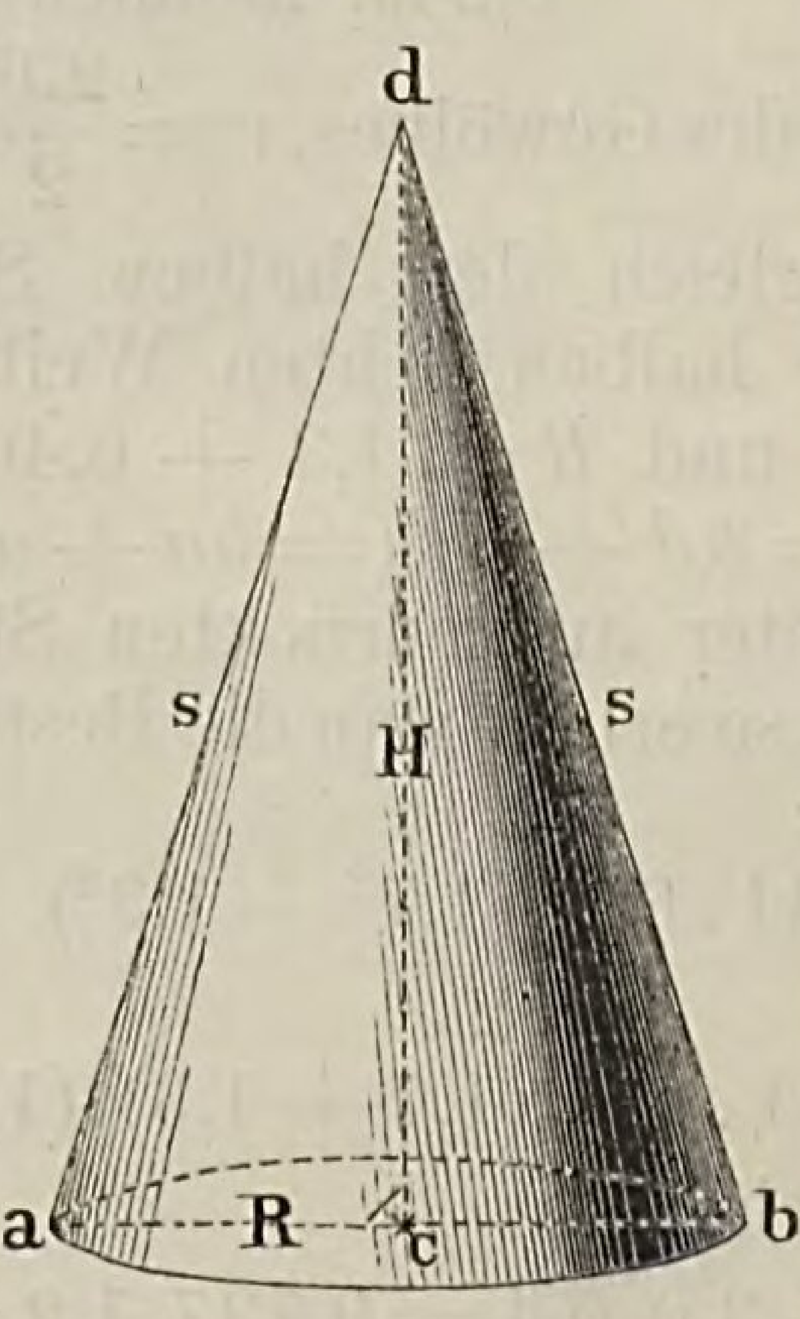
Die innere Wölbungsfläche des Tonnengewölbes enthält somit:

25,32 qm.

---

**Aufgabe 24.** Der Durchmesser des Grundkreises eines kegelförmigen **Turmdaches** misst 12 m, die Höhe des Daches = 10 m; wie teuer kommt seine Bedachung mit Blech zu stehen, wenn der Quadratmeter dieser Bedachung $2\frac{1}{2}$ *M.* kosten soll?

Figur 16.




**Erkl. 49.** Die Formel zur Berechnung des Mantels $M$ eines Kegels ist, wenn $R$ den Radius des Grundkreises und $s$ die Seitenlinie des Kegels bedeutet:

$$M = \pi . R . s$$

**Formel:**

$$M = \pi R . s \text{ (s. Erkl. 49).}$$

**Auflösung.** Enthält das Turmdach $y$ qm Fläche, so hat man der Aufgabe gemäss zur Berechnung der Kosten $x$ der Dachbedeckung die Gleichung:

$$1) \ldots x = 2\frac{1}{2} \cdot y$$

Da nun das Turmdach den Mantel eines geraden Kegels vorstellt, siehe Figur 16, so dient zur Berechnung des Inhalts $y$ der Turmdachfläche vorstehende Formel:

$$M = \pi R . s \text{ (s. Erkl. 49).}$$

Setzt man in dieser Formel: $M = y$, $R = \frac{12}{2} = 6$m, nämlich gleich dem halben Durchmesser des Grundkreises des kegelförmigen Daches und $s = \sqrt{H^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}$ (s. das rechtwinklige Dreieck $acd$ in Figur 16), so erhält man die weitere Gleichung:

$$2) \ldots y = 3{,}141 . 6 . \sqrt{10^2 - 6^2}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt:

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Kegel** handelt.

$$x = \frac{5}{2} \cdot 3{,}141 \,.\, 6 \,.\, \sqrt{100 - 36}$$

und hieraus erhält man:

$$x = 5 \,.\, 3{,}141 \,.\, 3\sqrt{64} = 15 \,.\, 3{,}141 \,.\, 8$$

oder:

$$x = 376{,}92$$

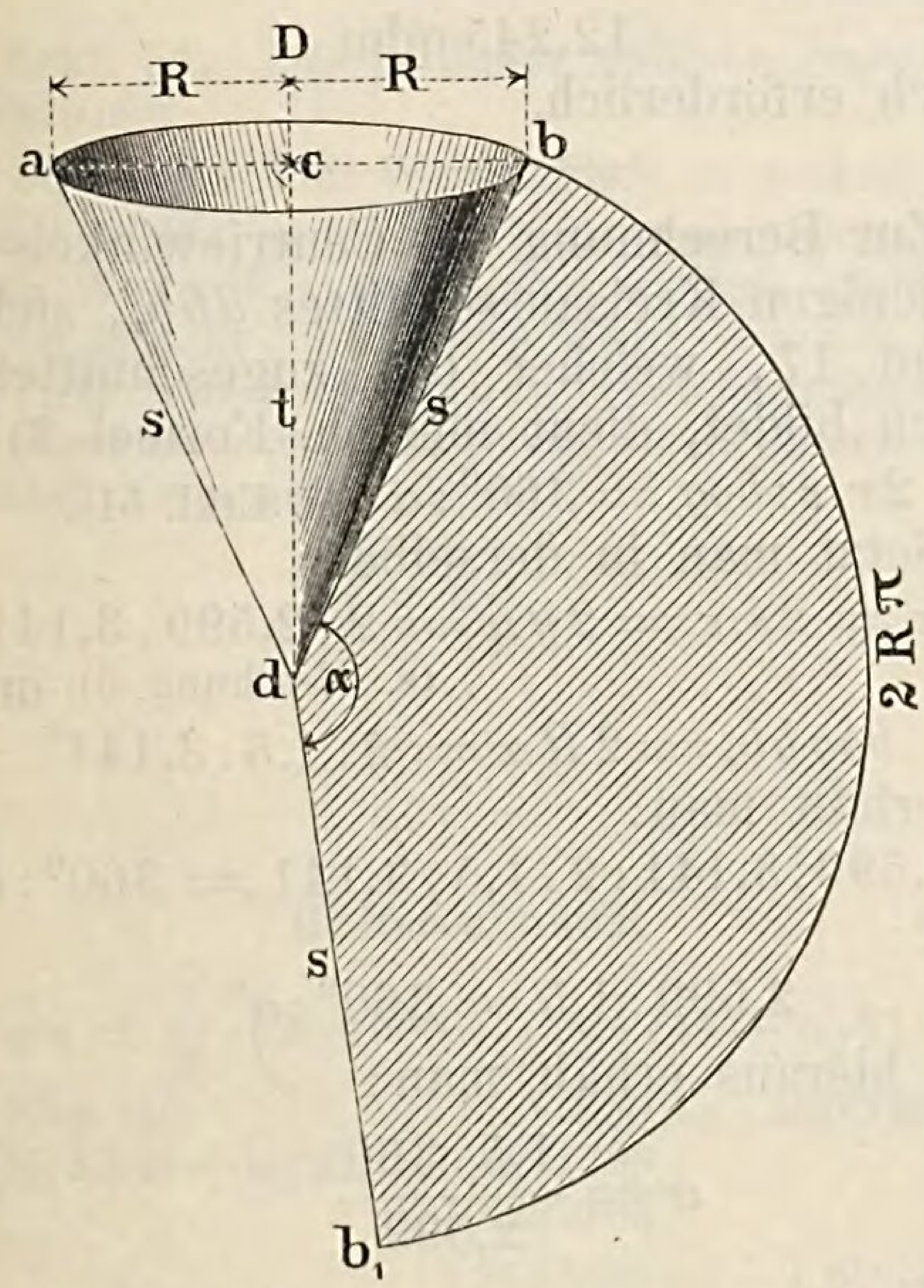
Die Bedachung kostet hiernach:

376 *M.* 92 pf.

---

**Aufgabe 25.** Ein kegelförmiger, oben offener **Trichter** von Blech soll angefertigt werden; wie viel Blech ist hierzu erforderlich und welches ist der Centriewinkel desjenigen Kreisausschnittes, den das zugeschnittene Blech bildet, wenn der Trichter 5 Liter fassen und einen Durchmesser von 30 cm haben soll?

Figur 17.




**Erkl. 50.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines geraden Kreiskegels ist, wenn $R$ den Radius des Grundkreises und $H$ die Höhe bedeutet:

$$V = \frac{R^2 \,.\, \pi \,.\, H}{3}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Kegel** handelt.

**Erkl. 51.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Der Umfang $2R\pi$ eines Kreises verhält sich zu einem Bogenstück „$bog$“ desselben wie 360° zu dem dem Bogenstück zugehörigen Centriewinkel $\alpha$“

in Zeichen: $2R\pi : bog = 360^0 : \alpha^0$.

**Formeln:**

1) $M = \pi \,.\, R \,.\, s$ (s. Erkl. 49)

2) $V = \frac{R^2 \pi \,.\, H}{3}$ (s. Erkl. 50)

3) $2r\pi : bog = 360^0 : \alpha^0$ (s. Erkl. 51).

**Auflösung.** Das den Trichter, siehe Fig. 17, bildende Blech stellt den Mantel eines geraden Kegels dar; zur Berechnung des Inhalts $x$ des erforderlichen Blechs dient somit die vorst. Formel 1):

$$M = \pi \,.\, R \,.\, s \text{ (s. Erkl. 49).}$$

Setzt man in diese Formel: $M = x$, $R = \frac{D}{2} = \frac{30}{2} = 15$ cm $= 1{,}5$ dm, nämlich gleich dem in dm (s. Erkl. 52) ausgedrückten halben Durchmesser des Trichters, und die noch unbekannte Seitenlinie $s = y$, so hat man zunächst die Gleichung:

1) . . . $x = 3{,}141 \,.\, 1{,}5 \,.\, y$

Da diese Gleichung die 2 Unbekannten $x$ und $y$ enthält, so muss noch eine weitere Bestimmungsgleichung aufgestellt werden, wozu folgende Betrachtung genügt:

Der fragliche Trichter soll ein ganz bestimmtes Volumen, nämlich 5 Liter oder gleich 5 cdm enthalten; nach vorstehender Formel 2):

$$V = \frac{R^2 \,.\, \pi \,.\, H}{3} \text{ (s. Erkl. 50)}$$

hat man somit zwischen dem im Körpermass ausgedrückten Volumen $V = 5$ cdm, dem Radius $R = \frac{30}{2}$ cm $= 1{,}5$ dm und der Höhe $H$, bezw. der Tiefe $t$ des Trichters, für welche man mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks $acd$, siehe Figur 17, $\sqrt{s^2 - R^2}$ oder $= \sqrt{y^2 - 1{,}5^2}$ setzen kann, die weitere Gleichung:

**Erkl. 52.** Da der Kubikinhalt des Trichters in Liter, bezw. in cdm gegeben ist (1 Liter = 1 cdm) und derselbe mit in Rechnung gezogen werden muss, so müssen alle lineare Ausdehnungen in dm ausgedrückt werden.

**Hülfsrechnung 1.**

$$\sqrt{\left(\frac{15}{1{,}5^2 \,.\, 3{,}141}\right)^2 + 1{,}5^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1{,}5 \,.\, 10}{1{,}5^2 \,.\, 3{,}141}\right)^2 + 1{,}5^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{10}{1{,}5 \,.\, 3{,}141}\right)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}122^2 + 2{,}25}$$
$$= \sqrt{4{,}502884 + 2{,}25} = \sqrt{6{,}752884} = \underline{2{,}599}$$

**Hülfsrechnung 2.**

$$log\frac{1{,}5 \,.\, 360}{2{,}599} = log\,1{,}5 + log\,360 - log\,2{,}599$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rr} log\,1{,}5 = & 0{,}1760913 \\ log\,360 = & 2{,}5563025 \\ \hline & 2{,}7323938 \\ -\,log\,2{,}599 = & -\,0{,}4148063 \\ \hline & 2{,}3175875 \\ & 5828 \\ \hline & 47 \\ & 41{,}8 \end{array}$$

mithin:

$$\frac{1{,}5 \,.\, 360}{2{,}599} = 207{,}772$$

**Hülfsrechnung 3.**

Da

$$0{,}772^0 = \frac{772 \,.\, 60'}{1000} = 46{,}32'$$

und

$$0{,}32' = \frac{32 \,.\, 60''}{100} = 19{,}2'' \text{ ist,}$$

so erhält man:

$207{,}772^0 = 207^0\ 46{,}32'$ oder

$207{,}772^0 = 207^0\ 46'\ 19{,}2''$

$$2) \ldots 5 = \frac{1{,}5^2 \,.\, 3{,}141 \,.\, \sqrt{y^2 - 1{,}5^2}}{3}$$

Aus der Gleichung 2) erhält man:

$$\sqrt{y^2 - 1{,}5^2} = \frac{3 \,.\, 5}{1{,}5^2 \,.\, 3{,}141}$$
$$y^2 - 1{,}5^2 = \left(\frac{15}{1{,}5^2 \,.\, 3{,}141}\right)^2$$
$$y = \sqrt{\left(\frac{15}{1{,}5^2 \,.\, 3{,}141}\right)^2 + 1{,}5^2}$$

oder:

3) . . . $y = 2{,}599$ dm (s. nebnst. Hülfsr. 1).

Setzt man diesen Wert in Gleich. 1) ein, so erhält man:

$$x = 3{,}141 \,.\, 1{,}5 \,.\, 2{,}599$$

oder:

$$x = 12{,}245 \text{ qdm}$$

Zur Herstellung des Trichters sind hiernach:

12,245 qdm

Blech erforderlich.

---

Zur Berechnung des Centriewinkels $\alpha$ desjenigen Kreisausschnittes $dbb_,$, siehe Figur 17, welcher das zugeschnittene Blech bildet, dient umsteh. Formel 3):

$$2r\pi : bog = 360^0 : \alpha^0 \text{ (s. Erkl. 51).}$$

Setzt man in derselben:

$$2r\pi = 2s\pi = 2y\pi = 2 \,.\, 2{,}599 \,.\, 3{,}141$$

(s. Gleichung 3) und

$$bog\,bb_, = 2R\pi = 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 3{,}141$$

so erhält man:

$$2 \,.\, 2{,}599 \,.\, 3{,}141 : 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 3{,}141 = 360^0 : \alpha^0$$

oder:

$$2{,}599 : 1{,}5 = 360^0 : \alpha^0$$

und hieraus erhält man:

$$\alpha = \frac{1{,}5 \,.\, 360}{2{,}599}$$

oder:

$\alpha = 207{,}772^0$ (s. nebenst. Hülfsrechnung 2).)

Der gesuchte Winkel $\alpha$ ist somit:

$= 207^0\ 46'\ 19{,}2''$ (s. Hülfsrechnung 3).)

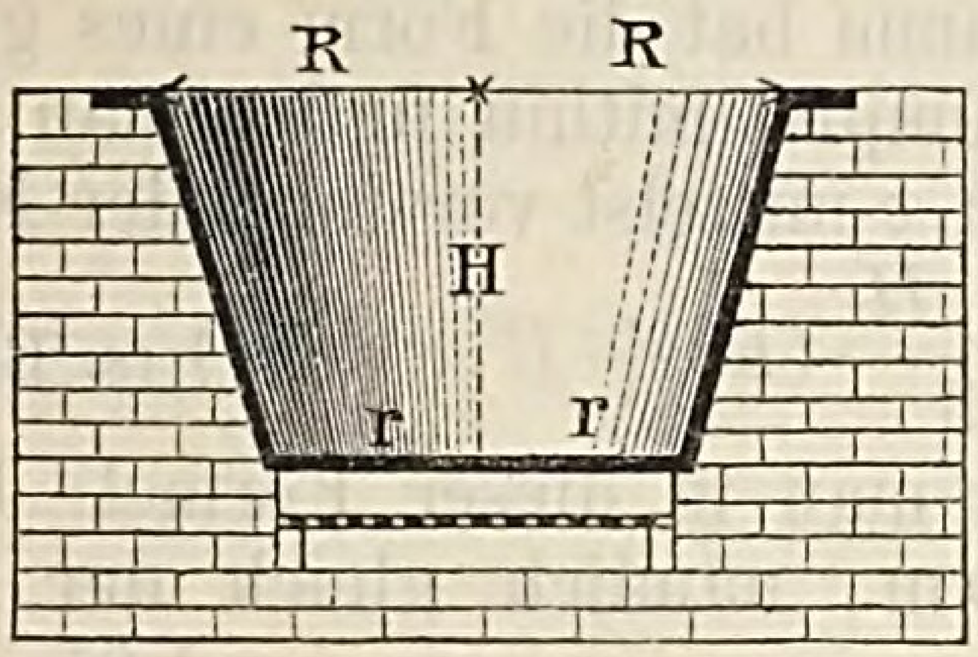
---

**Aufgabe 26.** Es soll ein **Waschkessel**, der die Form eines abgestumpften Kegels hat, und bei vollständiger Füllung 500 Liter fasst, hergestellt werden. Welches sind die Dimensionen dieses Kessels, wenn die obere Weite $W$, zur untern Weite $w$, zur Tiefe $t$ des Kessels sich wie 4 : 2 : 3 verhalten soll?

**Formel:**

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R \,.\, r + r^2) \text{ (s. Erkl. 53).}$$

Figur 18.




**Erkl. 53.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines Kegelstumpfes ist, wenn $H$ dessen Höhe, $R$ den Radius der unteren und $r$ den Radius der oberen Grundfläche bedeutet:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Kegelstumpf** handelt.

**Erkl. 54.** Das in dieser Aufgabe gegebene Verhältnis:

ob. Weite : unt. Weite : Tiefe = 4 : 2 : 3

deutet nichts anderes an, als dass, wenn die obere Weite $W$ aus 4 irgend welchen gleichen Teilen besteht, die untere Weite $w$ aus 2 und die Tiefe $t$ aus 3 derselben Teilen bestehen soll.

Bezeichnet man hiernach einen dieser gedachten Teile mit $x$, so ist:

$$W = 4x$$
$$w = 2x$$
$$t = 3x$$

**Hülfsrechnung.**

$$\log x = \frac{1}{3}\cdot\left(\log 1000 - (\log 3{,}141 + \log 21)\right)$$

Nun ist: $\log 1000 = 3{,}0000000$

$-(\log 3{,}141 + \log 21) = 0{,}4971499$
$+1{,}3222193$
$1{,}8193692 = -1{,}8193692$

$1{,}1806308$

$\cdot\frac{1}{3}$

$\log x = 0{,}3935436$
$5401$

mithin: $\text{numlog}\, x = 2{,}4748$

**Auflösung.** Die gesuchten Dimensionen des anzufertigenden Waschkessels, s. Figur 18, sind abhängig von dem Volumen, welches der Kessel enthalten soll; da ferner der Kessel die Form eines abgestumpften Kegels hat, so dient zur Aufstellung einer Bestimmungsgleichung vorstehende Formel:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R\,.\,r + r^2) \quad \text{(s. Erkl. 53).}$$

Setzt man in dieser Formel:

$V = 500$ Liter, oder in Körpermaass ausgedrückt $= 500$ cdm

und drückt $H$, $R$ und $r$ nach dem in der Aufgabe gegebenen Verhältnis in ein und dieselbe Unbekannte $x$, wie folgt aus:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\;\ldots\; H = t = 3x \\ 2)\;\ldots\; R = \frac{W}{2} = \frac{4x}{2} = 2x \\ 3)\;\ldots\; r = \frac{w}{2} = \frac{2x}{2} = x \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 54)}$$

so erhält man die Gleichung:

$$4)\;.\; 500 = \frac{3{,}141\,.\,3x}{2}\left[(2x)^2 + 2x\,.\,x + x^2\right]$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$500 = \frac{3{,}141\,.\,3x}{2}(4x^2 + 2x^2 + x^2)$$
$$1000 = 3{,}141\,.\,3x\,.\,7x^2$$
$$\frac{1000}{3{,}141} = 21x^3$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{1000}{3{,}141\,.\,21}}$$

oder:

$x = 2{,}4748$ (s. nebenst. Hülfsrechnung).

Setzt man diesen Wert für $x$ in die Gleichungen 1) bis 3) ein, so erhält man für die gesuchten Dimensionen:

$t = 3\,.\,2{,}4748 = 7{,}4244$ dm oder abgerundet $=$ **74 cm**

$W = 4\,.\,2{,}4748 = 9{,}8992$ dm oder abgerundet $=$ **99 cm**

$w = 2\,.\,2{,}4748 = 4{,}9496$ dm oder abgerundet $=$ **49,5 cm**

---

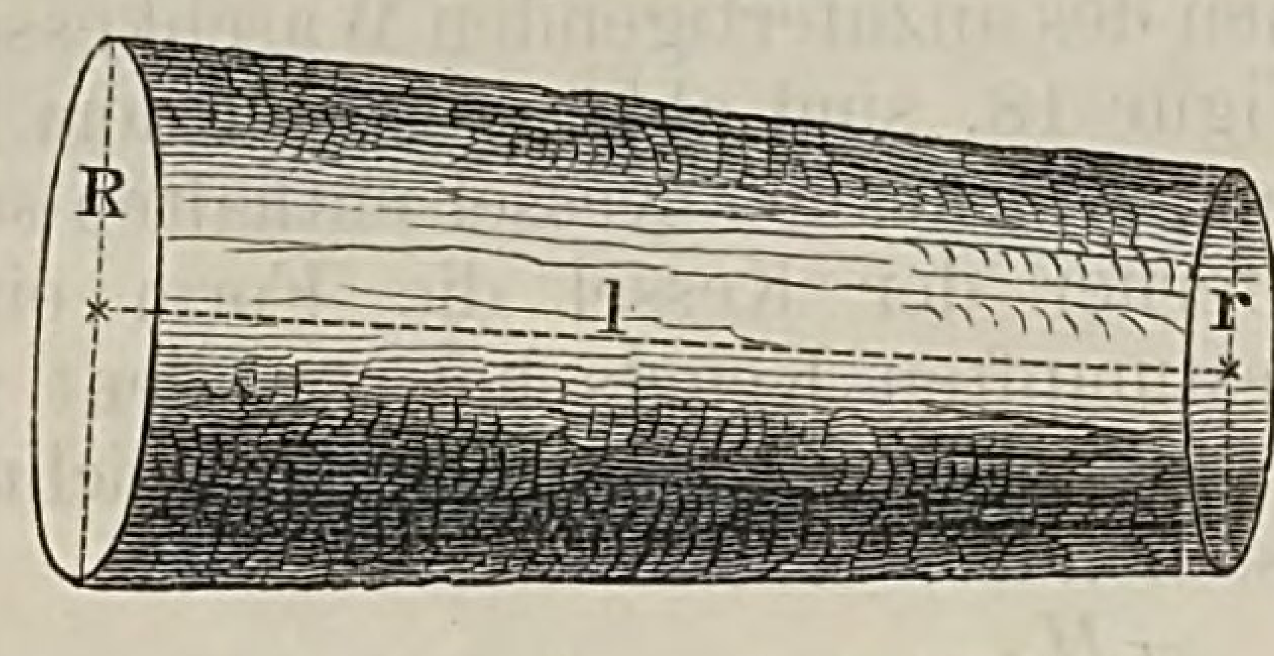
**Aufgabe 27.** Ein **Baumstamm** von der Gestalt eines geraden Kegelstumpfes hat an dem dickeren Ende einen Umfang von 1,95 m, an dem dünneren Ende einen Umfang von 1,64 m; wie viel cbm Holz enthält derselbe, wenn seine Länge $=$ 10 m misst?

**Formel:**

$$V = \frac{\pi\,.\,H}{3}\cdot(R^2 + R\,.\,r + r^2)$$

(s. Erkl. 53).

Figur 19.




**Erkl. 55.** Die Formel zur Berechnung des Umfangs $U$ eines Kreises, dessen Radius mit $r$ bezeichnet wird, ist:

$$U = 2 r \pi$$

(s. das Kapitel: **Die Planimetrie**) und hieraus erhält man:

$$r = \frac{U}{2 . \pi}$$

**Auflösung.** Der zu berechnende Baumstamm hat die Form eines geraden Kegelstumpfs, mithin findet man dessen Volumen $x$ mittelst vorstehender Formel:

$$V = \frac{\pi . H}{3} \cdot (R^2 + R . r + r^2) \text{ (s. Erkl. 53).}$$

Setzt man in dieser Formel: $V = x$, $H = 10$ m, nämlich gleich der Länge des Baumstamms, $R = \frac{1,95}{2 . 3,141}$ und

$$r = \frac{1,64}{2 . 3,141} \text{ (s. Erkl. 55)}$$

so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$x = \frac{3,141 . 10}{3} \cdot \left[\left(\frac{1,95}{2 . 3,141}\right)^2 + \frac{1,95}{2 . 3,141} \cdot \frac{1,64}{2 . 3,141} + \left(\frac{1,64}{2 . 3,141}\right)^2\right]$$

Hieraus ergibt sich mittelst Reduktion:

$$x = \frac{3,141 . 10}{3} \cdot \left(\frac{1,95^2}{4 . 3,141^2} + \frac{1,95 . 1,64}{4 . 3,141^2} + \frac{1,64^2}{4 . 3,141^2}\right)$$

oder:

$$x = \frac{3,141 . 10}{3 . 4 . 3,141^2} \cdot (1,95^2 + 1,95 . 1,64 + 1,64^2)$$

$$x = \frac{10}{12 . 3,141} \cdot (3,8025 + 3,1980 + 2,6896)$$

$$x = \frac{5 . 9,6901}{6 . 3,141} = \frac{48,4505}{18,846} = 2,570$$

Der Baumstamm enthält hiernach:
2,570 cbm Holz.

---

**Aufgabe 28.** Ein **Erdhügel** in der Form eines geraden Kegelstumpfs hat am Fusse einen Umfang $U = 53,397$ m, am Kopfe einen Durchmesser $d = 14$ m und seine Seitenlinie $s$ misst 6,56 m; wie viel qm Bodenfläche repräsentiert dieser Erdhügel?

**Erkl. 56.** Die Formel zur Berechnung des Mantels $M$ eines geraden Kegelstumpfs ist, wenn dessen Seitenlinie mit $s$, der Radius der Grundfläche mit $R$, der Radius der Deckfläche mit $r$ bezeichnet wird:

$$M = \pi . s . (R + r)$$

siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Kegelstumpf** handelt.

**Erkl. 57.** Die Formel zur Berechnung des Inhalts $J$ eines Kreises, dessen Radius mit $r$ bezeichnet wird, ist:

$$J = r^2 \pi$$

(siehe das Kapitel: Die Planimetrie).

**Formel:**

$$M = \pi . s . (R + r) \text{ (s. Erkl. 56).}$$

**Auflösung.** Die Bodenfläche $x$, welche der Erdhügel repräsentiert, besteht aus dem Mantel $M$ des Kegelstumpfs, welchen der Hügel bildet und aus der oberen Begrenzungsfläche $g$ desselben. Man hat somit die Gleichung:

1) . . . $x = M + g$

Für den Mantel $M$ findet man nach vorstehender Formel:

$$M = \pi . s . (R + r) \text{ (s. Erkl. 56)}$$

wenn man in derselben für $s = 6,56$ m, für $R = \frac{53,397}{2 . 3,141}$ m (s. Erkl. 55) und für

$$r = \frac{14}{2} = 7 \text{ m setzt:}$$

$$2) \; . \; . \; M = 3{,}141 \, . \, 6{,}56 \, . \left( \frac{53{,}397}{2 \, . \, 3{,}141} + 7 \right)$$

Ferner findet man nach der Formel:

$$J = r^2 \pi \text{ (s. Erkl. 57)}$$

wenn man $J = g$ und $r = \frac{14}{2} = 7$ m setzt.

$$3) \; . \; . \; . \; g = 7^2 \, . \, 3{,}141.$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man:

$$x = 3{,}141 \, . \, 6{,}56 \, . \left( \frac{53{,}397}{2 \, . \, 3{,}141} + 7 \right) + 7^2 \, . \, 3{,}141$$

oder:

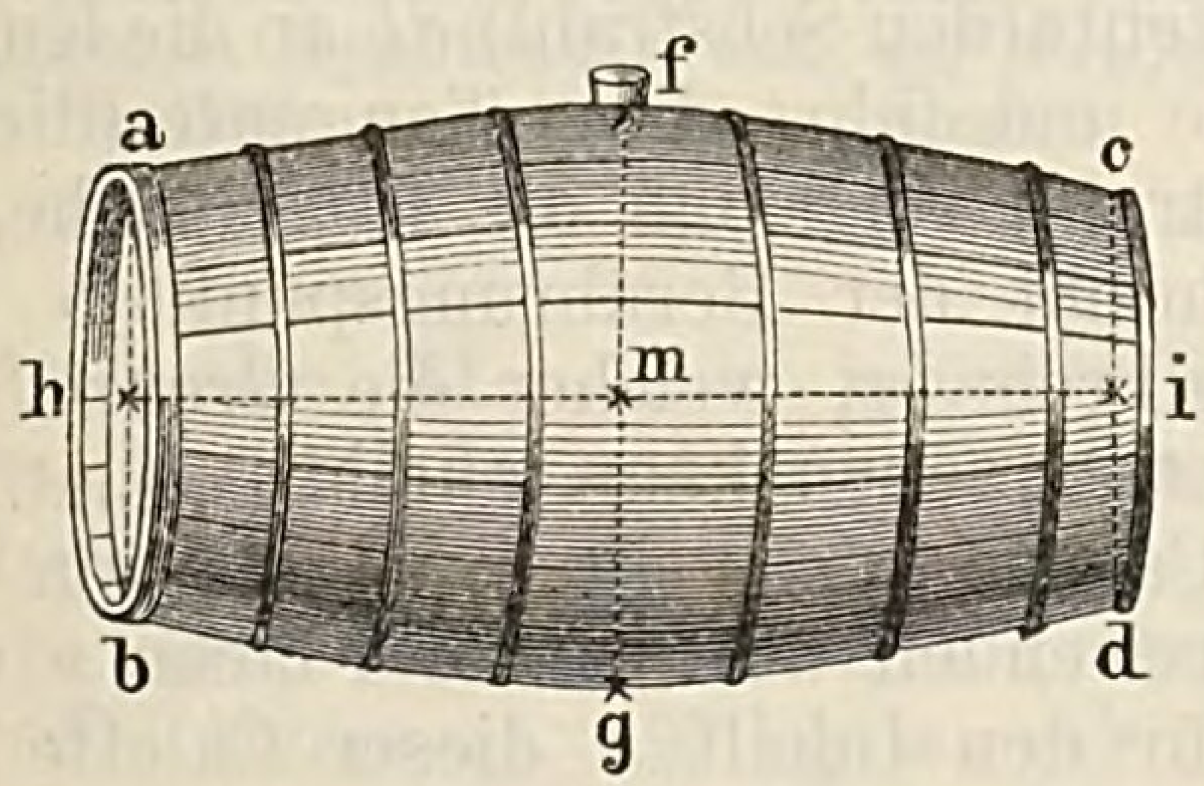
$$x = 3{,}141 \, . \, [6{,}56 \, (8{,}5 + 7) + 49]$$
$$x = 3{,}141 \, . \, (6{,}56 \, . \, 15{,}5 + 49)$$
$$x = 3{,}141 \, . \, (101{,}68 + 49) = 3{,}141 \, . \, 150{,}68$$
$$x = 473{,}28588$$

Der Erdhügel enthält hiernach $= 473{,}286$ qm Bodenfläche.

---

**Aufgabe 29.** Wie viel Hektoliter enthält **ein Fass**, welches als ein beiderseits abgekürzter Doppelkegel betrachtet werden kann, eine Länge von 2 m, eine Bodenweite (Kopfweite) von 0,95 m und eine Bauchweite (Spundtiefe) von 1,15 m hat? (s. Erkl. 58 und 59).

Figur 20.




**Erkl. 58.** Bei einem Fass, siehe Figur 20, nennt man den inneren Durchmesser *ab* oder *cd* am Boden (also den kleinsten Durchmesser) die **Bodenweite**; ferner nennt man den inneren Durchmesser am Spund *f*, nämlich *fg* (also den grössten Durchmesser) die Spundtiefe oder Bauchweite. Unter Länge des Fasses versteht man den Abstand *hi* der beiden Böden.

**Erkl. 59.** Sind an einem Fasse die Längen der Bodenweite und Spundtiefe nur um sehr wenig verschieden, wie in Fig. 20, so kann man ein solches Fass, ohne gerade einen grossen Fehler zu begehen, als einen beiderseits abgekürzten Doppelkegel betrachten.

**Formel:**

$$V = \frac{\pi \, . \, H}{3} \cdot (R^2 + R \, . \, r + r^2)$$

(s. Erkl. 53).

**Auflösung.** Der hohle Raum des in Rede stehenden Fasses, Figur 20, besteht aus den zwei kongruenten geraden Kegelstumpfen *abgf* und *cdgf*; zur Berechnung des Volumens $x$ des Fasses dient somit vorstehende Formel:

$$V = \frac{\pi \, . \, H}{3} \cdot (R^2 + R \, . \, r + r^2) \text{ (s. Erkl. 53).}$$

Setzt man in dieser Formel: $V = \frac{x}{2}$, $H = 1$ m, nämlich $= hm =$ der halben Länge $hi$ des Fasses, $R = \frac{1{,}15}{2} = 0{,}575$ m, nämlich $= fm =$ der halben Bauchweite (Spundtiefe) $fg$ und schliesslich $r = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ m, nämlich $= ah =$ der halben Bodenweite $ab$ des Fasses, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x}{2} = \frac{3{,}141 \, . \, 1}{3} \cdot (0{,}575^2 + 0{,}575 \, . \, 0{,}475 + 0{,}475^2)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Reihe nach:

$x = 2 \cdot \frac{3{,}141}{3} \cdot (0{,}3306 + 0{,}2731 + 0{,}2256)$

$x = 2 \cdot 1{,}047 \cdot 0{,}8293$

$x = 2{,}094 \cdot 0{,}8293$ oder

$x = 1{,}7366$ cbm

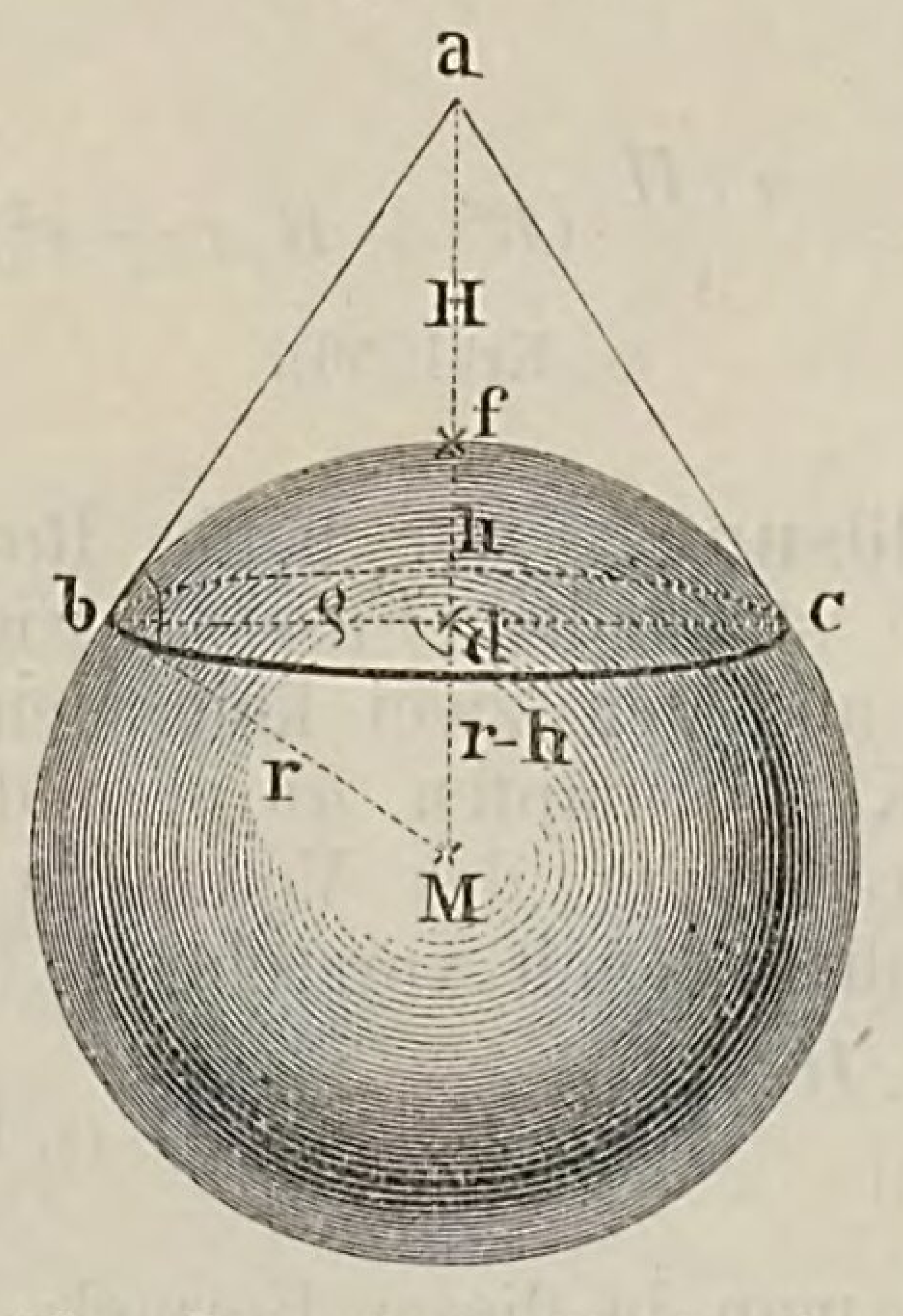
Das betreffende Fass enthält somit und nach der Erkl. 9, S. 4

$= 1{,}7366 \cdot 10 = \underline{17{,}366 \text{ Hektoliter.}}$

---

**Aufgabe 30.** Den wievielsten **Teil der Erdoberfläche** konnten *Biot & Gay-Lussac* übersehen, als sie sich bei ihrer Luftreise (s. Erkl. 60) $H = 1$ geographische Meile über den Meeresspiegel erhoben hatten, wenn der Radius $r$ der als Kugel betrachteten Erde $= 859{,}4367$ geogr. Meilen angenommen und die irdische Strahlenbrechung (s. Erkl. 61) nicht mit in Rechnung gezogen wird?

Figur 21.




**Formeln:**

1) $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62).

2) J. d. C. $= 2\pi r h$ (s. Erkl. 63).

**Auflösung.** Da die von den Luftreisenden übersehene Fläche in die ganze Erdoberfläche ausgedrückt werden soll, so besteht der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung in einer Proportion, in welcher das Verhältnis der übersehenen Fläche $x$ zur ganzen Erdoberfläche $O$ ausgedrückt ist.

Nimmt man nun an, die Luftreisenden befinden sich in dem Punkte $a$, siehe Figur 21, also in einer Höhe $af = H$ über dem Meeresspiegel, durch welchen die Kugelgestalt der Erde in Figur 21 dargestellt wird, und zieht von $a$ die Tangente (den Sehstrahl) $ab$ an die Kugelfläche und führt diese Tangente (diesen Sehstrahl) rings um die Kugelfläche, so beschreibt der Berührungspunkt $b$ den Kugelkreis $bc$, welcher die Grenze, **soweit man sehen kann, angibt** (s. Erkl. 61). Die Calotte $bfc$ stellt somit die von den Luftreisenden übersehene Fläche $x$ dar.

Für den Inhalt $x$ dieser Calotte hat man nach vorsteh. Formel 2):

J. d. C. $= 2\pi r h$ (s. Erkl. 63)

wenn man in derselben $J = x$ und für die unbekannte Höhe $h$ der Calotte:

$$h = \frac{Hr}{H + r} \text{ (s. Erkl. 64)}$$

setzt:

$$x = 2\pi r \cdot \frac{Hr}{H + r} \text{ oder}$$

$$1) \; \ldots \; x = \frac{2\pi r^2 H}{H + r}$$

Da ferner für die ganze Erdoberfläche $O$ nach vorsteh. Formel 2):

1) . . . $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62)

**Erkl. 60.** *Biot*, ein berühmter französischer Mathematiker und Physiker und *Gay-Lussac*, ein berühmter französischer Chemiker, stiegen im Jahre 1804 in einem Luftballon bis zu einer Höhe von über 21000 paris. Fuss ($= 21000 \cdot 0{,}3248394$ oder $= 6821{,}62$ m $= 0{,}919$ geograph. Meilen), um magnetisch-elektrische und thermometrische Beobachtungen zu machen.

**Erkl. 61.** In Folge der durch die, die Erde umgebenden Atmosphäre hervorgerufenen, sogenannten irdischen **Strahlenbrechung** sieht man weiter, als den eigentlich nur zu überblickenden Bogen $bfc$, s. Fig. 21 und zwar sieht man um den 0,08ten Teil der Länge dieses Bogens weiter.

Aufgaben, in welchen die irdische Strahlenbrechung berücksichtigt ist, sind in einem spätern Abschnitt dieses Buches enthalten.

**Erkl. 62.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ einer Kugel, deren Radius mit $r$ bezeichnet wird, ist:

$$O = 4\pi r^2$$
oder: $$O = \pi d^2$$
Man siehe den Abschnitt im 1. Buche der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Erkl. 63.** Die Formel zur Berechnung des Inhalts $J$ einer Calotte (Kugelhaube) ist, wenn der Radius der zugehörigen Kugel mit $r$ und die Höhe der Calotte mit $h$ bezeichnet wird:
$$\text{J. d. C.} = 2\pi r h$$
Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Erkl. 64.** Um die Höhe $h$ der Calotte $bfc$, s. Figur 21, in den Radius $r$ der Kugel und die Höhe $fa = H$ ausdrücken zu können, beachte man, dass das Dreieck $abM$ bei $b$ rechtwinklig ist (da $ab$ eine Tangente an die Kugel um $M$ ist), dass ferner die Hypotenuse $Ma$ desselben $= (H+r)$, die Kathete $Mb = r$ und die Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse $= Md = Mf - df = r - h$ ist, dass man somit nach der Erkl. 65 die Proportion:
$$Ma : Mb = Mb : Md.$$ bezw. die Proportion:
$$(r+H) : r = r : (r-h)$$ hat
woraus man:
$$r^2 + rH - rh - Hh = r^2$$
oder:
$$Hh + rh = rH$$
$$h(H+r) = rH$$
und schliesslich:
$$h = \frac{rH}{H+r}$$ erhält.

**Erkl. 65.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:
**„Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und der Projektion jener Kathete auf die Hypotenuse."**

gesetzt werden kann, so hat man nach vorausgegangenem die Bestimmungsgleichung:
$$x : O = \frac{2\pi r^2 H}{H+r} : 4\pi r^2$$
woraus sich:
$$x : O = \frac{H}{H+r} : 2$$
oder:
$$3) \ldots\ldots \quad x = \frac{H}{2(H+r)} \cdot O$$
als allgemeine Lösung der Aufgabe ergibt.

Setzt man für $H = 1$ } geogr.
" $r = 859{,}4367$ } Meilen,
nämlich die in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:
$$x = \frac{1}{2(1+859{,}4367)} \cdot O$$
oder: $$x = \frac{1}{1720{,}9734} \cdot O$$
Die übersehene Fläche ist somit, abgerundet, $= \frac{1}{1721}$ te Teil der ganzen Erdoberfläche.

Will man den Inhalt der übersehenen Fläche in geographische Meilen ausdrücken, so hat man nur in umstehender Gleichung 1) für $H$ und $r$ die gegebenen Zahlenwerte zu setzen und den erhaltenen Ausdruck auszurechnen.

---

**Aufgabe 31.** Der innere Durchmesser einer 7pfündigen **Granate** ist $= 10{,}2$ cm; wie viel kg Pulver fasst der innere Raum derselben, wenn 1 cdm des betreff. Pulvers $= 0{,}97$ kg wiegt?

**Erkl. 66.** Die **Granaten** sind sphärische Hohlgeschosse und haben im allgemeinen eine cylindrische Form mit verschiedenartig geformter Spitze. Die Granate besteht aus einem Eisenkerne (derselbe soll in der Aufgabe als eine vollständige Kugel betrachtet werden), welcher zur Aufnahme der Sprengladung dient und aus einem diesen Eisenkern umgebenden Bleimantel mit der Zündung.

Die Benennung einer Granate, z. B. **eine 7pfündige** Granate, richtet sich nach der entsprechenden Benennung des Geschützes (siehe Erkl. 44, S. 19).

**Erkl. 67.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ einer Kugel ist, wenn $r$ den Radius oder $d$ den Durchmesser bedeutet:

**Formel:**
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
oder: $$V = \frac{\pi d^3}{6}$$ (s. Erkl. 67).

**Auflösung.** Da, der Aufgabe gemäss, 1 cdm des Pulvers $= 0{,}97$ kg wiegt, so hat man zur Bestimmung der gesuchten $x$ kg, welche die Sprengladung der Granate enthält, wenn man das Volumen derselben, **in cdm ausgedrückt**, mit $y$ bezeichnet:
$$1) \ldots \quad x = 0{,}97 \cdot y$$
Zur Bestimmung des Volumens $y$ des inneren hohlen Raums der Granate, welcher mit Pulver gefüllt werden soll, beachte man, dass derselbe nach der Erkl. 66

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{oder } V = \frac{\pi d^3}{6}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Hülfsrechnung.**

$$log\, x = log\, 0{,}97 + log\, 3{,}141 + 3 \,.\, log\, 1{,}02 - log\, 6$$

| | | |
|---|---|---|
| Nun ist: | $log\, 0{,}97 =$ | $0{,}9867717 - 1$ |
| | $+ log\, 3{,}141 \ldots (\pi) =$ | $0{,}4971499$ |
| | $3 \,.\, log\, 1{,}02 = 3 \,.\, 0{,}0086002 =$ | $0{,}0258006$ |
| | | $1{,}5097222 - 1$ |
| | $log\, 6 =$ | $- 0{,}7781513$ |
| | $log\, x =$ | $0{,}7315709 - 1$ |
| mithin ist: | | $5727$ |
| | $numlog\, x =$ | $0{,}53898$ |

die Form einer Kugel hat. Nach vorstehender Formel:

$$V = \frac{\pi d^3}{6} \text{ (s. Erkl. 67)}$$

erhält man somit für das Volumen $V = y$, wenn man $d = 10{,}2 \text{ cm} = 1{,}02$ dm setzt:

$$2) \ldots y = \frac{3{,}141 \,.\, 1{,}02^3}{6}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich:

$$x = \frac{0{,}97 \,.\, 3{,}141 \,.\, 1{,}02^3}{6} \text{ kg}$$

Woraus man nach nebenstehender Hülfsrechnung für die gesuchte Pulverladung:

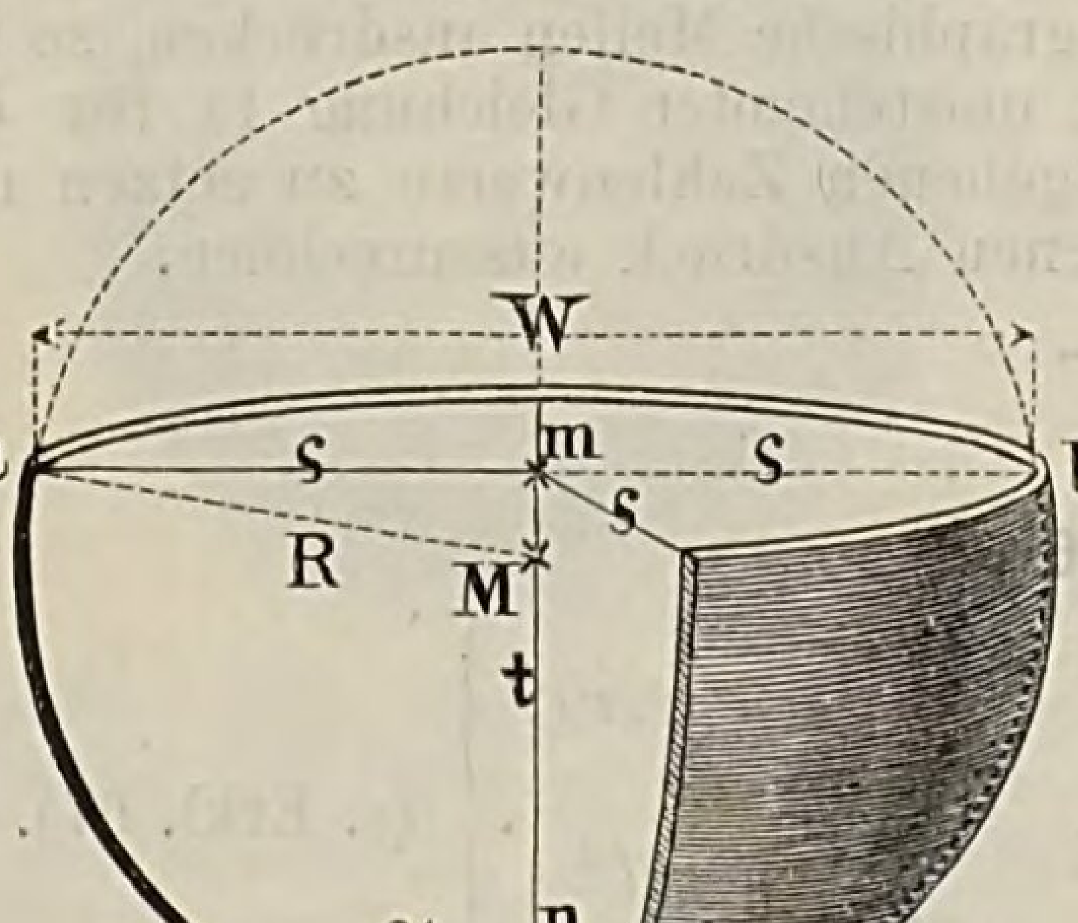
$$x = 0{,}539 \text{ kg}$$

findet.

---

**Aufgabe 32.** Ein **Porzellangefäss** hat eine obere Weite $W = 56$ cm, einen Bodendurchmesser $w = 22$ cm und eine Tiefe $t = 27$ cm. Welches Volumen hat dieses Gefäss, wenn die Seitenwände sphärisch gekrümmt sind?

Figur 22.




**Erkl. 68.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ einer Kugelschicht ist, wenn $\varrho$ und $\varrho_,$ die Radien der Begrenzungskreise und $h$ den Abstand derselben bedeutet:

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(\varrho^2 + \varrho_,^2) + h^2]$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Formel:**

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(\varrho^2 + \varrho_,^2) + h^2] \text{ (s. Erkl. 68).}$$

**Auflösung.** Der hohle Raum des im Querschnitt durch Fig. 22 dargestellten Porzellangefässes hat, da die Seitenwände desselben sphärisch gekrümmt sind, die Form einer **Kugelschicht.** Nach vorstehender Formel:

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(\varrho^2 + \varrho_,^2) + h^2] \text{ (s. Erkl. 68)}$$

hält man für das gesuchte Volumen $V = x$, wenn man in dieser Formel
$h =$ der Tiefe $t = 27$ cm,
$\varrho =$ der halben oberen Weite $W = \frac{56}{2} = 28$ cm und
$\varrho_, =$ dem halben Bodendurchmesser $w = \frac{22}{2} = 11$ cm setzt:

$$x = \frac{3{,}141 \,.\, 27}{6} [3(28^2 + 11^2) + 27^2]$$

oder:

$$x = \frac{3{,}141 \,.\, 9}{2} [3(784 + 121) + 729]$$

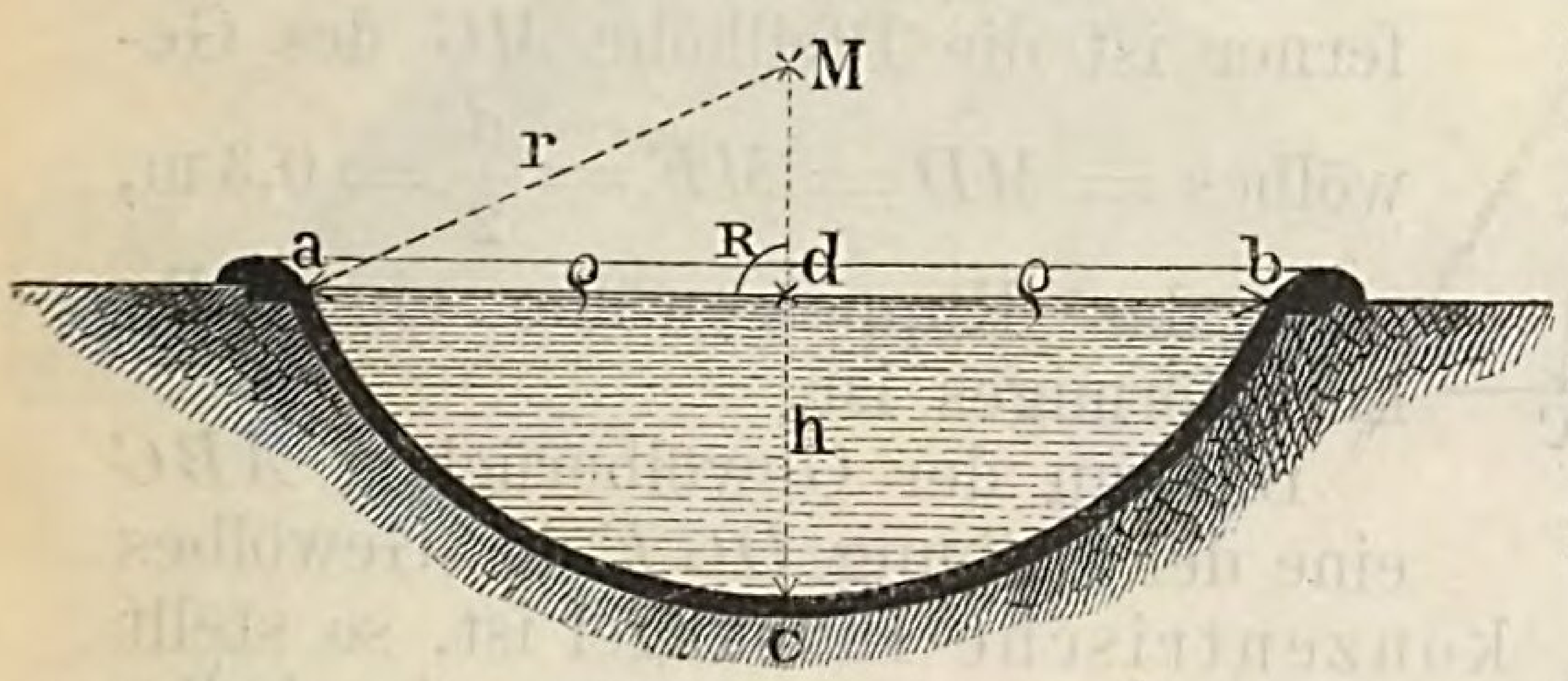
$$x = \frac{28{,}269}{2} (3 \,.\, 905 + 2729) = \frac{28{,}269 \,.\, 5444}{2}$$

$$x = 28{,}269 \,.\, 2722 = 76948{,}218$$

Das Porzellangefäss hat somit:
$= 76948{,}218$ cbm, oder abgerundet
$= 76{,}948$ cdm, oder abgerundet
$= 0{,}769$ cbm Inhalt.

**Aufgabe 33.** Ein **Bassin** in der Form eines Kugelabschnitts soll angelegt werden, welches müssen seine Dimensionen sein, wenn dasselbe 1000 Hektoliter enthalten und die obere Weite $w$ desselben sich zur Tiefe $t$ wie $10:1$ verhalten soll?

Figur 23.




**Erkl. 69.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines Kugelabschnitts (Kugelsegments) ist, wenn $\varrho$ den Radius des Begrenzungskreises und $h$ die Höhe des Abschnitts bedeutet:

$$\text{V. d. Sgt.} = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2)$$

Man siehe den Abschnitt im 1. Buch der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Hülfsrechnung.**

$$\log x = \frac{1}{3}\cdot\left(\log 60000 - (\log 3{,}141 + \log 76)\right)$$

Nun ist: $\log 60000 = 4{,}7781513$

$- (\log 3{,}141 + \log 76)$

$= -(0{,}4971499 + 1{,}8808136) = -2{,}3779635$

$2{,}4001878$

$\cdot\frac{1}{3}$

$\log x = 0{,}8000626$

$0638$

mithin:

$\text{numlog}\, x = 6{,}3105$

**Formel:**

$$\text{V. d. Sgt.} = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2) \text{ (s. Erkl. 69).}$$

**Auflösung.** Das anzulegende Bassin soll die Form eines Kugelabschnitts, siehe Figur 23 haben; die zu berechnenden Dimensionen desselben sind somit die obere Weite $w = ab = 2\varrho$ und die Tiefe $t = dc = h$. Da nun zwischen $w$ und $t$ die Beziehung

$w : t = 10 : 1$ bestehen soll,

so muss, wenn

1) . . . $t = x$ gesetzt wird,

2) . . . $w = 10x$ sein.

Zur Berechnung der Grösse $x$ dient, da das Volumen des Bassins (des Kugelabschnitts) gegeben ist, vorstehende Formel:

$$V = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2) \text{ (s. Erkl. 69).}$$

Setzt man in derselben $V = 1000$ Hektoliter $= 10000$ Liter $= 10000$ cdm, $h = t = x$ und $\varrho = \frac{w}{2} = \frac{10x}{2} = 5x$, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$3) \ldots 10000 = \frac{3{,}141 \cdot x}{6}\left(3\cdot(5x)^2 + x^2\right)$$

Hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$\frac{60000}{3{,}141} = x(3\cdot 25x^2 + x^2)$$

$$\frac{60000}{3{,}141} = x(75x^2 + x^2) = x\cdot 76x^2 = 76x^3$$

$$x^3 = \frac{60000}{3{,}141\cdot 76} \text{ oder:}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{60000}{3{,}141\cdot 76}} \text{ und schliesslich:}$$

$x = 6{,}3105$ dm (s. nebenst. Hülfsrechnung).

Nach den Gleichungen 1) und 2) erhält man somit für die gesuchte Tiefe

$t = 6{,}3$ dm, oder $= 0{,}63$ m

und für die gesuchte obere Weite

$w = 10\cdot 6{,}3 = 63$ dm, oder $= 6{,}3$ m

---

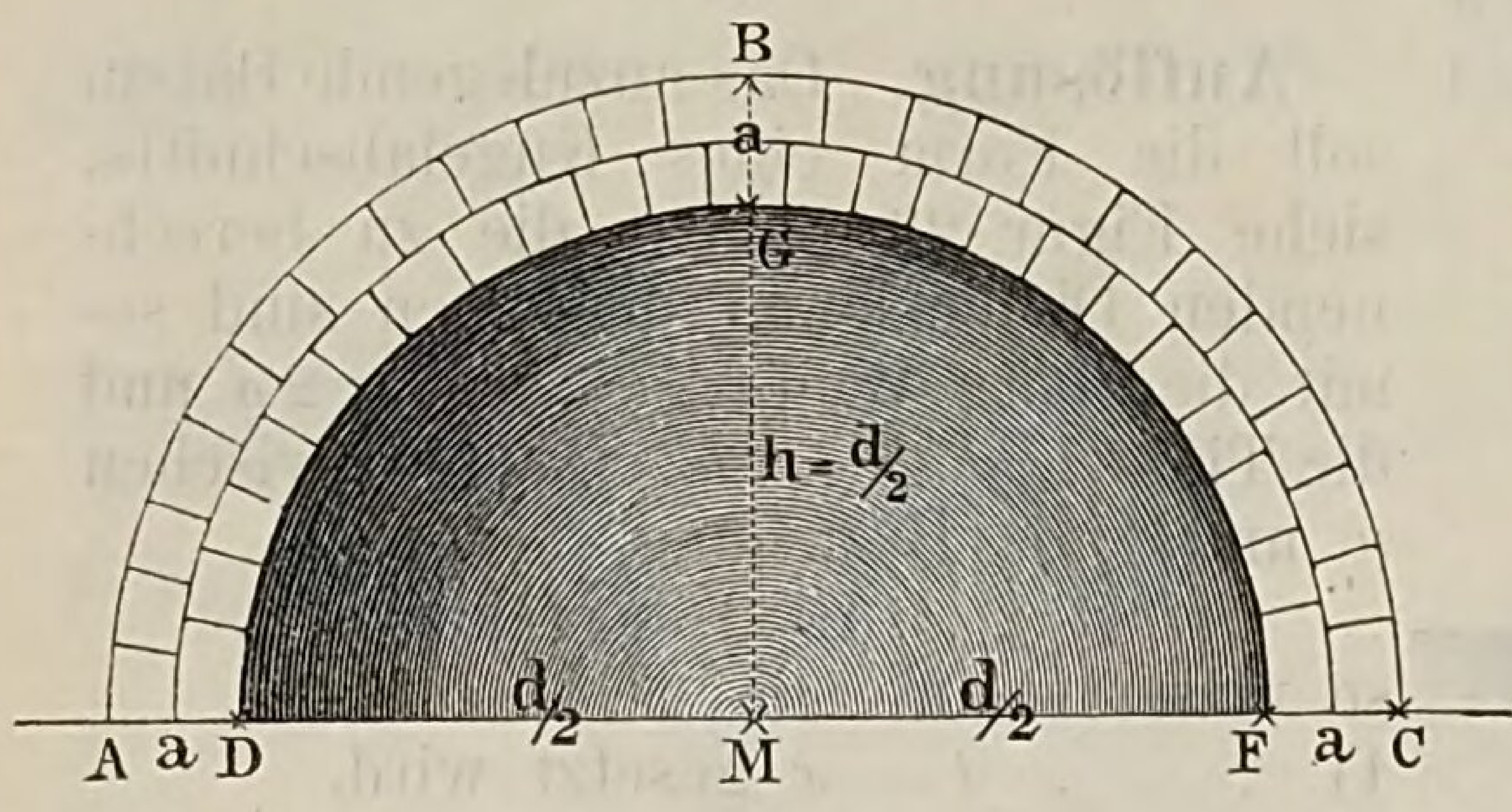
**Aufgabe 34.** Wie viel cbm Mauerwerk enthält ein **Kuppelgewölbe** von der Form einer Halbkugel, dessen Spannung $d = 6$ m und dessen Stärke $a = 0{,}42$ m misst, wenn vorausgesetzt wird, dass

**Formel:**

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) \text{ (s. Erkl. 70).}$$

der Gewölberücken konzentrisch mit der Laibung des Gewölbes ist?

Figur 24.




**Erkl. 70.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ einer Hohlkugel ist, wenn $R$ den Radius der Kugel und $r$ den Radius des inneren hohlen Raumes bedeutet:

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Auflösung.** Stellt die Fig. 24 einen Durchschnitt des in der Aufgabe erwähnten halbkugelförmigen Kuppelgewölbes dar, so ist nach der Erkl. 48, S. 21 der Durchmesser $DF$ der gedachten Halbkugel $DGF$ gleich der Spannung $d$ des Gewölbes, also $= 6$ m; dann ist $AD = FC = GB$ gleich der Stärke des Gewölbes, nämlich $= a = 0{,}42$ m; ferner ist die Pfeilhöhe $MG$ des Gewölbes $= MD = MF = \frac{d}{2} = 0{,}3$ m, weil das Kuppelgewölbe ein halbkugelförmiges ist.

Da nun der Gewölberücken $ABC$ eine der Laibung $DGF$ des Gewölbes konzentrische Halbkugel ist, so stellt das Mauerwerk des Gewölbes eine **halbe Hohlkugel** dar.

Zur Berechnung des Volumens $x$ des Mauerwerks dient daher vorstehende Formel:

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) \text{ (s. Erkl. 70).}$$

Setzt man in diese Formel $V = 2x$ (da diese Formel das Volumen einer ganzen Hohlkugel ergibt), $r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3$ m, nämlich gleich dem Radius der halbkugelförmigen Laibung $DGF$ und $R = r + a = 3 + 0{,}42 = 3{,}42$ m, nämlich gleich dem Radius $MA (= MB = MC)$ des halbkugelförmigen Gewölberückens $ABC$, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$2x = \frac{4 \cdot 3{,}141}{3}(3{,}42^3 - 3^3)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Reihe nach:

$$x = \frac{4 \cdot 3{,}141}{2 \cdot 3}(40{,}001688 - 27)$$

$$x = \frac{6{,}282}{3} \cdot 13{,}0017 = 2{,}094 \cdot 13{,}0017$$

$$x = 27{,}2255598.$$

Das gesuchte Volumen des Mauerwerks ist somit, abgerundet $= 27$ cbm

---

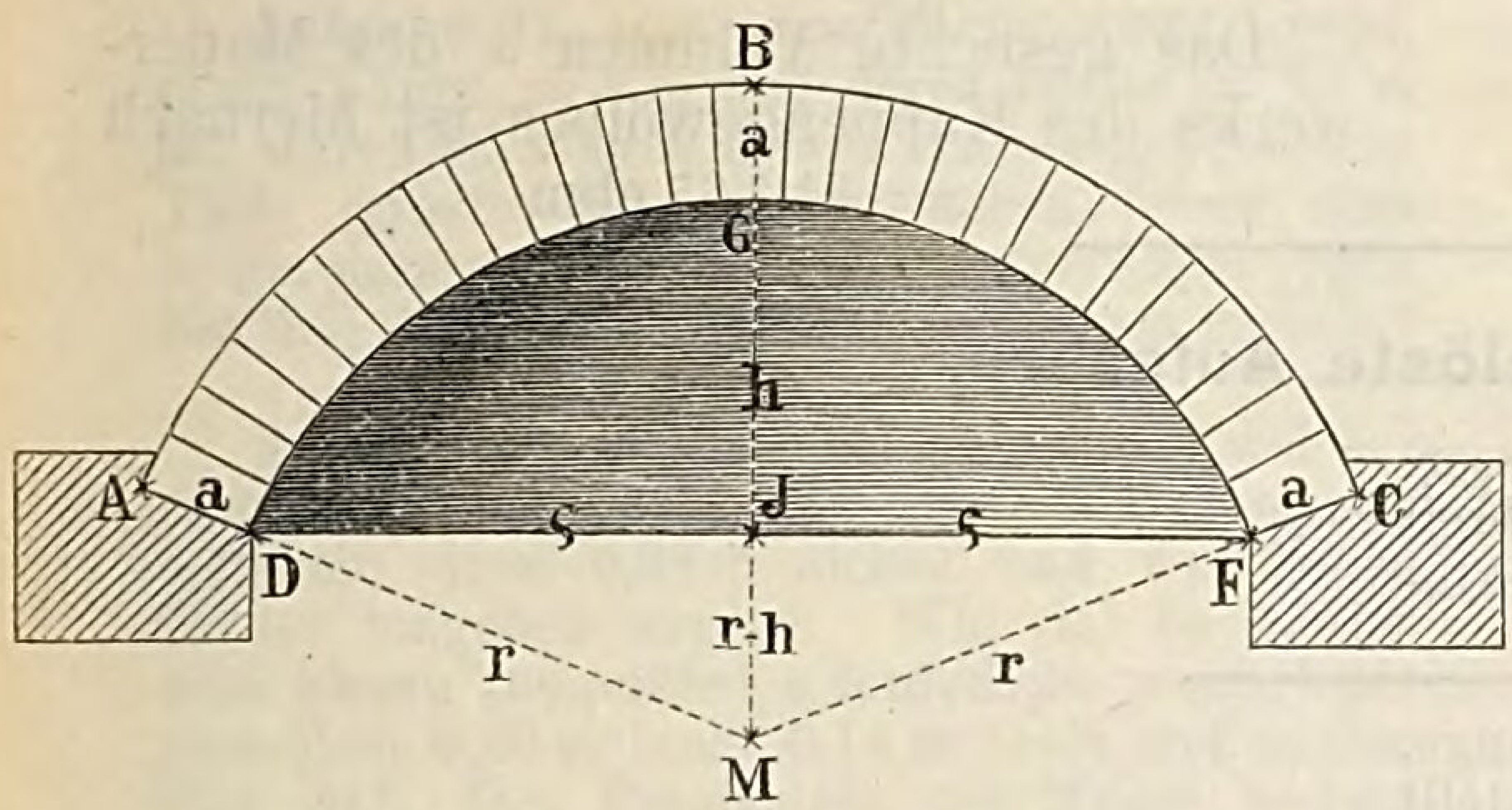
**Aufgabe 35.** Wie viel cbm Mauerwerk enthält ein kugelförmiges Kuppelgewölbe, dessen Pfeilhöhe $h = 2$ m, dessen Spannung $s = 8$ m und dessen Stärke

**Formel:**

$$1) \;\ldots\; V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot h \text{ (s. Erkl. 71).}$$

$a = 0{,}42$ m misst, wenn vorausgesetzt wird, dass der Gewölberücken konzentrisch mit der Laibung des Gewölbes ist?

Figur 25.




**Erkl. 71.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines **Kugelausschnitts** (Kugelsektors) ist, wenn $r$ den Radius der zugehörigen Kugel und $h$ die Höhe der den Sektor begrenzenden Haube bedeutet:

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 . h$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Erkl. 72.** Aus dem rechtwinkligen Dreieck $DJM$, siehe Figur 25, erhält man:

$$r^2 = \varrho^2 + (r - h)^2 \text{ oder:}$$
$$r^2 = \varrho^2 + r^2 - 2rh + h^2$$

und hieraus ergibt sich:

$$r = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}$$

**Auflösung.** Stellt die Fig. 25 einen Durchschnitt des in der Aufgabe erwähnten Kuppelgewölbes dar, so ist analog wie in vorstehender Aufgabe 32, $DF = 2\varrho =$ der Spannung $s$ des Gewölbes, also $= 8$ m; dann ist $AD = BG = FC$ gleich der Stärke $a$ des Gewölbes, nämlich $= 0{,}42$ m, ferner ist $GJ$ gleich der Pfeilhöhe $h$, also $= 2$ m.

Da nun der Gewölbrücken $ABC$ **konzentrisch** mit der Laibung $DGF$ des Gewölbes ist, so findet man das Volumen $x$ des Mauerwerks, indem man von dem Kugelsektor $ABCM$ den Kugelsektor $DGFM$ subtrahiert, man hat somit die Gleichung:

$$1) \;\ldots\; x = \text{V. d. Sekt. } ABCM - \text{V. d. Sekt. } DGFM$$

Zur Bestimmung der Volumen der Kugelsektoren $ABCM$ und $DGFM$ dient vorstehende Formel:

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 . h \quad \text{(s. Erkl. 71).}$$

Setzt man in diese Formel einmal, nämlich **zur Berechnung des Kugelsektors** $DGFM$, für $h = GJ = 2$ m und nach der Erkl. 72 für

$$r = DM = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h} = \frac{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 2^2}{2 . 2} = \frac{4^2 + 2^2}{4}$$

ein andermal, nämlich **zur Berechnung des Kugelsektors** $ABCM$, für $h = BJ = a + h = 0{,}42 + 2 = 2{,}42$ und für

$$r = AM = DM + AD = r + a$$
$$= \frac{4^2 + 2^2}{4} + 0{,}42$$

so erhält nach der Gleichung 1) die Bestimmungsgleichung:

$$x = \frac{2}{3} \cdot 3{,}141 . \left(\frac{4^2 + 2^2}{4} + 0{,}42\right)^2 . 2{,}42 -$$
$$\frac{2}{3} \cdot 3{,}141 . \left(\frac{4^2 + 2^2}{4}\right)^2 . 2$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Reihe nach:

$$x = \frac{2}{3} \cdot 3{,}141 \cdot \left[\left(\frac{16+4}{4} + 0{,}42\right)^2 \cdot 2{,}42 - \left(\frac{16+4}{4}\right)^2 \cdot 2\right]$$

$$x = 2 \cdot 1{,}047 \cdot [(5 + 0{,}42)^2 \cdot 2{,}42 - 5^2 \cdot 2]$$

$$x = 2{,}094 \cdot (29{,}3764 \cdot 2{,}42 - 25 \cdot 2)$$

$$x = 2{,}094 \cdot (71{,}091 - 50) = 2{,}094 \cdot 21{,}091$$

$$x = 44{,}164554$$

Das gesuchte Volumen $x$ des Mauerwerks des Kappengewölbes ist hiernach $= 44{,}165$ cbm

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 36.** Ein rechteckiger Wasserbehälter ist im Lichten 8 m lang, 4,2 m breit und 3 m tief; wie viel cbm, bezw. wie viel Hektoliter Wasser fasst derselbe?

**Aufgabe 37.** Ein Graben von 500 m Länge, 0,5 m Tiefe und 2,3 m Breite soll hergestellt werden; wie viel cbm Erde sind zur Herstellung dieses Grabens auszuheben, wenn das Profil des Grabens ein Rechteck ist?

**Aufgabe 38.** Welchen Kubikinhalt hat eine gerade, reguläre, sechsseitige Sandsteinsäule, wenn deren Grundfläche = 10 qm und deren Höhe = 12 m misst?

**Aufgabe 39.** Es soll ein rechteckiger Oel-Kasten angefertigt werden, der 80 Liter fasst; welches müssen die Dimensionen desselben sein, wenn sich die Länge $l$ zur Breite $b$ zur Tiefe $t$ wie 10 : 5 : 3 verhalten soll?

**Aufgabe 40.** Ein Mehlkasten soll 1500 Liter fassen, welches muss seine Länge und Breite sein, wenn beide um 30 cm differieren und wenn die Tiefe des Kastens = 80 cm sein soll?

**Aufgabe 41.** Wie gross muss die Kante eines Würfels gemacht werden, welcher dasselbe Volumen wie drei andere Würfel haben soll, deren Kanten 2 dm, 1,5 dm und 9 cm sind?

**Aufgabe 42.** Welches Gewicht haben 20 cbm Wasser, wenn 1 cdm des Wassers = 1 kg wiegt?

**Aufgabe 43.** Wie viel cbm Holz enthalten 10 Balken, von denen jeder 6,7 m lang, 24,2 cm breit und 32,5 cm dick ist?

**Aufgabe 44.** Ein Graben von 50 m Länge soll angelegt werden; wie viel cbm Erde sind zur Herstellung des Grabens auszuheben, wenn derselbe 1,5 m tief werden, eine Sohlbreite von 0,6 m und doppelte Anlage haben soll?

**Andeutung:**
Man beachte die Erkl. 13 bis 18, S. 6.

**Aufgabe 45.** Eine Feldschanze hat einen beiderseits senkrecht abgestochenen Graben, dessen Sohlbreite 1,5 m, dessen Tiefe 3,8 m und dessen Länge 72 m misst. Wie viel cbm Erde mussten zur Herstellung dieses Grabens ausgehoben werden, wenn die Escarpe 1½ fache und die Contreescarpe halbe Anlage hat?

**Andeutung:**
Man beachte die Erkl. 20 bis 21, S. 7.

**Aufgabe 46.** Wie viel cbm Sauerstoff und wie viel cbm Stickstoff enthält die Luft eines rechteckigen Zimmers, welches 5 m lang, 4 m breit und 3 m tief ist, wenn man weiss, dass die aus Sauerstoff und Stickstoff bestehende Zimmerluft im Verhältnis von 79:21 gemischt ist?

---

**Aufgabe 47.** Zur Ausfüllung einer Grube, deren Länge = 9 m und deren Breite = 3,5 m ist, waren 38 Wagen Schutt erforderlich; welche Tiefe musste diese Grube haben, wenn man weiss, dass sie die Form eines rechteckigen || ppds hat und dass jeder Wagen 3 cbm Schutt enthält?

---

**Aufgabe 48.** Ein rechteckiger Garten, welcher eine Länge von 52 m, eine Breite von 36 m hat, soll mit einer 0,28 m dicken und 2 m hohen Mauer umgeben werden. Wie viel Backsteine sind hierzu (ungefähr) erforderlich, wenn jeder derselben 0,28 m lang, 0,14 m breit und 0,07 m dick ist? Das Fundament der Mauer besteht aus Bruchsteinen, die hier nicht in Rechnung kommen.

---

**Aufgabe 49.** Wie hoch belaufen sich die Kosten eines herzustellenden Grabens, der 57 m lang, oben 2 m und unten 1 m breit ist und eine Tiefe von 1,5 m hat, wenn jeder cbm Erde auszugraben und fortzuschaffen 40 pf kostet?

---

**Aufgabe 50.** Wie viel cbm Holz repräsentieren 75 Planken, von denen jede 10 m lang, 50 cm breit und 8 cm dick ist?

---

**Aufgabe 51.** Welches Gewicht haben 1000 dreiseitige eiserne Eisenbahnschwellen, deren Endflächen gleichschenklige Dreiecke mit den Grundlinien $g$ = 0,33 m und den Schenkeln $s$ = 0,29 m sind und von welchen jede eine Länge von 2,80 m hat, wenn man weiss, dass 1 kg des Eisens = 7,2 kg wiegt?

---

**Aufgabe 52.** Auf einem quadratischen Felde, dessen Seite 200 m misst, werden 50 Haufen Erde von denen jeder 15 cbm enthält, gleichmässig verteilt; wie hoch wird diese somit aufgetragene Erdschicht?

---

**Aufgabe 53.** Ein Turmdach hat die Gestalt einer geraden 4 seitigen Pyramide, deren Grundkante = 15 m und deren Höhe = 20 m beträgt; wie viel qm erfordert dessen Bedachung?

---

**Aufgabe 54.** Wie theuer kommt die Bedachung einer Turmspitze mit Kupferblech zu stehen, wenn dieselbe eine gerade 10 seitige Pyramide vorstellt, deren Grundkante = 3 m, deren Höhe = 12 m misst und wenn 1 qm der Bedachung 35 ℳ kostet?

---

**Aufgabe 55.** Wie tief muss ein 300 Hektoliter enthaltendes Bassin sein, wenn dessen Umfang ein Quadrat mit der Seite = 4 m und dessen Boden ein Quadrat mit der Seite = 3 m und wenn die Abdachung der Seitenwände überall gleichmässig ist?

---

**Aufgabe 56.** Wie hoch ist eine sechsseitige Turmspitze, deren Grundkante = 2 m ist, wenn zur Bedachung derselben ebensoviel Kupferblech erforderlich ist, als zur Bedachung einer halbkugelförmigen Kuppel, deren Radius = 4 m misst?

**Aufgabe 57.** Wie viel cbm Holz enthält eine Partie von 1650 Stück Rundhölzer, wenn jedes derselben einen Umfang = 1,65 m und eine Länge von 9,5 m hat?

**Aufgabe 58.** Ein cylindrisches Gefäss hat eine Tiefe von 2,40 m und enthält 1200 Liter. Welches ist die lichte Weite desselben?

**Aufgabe 59.** Welche Dimensionen muss ein cylindrisches Gefäss haben, das gerade 1 Hektoliter fasst und dessen Durchmesser und Höhe gleich sind?

**Aufgabe 60.** Wie schwer ist eine gusseiserne Röhre von 2 m Länge, 3 cm Wandstärke und 20 cm lichte Weite, wenn man weiss, dass 1 cdm des Eisens = 7,2 kg wiegt?

**Aufgabe 61.** Der obere Umfang eines Brunnenschachtes misst 4,2 m; wie viel Hektoliter Wasser befinden sich in demselben, wenn das Wasser darin 5,8 m hoch steht?

**Aufgabe 62.** Wie hoch kommt der äusserliche Verputz eines cylindrischen Turmes, wenn derselbe 20,9 m hoch ist und einen Umfang von 35 m hat und wenn 1 qm des Verputzes $23^1/_2$ pf kostet?

**Aufgabe 63.** Ein oben offenes, cylindrisches Blechgefäss soll angefertigt werden; wie viel qm Blech sind hierzu erforderlich, wenn der Durchmesser halb so gross als die Höhe werden und das Gefäss 150 Liter fassen soll?

**Aufgabe 64.** Ein massiver eiserner Cylinder, welcher ebenso hoch als breit und dessen Durchmesser = $2r$ ist, soll so cylindrisch durchbohrt werden, dass die innere und äussere Mantelfläche des dadurch entstandenen Hohlcylinders sich wie 3 : 5 verhalten. Wie gross ist die ganze Oberfläche und das Volumen des Hohlcylinders?

**Aufgabe 65.** Eine Anzahl Abflussröhren, die zusammen eine Länge von 70,8 m und sämtlich eine Dicke von 2,5 dm haben, sollen von Blech angefertigt werden; wie viel qm dieses Blechs sind hierzu erforderlich, wenn die nötigen Falze nicht mitgerechnet werden?

**Aufgabe 66.** Ein Hohlmass, welches 25 Liter fasst, soll angefertigt werden; welches müssen die Dimensionen desselben sein?

**Andeutung:** Bei Hohlmassen verhält sich der Durchmesser zur Tiefe wie 3 : 2.

**Aufgabe 67.** Der innere Radius einer Ringmauer ist 10 cm, ihre Dicke = 1,08 m, ihre Höhe = 8 m; welches ist das Volumen des Mauerwerks?

**Aufgabe 68.** Wie gross ist der Kubikinhalt des Mauerwerks und die Laibung eines Tonnengewölbes, welche 15,8 m lang ist, eine Spannung von 3,7 m und eine Stärke von 42 cm hat?

Andeutung: Man beachte die Erkl. 48, Seite 21.

**Aufgabe 69.** Ein kegelförmiges Turmdach hat unten einen Umfang von 12 m und eine Höhe von 6 m. Dasselbe soll eingedeckt werden; wie teuer kommt die Bedachung, wenn 19 m der einzudeckenden Fläche 5 ℳ. kosten?

**Aufgabe 70.** Aus einem Kreissektor von Blech, dessen Centriewinkel = 120° misst und dessen Radius = 1,5 m lang ist, soll ein trichterförmiges Gefäss gemacht werden. Wie viel Liter enthält dasselbe und wie viel qm Inhalt hat die Wandung des Gefässes?

**Aufgabe 71.** Der hohle Raum eines einen abgestumpften Kegel bildenden Gefässes ist 0,6 m hoch. Der Durchmesser der Oeffnung ist 0,8 m, der des Bodens = 0,4 m. Dieses Gefäss ist vollständig mit Pulver gefüllt, mit welchem Granaten, deren innerer Durchmesser = 9 cm ist, gefüllt werden. Wie viel dieser Granaten können mit dem in dem Gefässe befindlichen Pulver gefüllt werden?

Andeutung: Man beachte die Erkl. 66, S. 29.

**Aufgabe 72.** Ein Baumstamm hat die Gestalt eines geraden Kegelstumpfs; der Umfang des einen Endes misst 1,65 m, der des andern Endes = 1,35 m und seine Länge ist 9,8 m. Wie viel cbm Holz enthält dieser Baumstamm?

**Aufgabe 73.** Ein Fass, welches als ein beiderseits abgekürzter Doppelkkegel betrachtet werden kann, soll 20 Hektoliter fassen und eine Länge von 2,5 m haben; welches ist die Boden- und Bauchweite, wenn dieselben sich wie 10 : 11 verhalten sollen?

Andeutung: Man beachte die Erkl. 58, S. 27.

**Aufgabe 74.** Die Kapazität eines Kessels von der Form eines geraden Kegelstumpfs ist 780 Liter, welches sind seine Dimensionen, wenn die Höhe = 0,80 m misst und das Verhältnis des oberen Umfangs zu dem des Bodens = 3 : 2 ist?

Andeutung. Unter „Kapazität“ des Kessels versteht man die Anzahl der Liter, welche derselbe bei vollständiger Füllung zu fassen vermag.

**Aufgabe 75.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen der als Kugel betrachteten Erde, wenn der Umfang am Aequator = 5400 geograph. Meilen beträgt?

**Aufgabe 76.** Aus zwei eisernen Kugeln, deren Durchmesser 22 cm und 39 cm betragen, soll eine Kugel gegossen werden; welche Oberfläche und welches Volumen wird diese Kugel haben, wenn keine Rücksicht auf das beim Schmelzen verloren gehende Eisen genommen wird?

**Aufgabe 77.** Wie weit (welche Fläche) kann auf offener See ein Beobachter, der sich 50 m über das Niveau des Wasser erhebt, sehen, wenn keine Rücksicht auf die irdische Strahlenbrechung genommen wird und der Radius der als Kugel betrachteten Erde = 6366168 m angenommen wird?

Andeutung: Man beachte die Erkl. 61—64, S. 28 und 29.

**Aufgabe 78.** Wie hoch muss man sich über die Erdoberfläche erheben, um eine Fläche von 11500 geogr. Quadratmeilen übersehen zu können, wenn keine Rücksicht auf die irdische Strahlenbrechung genommen wird und der Radius der Erde = 859,44 geograph. Meilen angenommen wird?

---

**Aufgabe 79.** Es soll ein Gefäss angefertigt werden, das die Form einer Kugelschicht (körperlichen Kugelzone) hat und 300 Liter fassen soll, welches sind seine Dimensionen, wenn der Durchmesser der Oeffnung, zum Durchmesser des Bodens, zur Tiefe des Gefässes sich wie 3 : 1 : 2 verhalten sollen?

---

**Aufgabe 80.** Ein Bassin in der Form eines Kugelsegments soll angelegt werden; welches sind seine Dimensionen wenn dasselbe 2000 Hektoliter fassen und eine Fläche von 20 qm haben soll?

---

**Aufgabe 81.** Wie viel cbm Mauerwerk enthält ein Kuppelgewölbe von der Form einer Halbkugel, dessen Spannung = 7,5 m und dessen Stärke 0,42 m misst?

---

**Aufgabe 82.** Wie viel cbm Mauerwerk enthält ein kugelförmiges Kuppelgewölbe, dessen Pfeilhöhe = 1,2 m, dessen Spannung = 10,5 m und dessen Stärke = 0,42 m misst, wenn vorausgesetzt wird, dass der Gewölbrücken und die Laibung konzentrisch sind?

**Andeutung:**

Man beachte die Erkl. 48, S. 21.

---

**Aufgabe 83.** Ein Kanal (Graben) hat eine obere Breite von 5 m, eine Sohlbreite von 2 m und eine Tiefe von $1\frac{1}{4}$ m. Das Wasser fliesst darin mit einer sekundlichen Geschwindigkeit von 1 m und steht 0,95 m hoch. Wie viel Wasser liefert der Kanal pro Stunde?

**Andeutung:**

Die Wassermenge, die der Kanal **pro Sekunde** liefert ist gleich dem Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche ein ||tr mit den parallelen Seiten 5 m und 2 m und mit der Höhe 0,95 m ist und dessen Höhe = 1 m beträgt.

---

**Aufgabe 84.** Ein Gefäss, welches 2,01 cdm fasst und die Form eines Kegelstumpfs hat, soll so verkleinert werden, dass es gerade 1 Liter enthält. Wie breit ist der am oberen Rande abzunehmende Streifen, wenn der Radius der unteren Grundfläche $R = 4$ cm, jener der oberen $r = 3$ cm ist? (1 cdm = 1 Liter).

---

Weitere schwierigere praktische Aufgaben aus allen Gebieten sind an geeigneter Stelle in nachstehenden Abschnitten enthalten.

# II.

# Aufgaben über die gegenseitigen Beziehungen und Aehnlichkeit der fünf einfachen geometrischen Körper.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 85.** Es sind drei Würfel gegeben, der 1. hat eine Kante $a = 3$ m, der 2. hat eine Kante $b = 4$ m und der 3. hat eine Kante $c = 5$ m. Wie gross ist die Kante eines vierten Würfels, dessen Inhalt gleich der Summe der Inhalte der 3 gegeb. Würfel ist?

**Erkl. 73.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines rechteckigen Parallelopipedons, dessen 3 an einer Ecke zusammenstossenden Kanten $l$, $b$ und $h$ sind, ist:

1) . . . $V = b \cdot h \cdot l$ Kubikeinheiten.

Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines Würfels, dessen Kante $= k$ ist, ist hiernach:

2) . . . $V = k^3$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das Prisma** handelt.

**Formel:**

$V = k^3$ (s. Erkl. 73).

**Auflösung.** Bezeichnet man die Kante des gesuchten Würfels mit $x$, so besteht unter Benützung vorstehender Formel:

$V = k^3$ (s. Erkl. 73)

die Bestimmungsgleichung:

$$x^3 = a^3 + b^3 + c^3$$

woraus sich:

$$x = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe ergibt. Für das in der Aufgabe gegeb. Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3}$$

oder:

$$x = \sqrt[3]{27 + 64 + 125} = \sqrt[3]{216} = 6$$

Die gesuchte Kante des 4. Würfels ist somit $= 6$ m

---

**Aufgabe 86.** Wie vielmal ist ein Würfel grösser als ein anderer, wenn die Kante des ersteren 3mal so gross ist als die des zweiten?

**Formel:**

$V = k^3$ (s. Erkl. 73).

**Auflösung.** Ist der erste Würfel $x$mal grösser als der zweite und bezeichnet man das Volumen des ersten mit $V$, das des zweiten mit $v$, so hat man zunächst die Gleichung:

1) . . . $x = \frac{V}{v}$

Bezeichnet man nun ferner die Kante des zweiten Würfels mit $k$, so ist die Kante des ersten Würfels $= 3k$ und nach vorstehender Formel hat man für die Volumen $V$ und $v$ der beiden Würfel:

2) . . . $V = (3k)^3$

3) . . . $v = k^3$

Aus den Gleich. 1), 2) und 3) erhält man hiernach:

$$x = \frac{(3k)^3}{k^3} = \frac{27k^3}{k^3} = 27$$

Der erste Würfel ist also **27 mal** grösser als der zweite.

---

**Aufgabe 87.** Die Summe der Oberflächen zweier Würfel sei $S = 204$ qdm und die Summe zweier Kanten derselben $s = 8$ dm; wie gross ist jede Kante?

**Erkl. 74.** Die Oberfläche $O$ eines Würfels, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$O = 6 \,.\, k^2$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das Prisma** handelt.

**Erkl. 75.** Aus der Gleichung:

$$6x^2 + 6 \,.\, (s-x)^2 = S$$

erhält man der Reihe nach:

$$x^2 + (s-x)^2 = \frac{S}{6}$$

$$x^2 + s^2 - 2sx + x^2 = \frac{S}{6}$$

$$2x^2 - 2sx = \frac{S}{6} - s^2$$

$$x^2 - sx = \frac{S}{12} - \frac{s^2}{2}$$

$$x^2 - sx + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{S}{12} - \frac{s^2}{2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{S}{12} - \frac{6s^2}{12} + \frac{s^2}{4}$$

$$x - \frac{s}{2} = \pm\sqrt{\frac{S - 6s^2 + 3s^2}{12}}$$

$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{S - 3s^2}{4 \,.\, 3}}$$

$$x = \frac{s}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}$$

$$1) \,.\,.\, x = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}\right)$$

Ferner ist hiernach:

$$s - x = s - \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}\right) \text{ oder:}$$

$$2) \,.\,.\, s - x = \frac{1}{2}\left(s \mp \sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}\right)$$

**Erkl. 76.** Die aus den beiden Gleichungen:

$$1) \,.\,.\, x = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}\right)$$

$$2) \,.\,.\, s - x = \frac{1}{2}\left(s \mp \sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}\right)$$

für $x$ und $(s - x)$ sich ergebenden Werte sind bezw. einander gleich. Es genügt daher schon eine dieser Gleichungen als allgemeine Lösung der Aufgabe.

**Formel:**

$$O = 6k^2 \text{ (s. Erkl. 74).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die eine der gesuchten Kanten mit $x$, so ist die andere Kante $= s - x$, denn die Summe beider soll $= s$ sein.

Da ferner die Summe der Oberflächen der gedachten Würfel mit $S$ gegeben ist, so hat man unter Benutzung der vorstehenden Formel:

$$O = 6 \,.\, k^2 \text{ (s. Erkl. 74).}$$

die Bestimmungsgleichung:

$$6 \,.\, x^2 + 6 \,.\, (s-x)^2 = S$$

woraus sich nach der Erkl. 75

$$1) \,.\,.\, x = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}\right)$$

und

$$2) \,.\,.\, (s - x) = \frac{1}{2}\left(s \mp \sqrt{\frac{S - 3s^2}{3}}\right)$$

(man beachte die Erkl. 76)

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe ergibt.

Für das gegebene Zahlenbeispiel erhält man aus vorsteh. Gleichung 1):

$$x = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{\frac{204 - 3 \,.\, 8^2}{3}}\right)$$

oder:

$$x = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{\frac{204 - 3 \,.\, 64}{3}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{\frac{204 - 192}{3}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{\frac{12}{3}}\right) = \frac{1}{2}(8 \pm \sqrt{4})$$

$$x = \frac{1}{2}(8 \pm 2)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Unter Berücksichtigung der Erkl. 76 ist somit die Kante des einen Würfels $= 5$ dm und die des andern Würfels $= 3$ dm.

---

**Aufgabe 88.** Wie lang sind die Kanten zweier Würfel zu machen, deren Volumina sich wie $m : n = 2 : 3$ verhalten, und welche zusammen so gross sind als ein Würfel, dessen Oberfläche $F = 96$ qdm ist?

**Formeln:**

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ V = k^3 \\ 2)\ O = 6 \,.\, k^2 \end{array}\right\} \text{ (s. die Erkl. 73 u. 74).}$$

**Erkl. 77.** Aus nebenst. Gleichung 3)
$$6z^2 = F$$
ergibt sich: $$z = \sqrt{\frac{F}{6}}$$

**Erkl. 78.** Aus nebensteh. Gleichung 1)
$$x^3 : y^3 = m : n$$
erhält man:
$$my^3 = nx^3$$
oder:
$$y^3 - \frac{n}{m} x^3 = 0$$
subtrahiert man diese Gleichung von nebenst. Gleichung 2):
$$x^3 + y^3 = z^3$$
so ergibt sich:
$$x^3 + \frac{n}{m} x^3 = z^3$$
oder:
$$x^3 \left(1 + \frac{n}{m}\right) = z^3$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{z^3}{1 + \frac{n}{m}}} = \sqrt[3]{\frac{z^3}{\frac{m+n}{m}}}$$
$$x = z \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}$$
Setzt man hierin für $z$ seinen Wert aus der Erkl. 77. so erhält man:
$$x = \sqrt{\frac{F}{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}$$

**Hülfsrechnungen:**

1) $\sqrt[3]{\frac{3}{3+2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{0{,}6}$. Nun ist:
$$log \sqrt[3]{0{,}6} = \frac{1}{3} \cdot log\, 0{,}6$$
$$\begin{array}{r} (+2) \qquad (-2) \\ log\, 0{,}6 = 0{,}7781513 - 1 \\ 1 \\ \cdot\, \overline{3} \\ \frac{1}{3} \cdot log\, 0{,}6 = \overline{0{,}9260504 - 1} \\ 0542 \end{array}$$
mithin: $\sqrt[3]{0{,}6} = 0{,}84344$ oder abgerundet $= \underline{\underline{0{,}84}}$

2) $\sqrt[3]{\frac{2}{2+3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{0{,}4}$. Nun ist:
$$log \sqrt[3]{0{,}4} = \frac{1}{3} \cdot log\, 0{,}4$$
$$\begin{array}{r} (+2) \qquad (-2) \\ log\, 0{,}4 = 0{,}6020600 - 1 \\ 1 \\ \cdot\, \overline{3} \\ log \sqrt[3]{0{,}4} = \overline{0{,}8673533 - 1} \\ 3555 \end{array}$$
mithin ist $\sqrt[3]{0{,}4} = 0{,}73691$ oder abgerundet $= 0{,}74$

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchten Würfelkanten mit $x$ und $y$, so hat man mit Benützung der vorstehenden Formel 1), die Gleichung:

1) . . . $x^3 : y^3 = m : n$

Bezeichnet man ferner die unbekannte Kante des 3. Würfels, dessen Oberfläche mit $F$ gegeben ist, durch $z$, so hat man mit Benützung der vorsteh. Formeln und der Aufgabe gemäss, die weiteren Bestimmungsgleichungen:

2) . . . $x^3 + y^3 = z^3$ und

3) . . . $6 . z^2 = F$

Da $z$ mit Hülfe der vorsteh. Gleich. 3) nach der Erkl. 77 sofort in die gegeb. Oberfläche $F$ ausgedrückt werden kann, so bestimme man zuerst aus den Gleich. 1) und 2) die Unbekannten $x$ und $y$.

Aus Gleich. 1) erhält man:

4) . . . $x^3 - \frac{m}{n} y^3 = 0$

subtrahiert man diese Gleichung 4) von Gleichung 2) und 3), so ergibt sich:
$$y^3 + \frac{m}{n} y^3 = z^3$$
oder:
$$y^3 \left(1 + \frac{m}{n}\right) = z^3$$
$$y^3 = \frac{z^3}{1 + \frac{m}{n}}$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{z^3}{\frac{n+m}{n}}} = z \sqrt[3]{\frac{n}{n+m}}$$
Setzt man hierin für $z$ seinen Wert (s. Erkl. 77) so erhält man:

a) . . . $y = \sqrt{\frac{F}{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{n+m}}$. Ferner erhält man nach der Erkl. 78:

b) . . . $x = \sqrt{\frac{F}{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das gegeb. Zahlenbeispiel erhält man hiernach:
$$y = \sqrt{\frac{96}{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{3+2}}$$
und
$$x = \sqrt{\frac{96}{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{2+3}}$$
oder nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$y = \sqrt{16} \,.\, \sqrt[3]{0,6} = 4 \,.\, 0,84 = 3,36 \text{ dm}$$

und

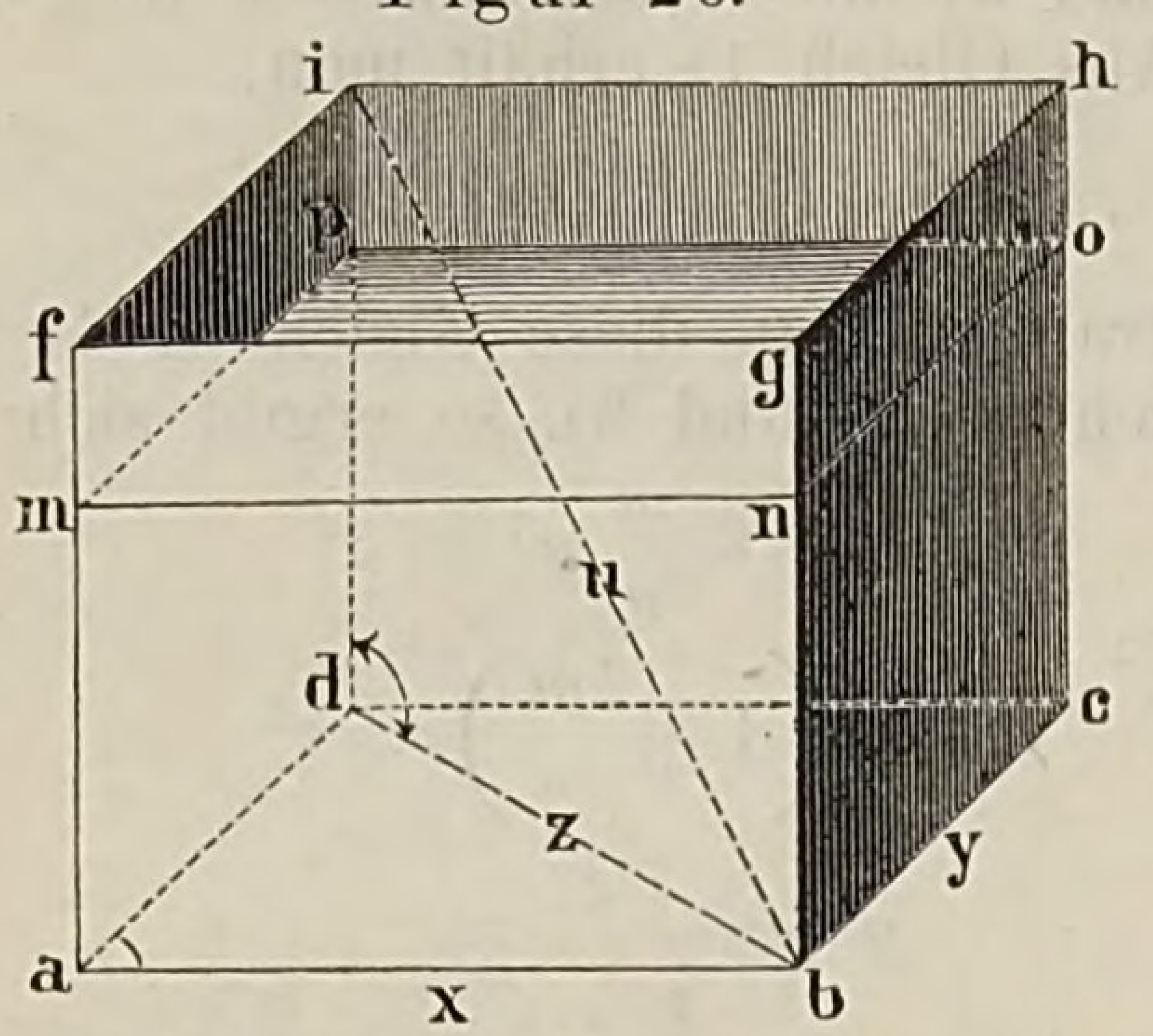
$$x = \sqrt{16} \,.\, \sqrt[3]{0,4} = 4 \,.\, 0,74 = 2,96 \text{ dm}$$

Die gesuchten Würfelkanten sind also $= 3,36$ dm und $2,96$ dm lang.

---

**Aufgabe 89.** Wie gross sind die Länge und die Breite eines 9 dm tiefen rechtwinkligen parallelopipedischen Behälters, der bei einer 5 dm hohen Füllung 3 mal soviel cdm wie der Umfang der Grundfläche dm misst weniger fasst, als wenn er ganz gefüllt ist, und wenn ferner das Quadrat der Diagonale seiner Grundfläche $3^7/_{11}$ mal soviel qdm enthält, als die der Körperdiagonale des ||ppds dm hat?

Figur 26.




**Erkl. 79.** Der Umfang $abcd$ des Behälters ist, wenn die Seite $ab$ mit $x$, die Seite $bc$ mit $y$ bezeichnet wird $= 2x + 2y$

**Erkl. 80.** Aus den nebenst. Gleichungen:

$$2) \quad z^2 = 3\frac{7}{11}\,u$$

$$3) \quad z^2 = u^2 - 9^2$$

erhält man durch Combination:

$$u^2 - 9^2 = \frac{40}{11}\,u$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$u^2 - \frac{40}{11}\,u = 81$$

$$u^2 - \frac{40}{11}\,u + \left(\frac{20}{11}\right)^2 = 81 + \left(\frac{20}{11}\right)^2$$

$$\left(u - \frac{20}{11}\right)^2 = 81 + \frac{400}{11^2}$$

$$u - \frac{20}{11} = \pm\sqrt{\frac{81 \,.\, 11^2 + 400}{11^2}}$$

$$u = \frac{20}{11} \pm \sqrt{\frac{9801 + 400}{11^2}}$$

$$u = \frac{20}{11} \pm \sqrt{\frac{10201}{11^2}} = \frac{20}{11} \pm \frac{101}{11}$$

**Formel:**

$$V = l \,.\, b \,.\, h \quad \text{(s. Erkl. 73).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchte Länge $ab$ und die gesuchte Breite $bc$ des Behälters, siehe Fig. 26, bezw. mit $x$ und $y$ und ist die Tiefe des Behälters $af$ mit 9 dm, die Höhe $am$ der Füllung mit 5 dm gegeben, so hat man unter Benützung vorstehender Formel und dem Sinne der Aufgabe gemäss die Bestimmungsgleichung:

$$1) \quad x \,.\, y \,.\, 5 = x \,.\, y \,.\, 9 - 3\,(2x + 2y)$$

(s. Erkl. 79)

Bezeichnet man ferner die Diagonale $bd$ der Grundfläche $abcd$ mit $z$ und die Körperdiagonale $bi$ mit $u$, so hat man der Aufgabe gemäss die weitere Gleich.:

$$2) \quad z^2 = 3\frac{7}{11} \cdot u$$

Da hiernach die Aufgabe 2 Gleichungen mit 4 Unbekannten ergibt, so müssen noch zwei weitere Gleichungen aus den gegenseitigen Beziehungen der Dimensionen des ||ppds aufgestellt werden. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $bdi$, Figur 26, in welchem $di = 9$ dm ist, erhält man:

$$3) \quad z^2 = u^2 - 9^2$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck $bad$ erhält man:

$$4) \quad z^2 = x^2 + y^2$$

Nunmehr ergibt sich nach der Erkl. 80 für $u$:

$$u = 11$$

und vorsteh. Gleichung 2) geht über in:

$$z^2 = \frac{40}{11} \cdot 11 = 40$$

oder in Rücksicht der Gleichung 4), in:

$$5) \quad \ldots \quad x^2 + y^2 = 40$$

Mit den Gleichungen 1) und 5) hat man nunmehr 2 Gleichungen, in welchen nur die gesuchten Grössen $x$ und $y$ vor-

$u_1 = \frac{121}{11} = 11$

$u_2 = -\frac{81}{11}$ dieser Wert ist als negativ unbrauchbar.

**Erkl. 81.** Aus den nebensteh. Gleichungen:

5) $x^2 + y^2 = 40$

6) $2xy - 3(x + y) = 0$

findet man $x$ und $y$ unter anderem wie folgt: Addiert man beide Gleichungen, so erhält man:

$x^2 + 2xy + y^2 - 3(x + y) = 40$

oder: $(x + y)^2 - 3(x + y) = 40$

Setzt man nun $x + y = v$, also $(x + y)^2 = v^2$, was auch nur in Gedanken geschehen kann, so erhält man:

$v^2 - 3v = 40$

$v^2 - 3v + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 40 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(v - \frac{3}{2}\right)^2 = 40 + \frac{9}{4}$

$v - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{160 + 9}{4}}$

$v = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}$

und schliesslich:

$v_1 = \frac{16}{2} = 8$

$v_2 = -\frac{10}{2} = -5$, welcher Wert als negativ unbrauchbar ist.

Man hat somit $v$, d. i. $x + y$, gefunden und hat nunmehr die neue Gleichung:

7) $x + y = 8$

Setzt man auch den für $x + y$ gefundenen Wert 8 in Gleich. 6, so erhält man die weitere Gleichung:

8) $2xy = 24.$

Subtrahiert man schliesslich noch die Gleichung 8) von Gleich. 5), so ergibt sich:

$x^2 - 2xy + y^2 = 40 - 24$

oder:

$(x - y)^2 = 16$

und

9) $x - y = \pm 4$

Aus den Gleich. 7) und 9) ergibt sich endlich, durch Addition

$2x = 12$ oder $= 4$

mithin:

$x = 6$ oder $= 2$

und durch Subtraktion:

$2y = 4$ oder $= 12$

mithin: $y = 2$ oder $= 6$

kommen; zur Berechnung dieser Grössen verfahre man, wie folgt:

Gleichung 1 reduziert gibt:

$4xy - 6(x + y) = 0$

oder mit 2 gehoben:

6) . . . $2xy - 3(x + y) = 0$

Nunmehr erhält man aus den Gleichungen 5) und 6) nach nebenstehender Erkl. 81 die Werte:

$x = 6$ oder 2 und $y = 2$ oder 6

Die gesuchte Breite ist also $= 6$ dm und die gesuchte Länge $= 2$ dm oder umgekehrt.

---

**Aufgabe 90.** In welchem Verhältnis stehen die Kubikinhalte dreier gerader Prismen von gleicher Höhe, deren Grundflächen bezw. ein reguläres Sechseck, ein reguläres Viereck und ein reguläres Zehneck sind und welche einem Kreise mit

**Formel:**

$V = G \,.\, H$ (s. Erkl. 1, Seite 1)

dem Radius $R$ eingeschrieben werden können?

**Erkl. 82.** In jeder laufenden Proportion, wie $V_1 : V_2 : V_3 = G_1 . H : G_2 . H : G_3 . H$ welche auch in der Form:

$$\frac{V_1}{G_1 . H} = \frac{V_2}{G_2 . H} = \frac{V_3}{G_3 . H}$$

geschrieben werden kann, kann man die homologen Glieder durch ein und dieselbe Grösse dividieren oder mit ein und derselben Grösse multiplizieren. Man siehe das Kapitel: **Die Proportionen.**

**Erkl. 83.** Der Inhalt $J_6$ eines **regulären Sechsecks** in den Radius $R$ des umschriebenen Kreises ausgedrückt, ist:

$$J_6 = \frac{3 R^2}{2} \sqrt{3}$$

Man siehe den Abschnitt der Planimetrie, welcher über **die regulären Polygone** handelt.

**Erkl. 84.** Der Inhalt $J_4$ eines **regulären Vierecks** in den Radius $R$ des umschriebenen Kreises ausgedrückt, ist:

$$J_4 = 2 R^2$$

Man siehe den Abschnitt der Planimetrie, welcher über die **regulären Polygone** handelt.

**Erkl. 85.** Der Inhalt $J_{10}$ eines **regulären Zehnecks** in den Radius $R$ des umschriebenen Kreises ausgedrückt, ist:

$$J_{10} = \frac{5 R^2}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Man siehe den Abschnitt der Planimetrie, welcher über die **regulären Polygone** handelt.

**Auflösung.** Bezeichnet man die Volumina der drei Prismen, der Reihe nach mit: $V_1$, $V_2$ und $V_3$, die Inhalte der Grundflächen derselben mit $G_1$, $G_2$ und $G_3$ und die den drei Prismen gleiche Höhe mit $H$, so hat man unter Benutzung vorstehender Formel, die Proportion:

$$V_1 : V_2 : V_3 = G_1 . H : G_2 . H : G_3 . H$$

oder nach der Erkl. 82:

$$1) \quad \ldots \quad V_1 : V_2 : V_3 = G_1 : G_2 : G_3$$

Da man nun nach den Erkl. 83, 84 und 85 jede der Grundflächen $G_1$, $G_2$ und $G_3$ in den Radius $R$ des denselben umschriebenen Kreises ausdrücken kann, und dieser Kreis für die drei Grundflächen derselbe ist, so geht vorstehende Proportion über, in:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \\ = \frac{3 R^2}{2} \cdot \sqrt{3} : 2 R^2 : \frac{5 R^2}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

woraus sich, wenn man, analog wie in der Erkl. 82 angegeben ist, die homologen Glieder rechts durch $R^2$ dividiert und mit 4 multipliziert, das gesuchte Verhältnis mit:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 6\sqrt{3} : 8 : 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

erhält.

---

**Aufgabe 91.** Die Volumina zweier ähnlichen Prismen sind 64 und 27 cbm, zwei homologe Kanten differieren um 2 m; wie gross sind diese?

**Erkl. 86. Definition zweier ähnlichen geraden Prismen:**

„Zwei gerade Prismen sind ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Polygone und ihre Seitenflächen ähnliche Rechtecke sind.“

**Erkl. 87.** Zwischen zwei geraden ähnlichen Prismen besteht unter anderem die Beziehung:

„Die Volumina $V$ und $V_1$ zweier ähnlichen geraden Prismen verhalten sich wie die Kuben zweier homologen Kanten $a$ und $a_1$, in Zeichen:

$$V : V_1 = a^3 : a_1^3$$

**Beweis.** Nach der Formel:

$$V = G . H \text{ (s. Erkl. 1, S. 1)}$$

besteht zwischen den Volumen $V$ und $V_1$ zweier Prismen, deren Grundflächen und Höhen, bezw. $= G$, $G_1$, $H$ und $H_1$ sind, die Proportion:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{G . H}{G_1 . H_1} \text{ oder:}$$

$$1) \quad \frac{V}{V_1} = \frac{G}{G_1} \cdot \frac{H}{H_1}$$

**Formel:**

$$V : V_1 = a^3 : a_1^3 \text{ (s. Erkl. 87).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die dem grösseren Prisma zugehörige gesuchte Kante mit $x$, so ist die homologe Kante, welche dem kleineren Prisma angehört $= x - 2$. Da die Prismen ähnlich sind, so besteht zwischen den Volumina und den zweien homologen Kanten, nach der vorstehenden Formel:

$$V : V_1 = a^3 : a_1^3 \text{ (s. Erkl. 87).}$$

die Bestimmungsgleichung:

$$64 : 27 = x^3 : (x - 2)^3$$

Zur Bestimmung der Grösse $x$ darf man nun nicht die in $(x - 2)^3$ angedeutete Kubierung ausführen, denn sonst erhält man eine unrein kubische Gleichung, sondern man verfahre wie folgt:

Aus beiden Seiten vorstehender Gleichung die 3. Wurzel ausgezogen erhält man:

Sind diese Prismen **ähnlich**, also sind die Grundflächen $G$ und $G_1$ ähnliche Polygone und die Seitenflächen ähnliche Rechtecke, so hat man nach der Erkl. 88, wenn man mit $a$ und $a_1$ zwei homologe Grundkanten bezeichnet, die Proportion:

$$2)\quad \frac{G}{G_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

ferner hat man nach der Erkl. 89, da $a$ und $H$, $a_1$ und $H_1$ die Seiten ähnlicher Rechtecke sind, die Proportion:

$$3)\quad \frac{H}{H_1} = \frac{a}{a_1}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) u. 3) folgt somit:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{a^2}{a_1^2} \cdot \frac{a}{a_1} \text{ oder:}$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{a^3}{a_1^3} \text{ was zu beweisen war.}$$

**Erkl. 88.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Die Inhalte ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten."

**Erkl. 89.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Die homologen Seiten ähnlicher Rechtecke sind proportional."

$$\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{(x-2)^3}}$$

oder:

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{x-2}$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$4(x-2) = 3x$$
$$4x - 8 = 3x$$
$$4x - 3x = 8$$
$$x = 8$$

Die gesuchte Kante des grösseren Prismas ist somit $= 8$ m und die gesuchte homologe Kante des kleineren Prismas $= x - 2 = 8 - 2$ oder $= 6$ m.

---

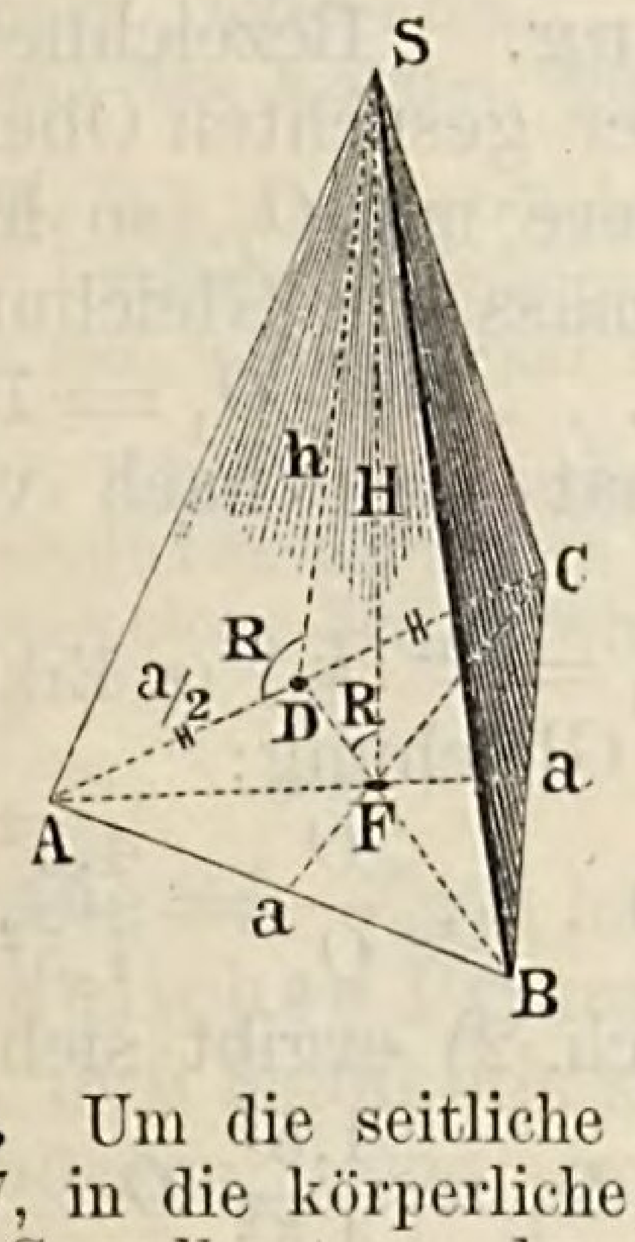
**Aufgabe 92.** Ueber einem regulären Dreieck mit der Seite $a$ sollen ein gerades Prisma und eine senkrechte Pyramide von gleicher Höhe so konstruiert werden, dass die Mantelfläche des Prismas so gross werde, als die der Pyramide. Wie gross ist die Höhe beider Körper?

**Erkl. 89 a.** Die Formel zur Berechnung des Mantels $M$ eines geraden Prismas ist, wenn der Umfang einer der Grundflächen mit $U$ und die Höhe des Prismas mit $H$ bezeichnet wird:

$$M = U \cdot H$$

Man siehe den Abschnitt im 1. Buche der Körperberechnungen, welcher über **das Prisma** handelt.

Figur 27.




**Erkl. 90.** Um die seitliche Höhe $SD = h$, siehe Fig. 27, in die körperliche Höhe $SF = H$ und in die Grundkante $a$ der Pyramide aus-

**Formeln:**

1) $M = U \cdot H$ (s. Erkl. 89 a)

2) $M = \frac{U \cdot h}{2}$ (s. Erkl. 23, Seite 10).

**Auflösung.** Bezeichnet man die Mantelfläche des gedachten Prismas mit $M$ und die der gedachten Pyramide mit $M_1$, so besteht der Aufgabe gemäss die Gleichung:

$$1) \ldots M = M_1$$

Mit Benutzung der vorstehenden Formel 1) erhält man, da $U = 3a$ und $H$ gleich der gesuchten Höhe $x$ ist, für den Mantel $M$ des Prismas:

$$2) \ldots M = 3a \cdot x$$

Mit Benutzung der vorstehenden Formel 2) erhält man, da auch hier $U = 3a$, $H = x$ und nach der Erkl. 90 die seitliche $h = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}}$ ist, für den Mantel $M_1$ der Pyramide:

$$3) \ldots M_1 = \frac{3a \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}}}{2}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) ergibt sich hiernach die Bestimmungsgleichung:

drücken zu können, beachte man, dass der Fusspunkt $F$ der Höhe $SF$ derjenige Punkt des gleichseitigen Dreiecks $ABC$ ist, in welchem sich sowohl die **drei Höhen** als auch die **drei Schwerlinien** (d. s. die Verbindungslinien der Ecken mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten, im gleichseitigen Dreieck jene Höhen selbst) schneiden.

Da nun die Dreieckshöhe

$$DB = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ (s. Erkl. 11, Seite 5)}$$

und $DF = \frac{1}{3} DB$ (s. Erkl. 91) ist, so ergibt sich hieraus, dass

$$DF = \frac{1}{3} DB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} \text{ ist.}$$

In dem bei $F$ rechtwinkligen Dreieck $DFS$ hat man somit die Relation:

$$\overline{SD}^2 = \overline{SF}^2 + \overline{DF}^2$$

oder:

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2$$

$$h^2 = H^2 + \frac{a^2}{12}$$

und schliesslich

$$h = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{12}}$$

**Erkl. 91.** Die Schwerlinien eines Dreiecks — d. s. im gleichseitigen Dreieck zugleich die Höhen — schneiden sich im Verhältnis von 1 : 2, so ist z. B. in Figur 27:

$$DF : FB = 1 : 2$$

$$\text{oder } DF = \frac{1}{3} DB$$

$$\text{und } FB = \frac{2}{3} DB$$

Man siehe das Kapitel der Planimetrie, welches über die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks handelt.

$$4) \ldots 3ax = \frac{3a \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}}}{2}$$

Diese Gleichung reduziert und nach $x$ aufgelöst erhält man der Reihe nach:

$$2x = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}}$$

$$4x^2 = x^2 + \frac{a^2}{12}$$

$$4x^2 - x^2 = \frac{a^2}{12}$$

$$3x^2 = \frac{a^2}{12}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{36}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{36}}$$

$$x = \frac{a}{6} = \frac{1}{6}a$$

Die Höhe beider Körper ist hiernach $= {}^1/_6$ der Seite $a$ des regulären Dreiecks über welchem beide Körper zu konstruieren sind.

---

**Aufgabe 93.** Die Oberflächen zweier ähnlichen Pyramiden differieren um 135 qm, zwei homologe Kanten sind 4,5 m und 1,5 m lang; wie gross sind die Oberflächen beider Pyramiden?

**Erkl. 92. Definition zweier ähnlichen geraden Pyramiden:**

„Zwei gerade Pyramiden sind **ähnlich**, wenn ihre Grundflächen ähnliche Polygone und ihre Seitenflächen ähnliche Dreiecke sind“.

**Erkl. 93.** Zwischen zwei geraden ähnlichen Pyramiden besteht unter anderem die Beziehung:

„Die Oberflächen $O$ und $O_1$ zweier ähnlichen geraden Pyramiden (wie überhaupt aller ähnlichen Polyeder) verhalten sich wie die Quadrate der homologen Kanten $k$ und $k_1$“, in Zeichen:

$$O : O_1 = k^2 : k_1^2$$

**Formel:**

$$O : O_1 = k^2 : k_1^2 \text{ (s. Erkl. 93).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die grössere der gesuchten Oberflächen mit $O$, die kleinere mit $O_1$, so hat man der Aufgabe gemäss die Gleichung:

$$1) \ldots O - O_1 = 135$$

Ferner hat man nach vorstehender Formel:

$$O : O_1 = k^2 : k_1^2 \text{ (s. Erkl. 93)}$$

die weitere Gleichung:

$$2) \ldots \frac{O}{O_1} = \frac{4,5^2}{1,5^2}$$

Aus Gleich. 2) ergibt sich:

$$O_1 = \frac{1,5^2}{4,5^2} \cdot O$$

**Beweis.** Sind $G$ und $G_1$ die Grundflächen, $M$ und $M_1$ die Mantelflächen, $k$ und $k_1$ zwei homologe Grundkanten der beiden ähnlichen Pyramiden, so hat man nach der Erkl. 88:

$$1)\quad G : G_1 = k^2 : k_1^2$$

Ferner hat man nach der Erkl. 94:

$$2)\quad M : M_1 = k^2 : k_1^2$$

Aus beiden Proportionen folgt:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{G}{G_1}\left(= \frac{k^2}{k_1^2}\right)$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 95:

$$\frac{M + G}{M_1 + G_1} = \frac{M}{M_1} = \frac{G}{G_1} \text{ und auch } = \frac{k^2}{k_1^2}$$

Da nun: $M + G = O$ und $M_1 + G_1 = O_1$ (s. Erkl. 27, Seite 11)

so hat man auch:

$$\frac{O}{O_1} = \frac{k^2}{k_1^2} \text{ was zu beweisen war.}$$

**Erkl. 94.** Bezeichnen $M$ und $M_1$ die Mantelflächen zweier geraden Pyramiden, so besteht zwischen denselben nach der Erkl. 23, Seite 10, die Relation:

$$M : M_1 = \frac{U \,.\, h}{2} : \frac{U_1 \,.\, h_1}{2} \text{ oder}$$

$$1)\quad \frac{M}{M_1} = \frac{U \,.\, h}{U_1 \,.\, h_1} = \frac{U}{U_1} \cdot \frac{h}{h_1}$$

Da nun bei ähnlichen Pyramiden die Grundflächen ähnliche Polygone und die Seitenflächen ähnliche Dreiecke sind, so hat man nach der Erkl. 96, wenn $k$ und $k_1$ zwei homologe Grundkanten bedeuten:

$$2)\quad \frac{U}{U_1} = \frac{k}{k_1}$$

Ferner hat man nach der Erkl. 97:

$$3)\quad \frac{h}{h_1} = \frac{k}{k_1}$$

Aus den Gleich. 1), 2) und 3) ergibt sich somit:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{k}{k_1} \cdot \frac{k}{k_1} = \frac{k^2}{k_1^2}$$

**Erkl. 95.** In jeder Proportion verhält sich die Summe der homologen vorderen Glieder zur Summe der homologen hinteren Glieder wie die entsprechenden Differenzen.

Man siehe das Kapitel: **Die Proportion.**

**Erkl. 96.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Die Umfänge ähnlicher Polygone verhalten sich wie ein Paar homologe Seiten.“

**Erkl. 97.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „In ähnlichen Dreiecken verhalten sich ein Paar homologe Seiten wie die zugehörigen Höhen.“

Setzt man diesen Wert für $O_1$ in Gleichung 1) ein, so erhält man:

$$O - \frac{1{,}5^2}{4{,}5^2} \cdot O = 135$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$O\left(1 - \frac{1{,}5^2}{4{,}5^2}\right) = 135$$

$$O\,\frac{4{,}5^2 - 1{,}5^2}{4{,}5^2} = 135$$

$$O = \frac{135 \,.\, 4{,}5^2}{4{,}5^2 - 1{,}5^2}$$

$$O = \frac{135 \,.\, 4{,}5^2}{(4{,}5 + 1{,}5) \,.\, (4{,}5 - 1{,}5)} = \frac{135 \,.\, 20{,}25}{6 \,.\, 3}$$

$$O = \frac{15 \,.\, 20{,}25}{2} = 151{,}875$$

Aus Gleichung 1) erhält man hiernach für $O_1$:

$O_1 = O - 135 = 151{,}875 - 135$ oder

$O_1 = 16{,}875$

Die gesuchten Oberflächen sind somit: 151,875 qm und 16,875 qm.

---

**Aufgabe 94.** Zwei homologe Kanten zweier ähnlichen Pyramiden differieren um 1,1m, ihre Kubikinh. sind 19,683 cbm und 4,096 cbm; wie gross sind jene Kanten?

**Formel:**

$$V : V_1 = k^3 : k_1^3 \text{ (s. Erkl. 98).}$$

**Erkl. 98.** Zwischen zwei geraden ähnlichen Pyramiden (s. Erkl. 92) besteht unter anderem die Beziehung:

„Die Volumina $V$ und $V_1$ zweier ähnlichen geraden Pyramiden verhalten sich wie die Kuben zweier homologen Kanten $k$ und $k_1$“ in Zeichen:

$$V : V_1 = k^3 : k_1^3$$

**Beweis.** Nach der Formel:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 28, Seite 11)}$$

besteht zwischen den Volumen $V$ und $V_1$ zweier Pyramiden, deren Grundflächen $G$ und $G_1$ und deren Höhen $H$ und $H_1$ sind, die Proportion:

$$V : V_1 = \frac{G \cdot H}{3} : \frac{G_1 \cdot H_1}{3}$$

oder:

$$1) \quad \frac{V}{V_1} = \frac{G \cdot H}{G_1 \cdot H_1} = \frac{G}{G_1} \cdot \frac{H}{H_1}$$

Sind diese Pyramiden ähnlich, also sind die Grundflächen, Seitenflächen, und in Folge dessen auch die homologen Schnittfiguren, welche man erhält, wenn man durch die Höhen und homologen Seitenkanten Ebenen gelegt denkt, ähnlich, und bedeuten schliesslich $k$ und $k_1$ zwei homologe Grund- oder Seitenkanten, so ist nach planimetrischen Sätzen:

$$2) \quad G : G_1 = k^2 : k_1^2$$

und

$$3) \quad H : H_1 = k : k_1$$

Aus den Gleich. 1), 2) u. 3) folgt aber, dass:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{k^2}{k_1^2} \cdot \frac{k}{k_1} = \frac{k^3}{k_1^3}$$ was zu beweisen war.

**Auflösung.** Bezeichnet man die grössere der gesuchten Kanten mit $x$, so ist der Aufgabe gemäss die kleinere $= x - 1{,}1$.

Nach vorstehender Formel:

$$V : V_1 = k^3 : k_1^3 \text{ (s. Erkl. 98)}$$

erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{19{,}683}{4{,}096} = \frac{x^3}{(x - 1{,}1)^3}$$

Analog der Lösung zur Aufgabe 91 erhält man hieraus:

$$\sqrt[3]{\frac{19{,}683}{4{,}096}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{(x-1{,}1)^3}}$$

oder:

$$\frac{2{,}7}{1{,}6} = \frac{x}{x - 1{,}1}$$

$$2{,}7\,(x - 1{,}1) = 1{,}6\,x$$

$$2{,}7\,x - 2{,}7 \cdot 1{,}1 = 1{,}6\,x$$

$$2{,}7\,x - 1{,}6\,x = 2{,}7 \cdot 1{,}1$$

$$1{,}1\,x = 2{,}7 \cdot 1{,}1$$

$$x = \frac{2{,}7 \cdot 1{,}1}{1{,}1}$$

$$x = 2{,}7$$

Die gesuchte Kante der grösseren Pyramide ist somit $= 2{,}7$ m und die homologe Kante der kleineren $= 2{,}7 - 1{,}1 = 1{,}6$ m.

---

**Aufgabe 95.** Ein rechteckiges Stück Pappdeckel ist $a$ m breit und $b$ m hoch. Durch Zusammenbiegen dieses Pappdeckels kann man einmal den Mantel eines Kreiscylinders von $a$ m Höhe, ein andermal den Mantel eines Kreiscylinders von $b$ m Höhe herstellen. In welchem Verhältnis stehen die Volumina jener beiden gedachten Cylinder.

**Formel:**

$$V = R^2 \pi \cdot H \text{ (s. Erkl. 33, S. 14).}$$

**Auflösung.** Durch Zusammenbiegen des rechteckigen Stück Pappdeckels von $a$ m Breite und $b$ m Höhe erhält man das 1. Mal einen Kreiscylinder, dessen Basisumfang:

$$1) \quad U = 2 R \pi = b \text{ m (s. Erkl. 39, S. 16)}$$

und dessen Höhe

$$2) \quad H = a \text{ m ist,}$$

das 2. Mal erhält man einen Kreiscylinder, dessen Basisumfang

$$3) \quad U_1 = 2 R_1 \pi = a \text{ m}$$

und dessen Höhe

$$4) \quad H_1 = b \text{ m ist.}$$

Setzt man in vorstehender Formel:

$$V = R^2 \pi \cdot H \text{ (s. Erkl. 33, S. 16)}$$

einmal $R = \frac{b}{2\pi}$ (s. Gl. 1)

und $H = a$

ein andermal $R_1 = \frac{a}{2\pi}$ (s. Gleich. 2)

und $H_1 = b$, so erhält man für die Volumina $V$ und $V_1$ der beiden gedachten Cylinder:

$$V = \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 . \pi . a = \frac{b^2}{4\pi^2} . \pi . a = \frac{b^2 a}{4\pi}$$

$$V_1 = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 . \pi . b = \frac{a^2}{4\pi^2} . \pi . b = \frac{a^2 b}{4\pi}$$

und hieraus ergibt sich für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 = \frac{b^2 a}{4\pi} : \frac{a^2 b}{4\pi}$$

oder:

$$V : V_1 = b : a$$

---

**Aufgabe 96.** Der Radius der Grundfläche eines Cylinders ist $R = 5$ m und die Höhe $H$ desselben $= 10$ m. Verkleinert man das eine Mal den Radius $R$ um eine gewisse Grösse $x$ und vermindert man ein anderes Mal die Höhe $H$ um dieselbe Grösse $x$, so sollen die Volumina der in beiden Fällen entstandenen Cylinder einander gleich sein. Welches muss jene Grösse $x$ sein?

**Erkl. 99.** Die nebenstehende Gleichung:

$$(R - x)^2 . H = R^2 . (H - x)$$

nach $x$ aufgelöst erhält man der Reihe nach:

$$(R^2 - 2Rx + x^2) . H = R^2 H - R^2 x$$
$$R^2 H - 2RHx + Hx^2 = R^2 H - R^2 x$$
$$Hx^2 - 2RHx + R^2 x = 0$$

Da $x$ ein Faktor der Gleichung ist, so hat man:

$$1) \ldots x_1 = 0$$

Dividiert man vorstehende Gleichung mit $x$, so wird:

$$Hx - 2RH + R^2 = 0$$

oder: $Hx = 2RH - R^2$

mithin:

$$x_2 = \frac{R(2H - R)}{H}$$

**Formel:**

$V = R^2 \pi . H$ (s. Erkl. 33, S. 14).

**Auflösung.** Verkleinert man das 1. Mal den Radius $R$ des gegeb. Cylinders um die Grösse $x$, so ist nach vorstehender Formel, das Volumen $V$ des somit entstandenen Cylinders:

$$1) \ldots V = (R - x)^2 . \pi . H$$

Verkleinert man das 2. Mal die Höhe $H$ des gegeb. Cylinders ebenfalls um jene Grösse $x$, so ist nach vorstehender Formel das Volumen $V_1$ des somit entstandenen Cylinders:

$$2) \ldots V_1 = R^2 . \pi . (H - x)$$

Die Grösse $x$ soll nun die Eigenschaft haben, dass die Volumina $V$ und $V_1$ der entstandenen neuen Cylinder einander gleich sind, man hat somit die Bestimmungsgleichung:

$$(R - x)^2 . \pi . H = R^2 . \pi . (H - x)$$

oder: $(R - x)^2 . H = R^2 (H - x)$

Nach der Erkl. 99 erhält man hieraus für die gesuchte Grösse $x$ zwei Werte, nämlich:

$$x_1 = 0$$

und $x_2 = \dfrac{R(2H - R)}{H}$ als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht des gegebenen Zahlenbeispiels erhält man für die gesuchte Grösse $x$:

$$x_1 = 0 \text{ m und}$$

$$x_2 = \frac{5(2 . 10 - 5)}{10} = \frac{5 . 15}{10} = \frac{75}{10} = 7{,}5 \text{ m}$$

**Aufgabe 97.** Die Oberfläche eines geraden Cylinders beträgt $O = 62,82$ qm; wird aber der Durchmesser $D$ um 2 m und die Höhe $H$ um 3 m grösser angenommen, so erhält man einen Cylinder von der dreifachen Oberfläche. Wie gross waren ursprünglich die Dimensionen?

**Erkl. 100.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ eines geraden Kreiscylinders ist, wenn $R$ den Radius der Grundfläche und $H$ die Höhe bedeutet:

$$O = 2R\pi . H + 2R^2\pi$$

oder:

$$O = 2R\pi . (H + R)$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Cylinder** handelt.

**Erkl. 101.** Wird der Durchmesser $D = 2x$ um 2 m vergrössert, so kommt auf den Halbmesser $x$ nur 1 m jener Vergrösserung.

**Erkl. 102.** Aus nebenstehenden Gleichungen:

3) $x^2 + xy = 10$

4) $x^2 + 5x + xy + y = 26$

erhält man $x$ und $y$, wie folgt: Gleich. 3) von Gleich. 4) subtrahiert gibt:

$$5x + y = 16$$

oder: 5) $y = 16 - 5x$

Diesen Wert für $y$ in Gleich. 3) substituiert, erhält man:

$$x^2 + x(16 - 5x) = 10 \text{ oder}$$
$$x^2 + 16x - 5x^2 = 10$$
$$-4x^2 + 16x = 10$$
$$x^2 - 4x = -\frac{10}{4}$$
$$x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{10}{4} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{10}{4} + \frac{16}{4}$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{\frac{6}{4}}$$
$$x = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{6} = 2 \pm \frac{1}{2} . 2,449$$
$$x = 2 \pm 1,2245$$

mithin:

$$x_1 = 3,2245$$
$$x_2 = 0,7755.$$

Setzt man diese Werte für $x_1$ und $x_2$ in vorstehende Gleich. 5) ein, so erhält man:

$$y_1 = 16 - 5 . 3,2245 = -0,1225$$
$$y_2 = 16 - 5 . 0,7755 = 12,1225$$

Da der Wert $y_1$ negativ wird, so ist der simultane Wert für $x_1$ unbrauchbar.

**Formel:**

$$O = 2R\pi . (H + R) \text{ s. Erkl. 100).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Durchmesser des Cylinders mit: $2x$, also den Radius der Grundfläche mit $x$ und die gesuchte Höhe mit $y$, so hat man mit Benutzung der Formel:

$$O = 2R\pi . (H + R) \text{ (s. Erkl. 100)}$$

vor der gedachten Vergrösserung jener Dimensionen $2x$ und $y$, die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $62,82 = 2 . x . \pi . (y + x)$

Ferner hat man nach der Vergrösserung der Dimensionen $2x$ und $y$, der Aufgabe gemäss, die weitere Bestimmungsgleich.:

2) . . $3 . 62,82 = 2 . (x + 1) . \pi . [(y + 3) + (x + 1)]$ (s. Erkl. 101)

Vorstehende Gleichung 1) reduziert erhält man der Reihe nach:

$$\frac{62,82}{2 . \pi} = x(y + x)$$
$$\frac{62,82}{2 . 3,141} = xy + x^2$$
$$x^2 + xy = \frac{62,82}{6,282} \text{ oder}$$

3) . . $x^2 + xy = 10$

Vorstehende Gleichung 2) reduziert erhält man der Reihe nach:

$$\frac{3 . 62,82}{2 . \pi} = (x + 1)\ (y + 3 + x + 1)$$
$$\frac{3 . 62,82}{2 . 3,141} = (x + 1)\ (x + y + 4)$$
$$\frac{3 . 62,82}{6,282} = x^2 + x + xy + y + 4x + 4$$
$$3 . 10 - 4 = x^2 + 5x + xy + y \text{ oder}$$

4) . . $x^2 + 5x + xy + y = 26.$

Nunmehr ergibt sich nach der Erkl. 102 aus den reduzierten und geordneten Gleichungen 3) und 4) für den gesuchten Durchm. $D = 2x = 2 . 0,7755 = 1,551$ m und für die gesuchte Höhe $H$ des ursprünglichen Cylinders $H = y = 12,123$ m (man beachte die Erkl. 102).

**Aufgabe 98.** Die Summe der Oberflächen zweier ähnlichen Cylinder beträgt 286 qm, ihre Höhen sind 10 m und 2 m; wie gross ist die Oberfläche eines jeden?

**Erkl. 103.** Definition zweier ähnlichen geraden Kreiscylinder:

„Zwei gerade Kreiscylinder sind ähnlich, wenn die Radien ihrer Grundkreise und ihre Höhen proportional sind."

**Erkl. 104.** Zwischen zwei geraden ähnlichen Kreiscylindern besteht unter anderem die Beziehung:

„Die Oberflächen $O$ und $O_1$ zweier ähnlichen geraden Kreiscylinder verhalten sich wie die Quadrate der Radien $R$ und $R_1$ (oder Durchmesser) ihrer Grundkreise, oder wie die Quadrate ihrer Höhen $H$ und $H_1$, in Zeichen:

$$O : O_1 = R^2 : R_1^2 \; (= D^2 : D_1^2)$$

oder: $$O : O_1 = H^2 : H_1^2$$

**Beweis.** Sind $G$ und $G_1$ die Grundflächen, $M$ und $M_1$ die Mantelflächen, $R$ und $R_1$ die Radien jener Grundflächen, $H$ und $H_1$ die Höhen der Mantelflächen der beiden ähnlichen Cylinder, so ist:

1) $R : R_1 = H : H_1$ (s. Erkl. 103)

2) $G : G_1 = R^2 : R_1^2 = H^2 : H_1^2$ (siehe Erklärung 105 und Gleich. 1).)

oder:

3) $2G : 2G_1 = R^2 : R_1^2 = H^2 : H_1^2$

4) $M : M_1 = R \,.\, H : R_1 \,.\, H_1$ (s. Erkl. 106).)

oder:

5) $M : M_1 = R^2 : R_1^2 = H^2 : H_1^2$ (siehe Erklärung 106 und Gleich. 1).)

Aus den Proportionen 3) und 5) folgt:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{2G}{2G_1} \left( = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{H^2}{H_1^2} \right)$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 95, S. 47:

$$\frac{M + 2G}{M_1 + 2G_1} = \frac{M}{M_1} = \frac{2G}{2G_1} = \frac{G}{G_1} \text{ oder auch } = \frac{R^2}{R_1^2} \text{ und } = \frac{H^2}{H_1^2}$$

Da nun die Oberfläche $O$ eines Cylinders = dem Mantel $M$ + der doppelten Grundfläche $G$ ist, so kann man:

$$\left.\begin{aligned} M + 2G &= O \\ \text{und } M_1 + 2G_1 &= O_1 \end{aligned}\right\} \text{ setzen und man erhält}$$

$$\frac{O}{O_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{H^2}{H_1^2} \text{ was zu beweisen war.}$$

**Erkl. 105.** Die Inhalte $J$ und $J_1$ zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien $r$ und $r_1$ denn aus:

$J : J_1 = r^2\pi : r_1^2\pi$ (s. Erkl. 57, S. 26), folgt:

$J : J_1 = r^2 : r_1^2$ .

**Erkl. 106.** Die Mantelflächen zweier Cylinder verhalten sich wie die Produkte aus den Radien ihrer Grundflächen und Höhen.

Man hat:

$M : M_1 = 2R\pi H : 2R_1\pi H_1$ (s. Erkl. 47, S. 20)

und hieraus ergibt sich:

1) $M : M_1 = RH : R_1 H_1$

**Formel:**

$$O : O_1 = H^2 : H_1^2 \;(\text{oder } = R^2 : R_1^2)$$

(s. Erkl. 104).

**Auflösung.** Bezeichnet man die grössere der gesuchten Oberflächen der ähnlichen Cylinder mit $O$ und die kleinere mit $O_1$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formel:

$$O : O_1 = H^2 : H_1^2 \text{ (s. Erkl. 104)}$$

die zwei Bestimmungsgleichungen:

1) . . . $O + O_1 = 286$

2) . . . $O : O_1 = 10^2 : 2^2$

Aus Gleich. 2) erhält man:

$$O = \frac{100}{4} \cdot O_1$$

oder:

3) . . . $O = 25\,O_1$

Diesen Wert für $O$ in Gleichung 1) substituiert erhält man:

$$25\,O_1 + O_1 = 286$$

oder:

$$26\,O_1 = 286$$

$$O_1 = \frac{286}{26}$$

mithin

$$O_1 = 11$$

In Rücksicht dieses für $O_1$ gefundenen Wertes erhält man aus der Gleichung 1) oder aus der Gleich. 3)

$$O = 25 \,.\, 11 = 275$$

Die gesuchten Oberflächen $O$ und $O_1$ sind somit, bezw. = 275 qm u. = 11 qm

Schreibt man diese Proportion in der Form:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{H}{H_1}$$

und berücksichtigt, dass bei ähnlichen Cylindern $R : R_1 = H : H_1$ ist, so erhält man hieraus für ähnliche Cylinder die Proportion:

$$2)\quad M : M_1 = R^2 : R_1^2 = H^2 : H_1^2$$

**Aufgabe 99.** Ein gerader Kegel, dessen Grundfläche in der Mantelfläche 4 mal enthalten ist, ist gegeben. Dieser Kegel wird in einen andern Kegel verwandelt, dessen Oberfläche doppelt so gross ist als die des ersten; wie oft ist die Grundfläche des letzteren in seiner Mantelfläche enthalten?

**Erkl. 107.** Die Formel für die Oberfläche $O$ eines geraden Kreiskegels, dessen Seitenlinie mit $s$ und dessen Grundflächenradius mit $R$ bezeichnet wird, ist:

$$O = \pi R s + R^2 \pi$$

oder:

$$O = \pi R (s + R)$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Kegel** handelt.

**Erkl. 108.** Aus nebenstehenden Gleichungen:

$$2)\quad s = 4r$$
$$3)\quad r^2 h = R^2 H$$
$$4)\quad RS + R^2 = 2(rs + r^2)$$
$$5)\quad H = \sqrt{S^2 - R^2}$$
$$6)\quad h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

kann man $S$ in $R$, wie folgt ausdrücken: Setzt man den Wert für $s$ aus Gleich. 2) in Gleich. 4) und 6), so resultieren die Gleichungen:

$$3)\quad r^2 h = R^2 H$$
$$7)\quad RS + R^2 = 10 r^2$$
$$5)\quad H = \sqrt{S^2 - R^2}$$
$$6)\quad h = r\sqrt{15}$$

Setzt man nunmehr die Werte für $H$ und $h$ aus den Gleich. 5) und 6) in Gleich. 3) so resultieren die Gleichungen:

$$8)\quad r^3 \sqrt{15} = R^2 \sqrt{S^2 - R^2}$$
$$7)\quad RS + R^2 = 10 r^2$$

Setzt man den sich aus Gleich. 8) für $r$ ergebenden Wert:

$$r = \sqrt[3]{\frac{R^2 \sqrt{S^2 - R^2}}{\sqrt{15}}}$$

in Gleich. 7 ein, so erhält man:

$$9)\quad RS + R^2 = 10 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{R^2 \sqrt{S^2 - R^2}}{\sqrt{15}}}\right)^2$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

**Formeln:**

1) $M = \pi R s$ (s. Erkl. 49, S. 22)

2) $V = \frac{R^2 \pi \cdot H}{3}$ (s. Erkl. 50, S. 23)

3) $O = \pi R s + R^2 \pi$ (s. Erkl. 107)

4) $J = r^2 \pi$ (s. Erkl. 57, S. 26).

**Auflösung.** Ist die Grundfläche des neuen Kegels, dessen Grundflächen-Radius $= R$, dessen Seitenlinie $= S$ und dessen Höhe $= H$ sei, $x$ mal in seiner Mantelfläche enthalten, so hat man unter Benutzung vorstehender Formeln 1) und 4) die Gleichung:

$$x = \frac{\pi R S}{R^2 \pi}$$

oder:

$$1) \ldots x = \frac{S}{R}$$

Um hieraus $x$ berechnen zu können, muss $S$ in $R$ oder $R$ in $S$ ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke verfahre man wie folgt: Bezeichnet man den Grundflächen-Radius des gegeb. Kegels mit $r$, dessen Seitenlinie mit $s$ und dessen Höhe mit $h$, so besteht der Aufgabe gemäss zwischen dem Mantel und der Grundfläche desselben, die Beziehung:

$$\pi r s = 4 \cdot r^2 \pi \text{ oder:}$$

$$2) \ldots s = 4r$$

In Folge der Verwandlung des gegeb. Kegels in einen andern müssen die Volumina beider Kegel dieselben sein; man hat also mit Benutzung vorsteh. Formel 2) die Gleichung:

$$\frac{r^2 \pi \cdot h}{3} = \frac{R^2 \pi H}{3} \text{ oder}$$

$$3) \ldots r^2 h = R^2 H$$

Ferner besteht der Aufgabe gemäss zwischen den Oberflächen der beiden Kegel, mit Benutzung vorsteh. Formel 3) die Beziehung:

$$\pi R S + R^2 \pi = 2(\pi r s + r^2 \pi) \text{ oder:}$$

$$4) \ldots RS + R^2 = 2(rs + r^2)$$

Und schliesslich hat man noch zwischen der Seitenlinie $S(s)$, der Höhe $H(h)$ und dem Grundflächen-Radius $R(r)$ eines geraden Kreiskegels, nach dem pythagoräischen Lehrsatz, die Gleichung:

$$5) \ldots H = \sqrt{S^2 - R^2}, \text{ bezw.}$$

$$6) \ldots h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$R(S+R) = 10\sqrt[3]{\frac{R^4(S^2-R^2)}{15}}$$

$$R(S+R) = 10R\sqrt[3]{\frac{R(S^2-R^2)}{15}}$$

$$S+R = 10\sqrt[3]{\frac{R(S^2-R^2)}{15}}$$

$$(S+R)^3 = 1000 \cdot \frac{R(S^2-R^2)}{15}$$

$$(S+R)^2 \,.\, (S+R) = 1000 \cdot \frac{R(S+R)\,(S-R)}{15}$$

$$(S+R)^2 = 1000 \cdot \frac{R(S-R)}{15}$$

$$S^2 + 2RS + R^2 = \frac{200}{3}RS - \frac{200}{3}R$$

$$S^2 - \frac{194}{3}RS = -\frac{203}{3}R^2$$

$$S^2 - \frac{194}{3}RS + \left(\frac{194}{2.3}R\right)^2 = -\frac{203}{3}R^2 + \left(\frac{194}{2.3}R\right)^2$$

$$\left(S - \frac{97}{3}R\right)^2 = -\frac{203}{3}R^2 + \left(\frac{97}{3}R\right)^2$$

$$S - \frac{97}{3}R = \pm\sqrt{-\frac{203}{3}R^2 + \frac{9409}{9}R^2}$$

$$S = \frac{97}{3}R \pm \sqrt{\frac{8800}{9}R^2}$$

$$S = \frac{97}{3}R \pm \frac{20}{3}R\sqrt{22}$$

$$S = \frac{97 \pm 20\sqrt{22}}{3} \cdot R$$

Mittelst den Gleichungen 2) bis 6) kann man $S$ in $R$ ausdrücken. Nach der Erkl. 108 erhält man:

$$S = \frac{97 \pm 20\sqrt{22}}{3} \cdot R$$

Setzt man diesen Wert für $S$ in vorstehende Gleich. 1), so ergibt sich:

$$x = \frac{\frac{97 \pm 20\sqrt{22}}{3} \cdot R}{R}$$

oder:

$$x = \frac{97 \pm 20\sqrt{22}}{3}$$

Die Grundfläche des neuen Kegels ist somit: $\frac{97 \pm 20\sqrt{22}}{3}$ mal, also ungefähr $= 63{,}6$ mal oder $= 1{,}06$ mal, in der Mantelfläche desselben enthalten.

Dem sich hiermit ergebenden Resultat zur Folge, kann der gegeb. Kegel in **zwei** verschiedene Kegel verwandelt werden, die den übrigen Bedingungen der Aufgabe genügen.

---

**Aufgabe 100.** Ueber einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 200$ dm soll ein gerades Prisma, und über dem um das Dreieck beschriebenen Kreis soll ein gerader Kegel von gleicher Höhe so konstruiert werden, dass die Summe der Seitenflächen des Prismas $n = {}^1/_3$ mal so gross wird als die Mantelfläche des Kegels. Wie gross wird die gemeinschaftliche Höhe beider Körper sein?

**Erkl. 109.** Zwischen dem Radius $R$ des einem gleichseitigen Dreiecks umschriebenen Kreises und der Seite $a$ dieses Dreiecks besteht die Relation:

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Man beachte die Erkl. 91, S. 46.

**Erkl. 110.** Zwischen der Höhe $H$, der Seitenlinie $s$ und dem Radius $R$ des Grundkreises eines geraden Kegels besteht die Relation:

**Formeln:**

Für ein Prisma:

1) $M = U \,.\, H$ (s. Erkl. 89, S. 45)

Für einen Kegel:

2) $M = \pi R s$ (s. Erkl. 49, S. 22)

**Auflösung.** Der Aufgabe gemäss besteht zwischen dem Mantel $M$ des Prismas und dem Mantel $M_1$ des Kegels, die Beziehung:

1) . . . $M = n \,.\, M_1$

Bezeichnet man die gesuchte Höhe des Prismas, also auch die des Kegels mit $x$ und setzt man in vorstehende Formel 1) $U = 3a$, so ist:

2) . . . $M = 3a \,.\, x$

Setzt man ferner in vorst. Formel 2) für den Radius $R$ des Kegelgrundkreises, nach der Erkl. 109:

$$s^2 = H^2 + R^2$$

und hieraus erhält man:

$$s = \sqrt{H^2 + R^2}$$

**Erkl. 111.** Aus nebenstehender Gleichung 4):

$$3x = \frac{n\pi}{3} \cdot \sqrt{3\left(x^2 + \frac{a^2}{3}\right)}$$

erhält man $x$, wie folgt:

$$9x^2 = \frac{n^2\pi^2}{9} \cdot 3\left(x^2 + \frac{a^2}{3}\right)$$

$$9x^2 - \frac{n^2\pi^2}{3} x^2 = \frac{n^2\pi^2 a^2}{9}$$

$$x^2\left(9 - \frac{n^2\pi^2}{3}\right) = \frac{n^2\pi^2 a^2}{9}$$

$$x^2 = \frac{n^2\pi^2 a^2}{9} : \frac{27 - n^2\pi^2}{3}$$

$$x^2 = \frac{n^2\pi^2 a^2 \cdot 3}{9(27 - n^2\pi^2)}$$

$$x = \sqrt{\frac{n^2\pi^2 a^2}{3(27 - n^2\pi^2)}}$$

$$x = n\pi a \sqrt{\frac{1}{81 - 3n^2\pi^2}}$$

$$x = n\pi a \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{81 - 3n^2\pi^2}} = \frac{n\pi a}{\sqrt{81 - 3n^2\pi^2}}$$

a) . . . $R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

und nach der Erkl. 110 für die Seitenlinie:

$$s = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{x^2 + R^2}$$

bezw. nach vorsteh. Gleich. a):

b) . . . $s = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} =$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}$$

so erhält man für den Mantel $M_1$ des Kegels:

3) . . . $M_1 = \pi \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}$

Aus den Gleich. 1), 2) und 3) ergibt sich somit die Bestimmungsgleichung:

$$3ax = n \cdot \pi \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}$$

oder:

4) . . . $3x = \frac{n\pi}{3} \cdot \sqrt{3\left(x^2 + \frac{a^2}{3}\right)}$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 111 für die gesuchte Höhe $x$:

$$x = \frac{n\pi a}{\sqrt{81 - 3n^2\pi^2}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man:

$$x = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3{,}141 \cdot 20}{\sqrt{81 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3{,}141^2}} = \frac{1{,}047 \cdot 20}{\sqrt{81 - \frac{1}{3} \cdot 3{,}141^2}}$$

oder $x = 2{,}34$ dm

---

**Aufgabe 101.** Wie verhält sich der Kubikinhalt eines gleichseitigen Cylinders zu dem eines gleichseitigen Kegels, wenn die Oberflächen beider Körper einander gleich sind?

**Erkl. 112.** Ein **gleichseitiger gerader Cylinder** ist ein solcher, in welchem der Axenschnitt ein Quadrat, also die Höhe gleich dem Durchmesser ($2R$) der Grundfläche ist.

**Erkl. 113.** Ein **gleichseitiger** Kegel ist ein solcher, in welchem der Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck, also die Seitenlinie $s$ gleich dem Durchmesser ($2R$) der Grundfläche ist.

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

1) $O = 2R\pi(H + R)$ (s. Erkl. 100, S. 50)

2) $V = R^2\pi H$ („ „ 33, „ 14)

Für einen Kegel:

3) $O = \pi R(s + R)$ („ „ 107, „ 52)

4) $V = \frac{R^2\pi H}{3}$ („ „ 50, „ 23).

**Auflösung.** Bezeichnet $V$ das Volumen des Cylinders, $R$ den Radius des Grundkreises, $H$ die Höhe und $O$ die Oberfläche desselben; bezeichnet ferner $V_1$ das Volumen des Kegels, $R_1$ den Radius des Grundkreises, $s$ die Seitenlinien und $O_1$ die Oberfläche desselben,

Die Höhe $H$ eines gleichseitigen Kegels ist somit und nach der Erkl. 11, S. 5

$$= \frac{2R}{2} \sqrt{3} = R\sqrt{3}$$

**Erkl. 114.** Setzt man in den nebenstehenden Gleichungen:

1) $V : V_1 = 3R^2H : R_1^2H_1$
2) $2R(H+R) = R_1(s+R_1)$

für: $H = 2R$
„ $s = 2R_1$ und
„ $H_1 = R_1\sqrt{3}$

so gehen dieselben über in:

a) $V : V_1 = 3R^2 . 2R : R_1^2 . R_1 \sqrt{3}$ und
b) $2R(2R+R) = R_1(2R_1+R_1)$

oder in:

c) $V : V_1 = 6R^3 : R_1^3 \sqrt{3}$
d) $6R^2 = 3R_1^2$

**Erkl. 115.** Die nebenstehende Gleichung:

$$V : V_1 = 6R^3 : (R\sqrt{2})^3 . \sqrt{3}$$

geht durch Reduktion über in:

$$V : V_1 = 6R^3 : R^3 . \sqrt{2^3} . \sqrt{3}$$
$$V : V_1 = 6 : \sqrt{2^2 . 2} . \sqrt{3}$$
$$V : V_1 = 6 : 2\sqrt{2} . \sqrt{3}$$
$$V : V_1 = 3 : \sqrt{6}$$

so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln, im allgemeinen die Gleichungen:

$$V : V_1 = R^2\pi H : \frac{R_1^2\pi H_1}{3} \text{ und}$$
$$2R\pi(H+R) = \pi R_1(s+R_1)$$

bezw. die Gleichungen:

1) . . . $V : V_1 = 3R^2H : R_1^2 H_1$
2) . . . $2R(H+R) = R_1(s+R_1)$

Da nun der Cylinder ein gleichseitiger ist, so kann man nach der Erkl. 112:

$$H = 2R$$

nach der Erkl. 113

$$s = 2R_1 \text{ und}$$
$$H_1 = R_1\sqrt{3} \text{ setzen.}$$

Vorstehende Gleichungen gehen somit über, in:

3) . . . $V : V_1 = 6R^3 : R_1^3\sqrt{3}$ (s. Erkl. 114)
4) . . . $6R^2 = 3R_1^2$

Setzt man den sich aus Gleich. 4) für $R_1$ ergebenden Wert:

$$R_1 = R\sqrt{2}$$

in Gleich. 3) ein, so erhält man:

$$V : V_1 = 6R^3 : (R\sqrt{2})^3 . \sqrt{3}$$

oder nach Erkl. 115:

$$V : V_1 = 3 : \sqrt{6}$$

Das gesuchte Verhältnis der Kubikinhalte ist somit

$$= 3 : \sqrt{6} \text{ oder}$$
$$= 1 : \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

---

**Aufgabe 102.** Ein gleichseitiger Kegel hat denselben Kubikinhalt wie ein gerader gleichseitiger Cylinder. Die Oberfläche des Cylinders beträgt aber um 15 qm weniger als die des Kegels. Wie gross ist der Radius der Basis des Kegels und wie gross der des Cylinders?

**Formeln:**

Für den Kegel:

1) $V = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$ (s. Erkl. 116)
2) $O = 3\pi R^2$ („ „ 117)

Für den Cylinder:

3) $V = 2\pi R^3$ („ „ 118)
4) $O = 6\pi R^2$ („ „ 119)

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Radius der Basis des Kegels mit $x$, den des Cylinders mit $y$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln die zwei Bestimmungsgleichungen:

1) . . . $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{3} = 2\pi y^3$
2) . . . $6\pi y^2 = 3\pi x^2 - 15$

**Erkl. 116.** Setzt man in der allgemeinen Kubikinhaltsformel eines Kegels:

$$V = \frac{R^2\pi H}{3} \text{ (s. Erkl. 50, S. 23)}$$
$$H = R\sqrt{3} \text{ (s. Erkl. 113).}$$

so erhält man die Kubikinhaltsformel eines **gleichseitigen Kegels:**

$$V = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$$

**Erkl. 117.** Setzt man in der allgemeinen Oberflächeninhaltsformel eines Kegels:

$O = \pi R (s + R)$ (s. Erkl. 107, S. 52)
$s = 2R$ (s. Erkl. 113)

so erhält man die Oberflächeninhaltsformel eines **gleichseitigen Kegels:**

$$O = 3\pi R^2$$

**Erkl. 118.** Setzt man in der allgemeinen Kubikinhaltsformel eines Cylinders:

$V = R^2 \pi H$ (s. Erkl. 33, S. 14)
$H = 2R$ (s. Erkl. 112),

so erhält man die Kubikinhaltsformel eines **gleichseitigen Cylinders:**

$$V = 2\pi R^3$$

**Erkl. 119.** Setzt man in der allgemeinen Oberflächeninhaltsformel eines Cylinders:

$O = 2R\pi (H + R)$ (s. Erkl. 100, S 50)
$H = 2R$

so erhält man die Oberflächeninhaltsformel eines **gleichseitigen Cylinders:**

$$O = 6\pi R^2$$

**Hülfsrechnung.**

$$\log \sqrt{\frac{5}{3{,}141 \cdot 0{,}289}} = \frac{1}{2} \cdot [\log 5 - (\log 3{,}141 + \log 0{,}289)]$$

Nun ist:

$$\begin{array}{lrr} & (+1) & (-1) \\ \log 5 = & 0{,}6989700 & \\ -(\log 3{,}141 + \log 0{,}289) = & & \\ -(0{,}4971499 + 0{,}4608978 - 1) = & \pm 0{,}9580477 & \mp 1 \\ \hline & 0{,}7409223 & \\ & \cdot \frac{1}{2} & \\ \hline & 0{,}3704611 & \\ & 4576 & \end{array}$$

mithin ist:

$$\sqrt{\frac{5}{3{,}141 \cdot 0{,}289}} = 2{,}3467$$

Diese beiden Gleichungen reduziert und geordnet ergeben:

3) . . . $x^3 \sqrt{3} - 6y^3 = 0$

4) . . . $x^2 - 2y^2 = \frac{15}{3\pi} = \frac{5}{\pi}$

Setzt man den aus Gleich. 3) für $x$ sich ergebenden Wert:

$$x = \sqrt[3]{\frac{6y^3}{\sqrt{3}}}$$

in Gleich. 4) ein, so erhält man:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{6y^3}{\sqrt{3}}}\right)^2 - 2y^2 = \frac{5}{\pi}$$

oder:

$$\sqrt[3]{\frac{36y^6}{3}} - 2y^2 = \frac{5}{\pi}$$

$$y^2 \sqrt[3]{12} - 2y^2 = \frac{5}{\pi}$$

$$y^2\left(\sqrt[3]{12} - 2\right) = \frac{5}{\pi}$$

mithin:

$$y = \sqrt[2]{\frac{5}{\pi\left(\sqrt[3]{12} - 2\right)}}$$

$$= \sqrt[2]{\frac{5}{\pi (2{,}289 - 2)}}$$

$$= \sqrt[2]{\frac{5}{3{,}141 \cdot 0{,}289}}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$y = 2{,}3467$$

Setzt man den für $y$ gefundenen Wert in vorstehende Gleich. 4) ein, so erhält man: $x = 3{,}550$

Der Radius $x$ der Basis des Kegels ist somit $= 3{,}55$ m und der Radius $y$ der Basis des Cylinders $= 2{,}3467$ m

---

**Aufgabe 103.** Der Mantel eines geraden Kegels ist $M = 425{,}2576$ qm, die Höhe $H = 15$ m; wie gross ist der Mantel eines geraden Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe?

**Erkl. 120.** Nebenstehende Gleichung 2):

$$M = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$$

nach $R$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$M^2 = \pi^2 R^2 (H^2 + R^2)$$

$$\frac{M^2}{\pi^2} = R^2 H^2 + R^4$$

Setzt man nunmehr: $R^2 = z$
also: $R^4 = z^2$

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

1) $M = 2\pi R H$ (s. Erkl. 47, S. 20)

Für einen Kegel:

2) $M = \pi R s$ („ „ 49, „ 22)

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Mantelfläche $x$ des Cylinders hat man nach vorsteh. Formel 1), die Gleichung:

1) . . . $x = 2\pi \cdot R \cdot H$

In dieser Gleichung ist, der Aufgabe nach, $H$ eine bekannte Grösse; hingegen

so erhält man die unrein quadratische Gleichung:

$$z^2 + H^2 z = \frac{M^2}{\pi^2}$$

und hieraus ergibt sich:

$$z^2 + H^2 z + \left(\frac{H^2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{\pi^2} + \left(\frac{H^2}{2}\right)^2$$

$$\left(z + \frac{H^2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{\pi^2} + \frac{H^4}{4}$$

$$z + \frac{H^2}{2} = \pm\sqrt{\frac{4 M^2 H^4}{4\pi^2 . H^4} + \frac{H^4}{4}}$$

$$z = -\frac{H^2}{2} \pm \sqrt{\frac{H^4}{4}\left(\frac{4 M^2}{\pi^2 H^4} + 1\right)}$$

$$z = -\frac{H^2}{2} \pm \frac{H^2}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{2 M}{\pi H^2}\right)^2}$$

Da nun:

$$R^2 = z, \text{ also } R = \sqrt{z} \text{ ist,}$$

so erhält man, wenn man zugleich berücksichtigt, dass die negativen Vorzeichen der Wurzeln für die Aufgabe keinen Sinn zulassen:

$$R = \sqrt{-\frac{H^2}{2} + \frac{H^2}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{2 M}{\pi H^2}\right)^2}}$$

$$R = \sqrt{H^2 . \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 M}{\pi H^2}\right)^2}\right]}$$

$$R = H\sqrt{\frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 M}{\pi H^2}\right)^2}\right]}$$

muss die Grösse $R$ noch in die übrigen gegebenen Stücke ausgedrückt werden und das geschieht, wie folgt:

Der Aufgabe gemäss sind die Grundkreise beider Körper inhaltsgleich, mithin ist auch der Radius $R$ der Grundfläche des Cylinders = dem Radius der Grundfläche des Kegels. Da nun der Mantel $M$ des Kegels gegeben und die Seitenlinie $s$ nach der Erkl. 110, Seite 53, $= \sqrt{H^2 + R^2}$ ist, so hat man unter Benutzung der vorstehenden Formel 2) zur Berechnung der Grösse $R$ die weitere Gleichung:

$$2) \ldots M = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$$

aus welcher man nach der Erkl. 120

$$3) . R = H . \sqrt{\frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2M}{\pi H^2}\right)^2}\right]}$$

erhält.

Substituiert man endlich diesen Wert für $R$ in vorsteh. Gleichung 1), so erhält man für die gesuchte Mantelfläche $x$:

$$x = 2\pi H^2 . \sqrt{\frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2M}{\pi H^2}\right)^2}\right]}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Setzt man hierin die für $H$ und $M$ gegebenen Zahlenwerte ein und berechnet zunächst $\left(\frac{2M}{\pi H^2}\right)^2$ mittelst Logarithmen, so erhält man schliesslich für das gegebene Zahlenbeispiel

$$x = 751{,}0913 \text{ qm}$$

---

**Aufgabe 104.** Aus einem achteckigen Stück Pappdeckel, dessen Seiten $a$ und $b$ sich wie 8 : 3 verhalten, wird ein Sektor geschnitten, dessen Radius gleich der Seite $b$, dessen Mittelpunkt der Halbierungspunkt der anderen Seite $a$ ist und dessen Bogen in den Rändern des Pappdeckels endigt. Wie verhalten sich die Volumina des geraden Kegels und der geraden Cylinder zu einander, deren Mäntel bezw. aus jenem Sektor und dem vollständigen Stück Pappdeckel gebildet werden können?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

$$\text{I}). \; V = \frac{R^2 \pi . H}{3} \text{ (s. Erkl. 50, S. 23)}$$

Für einen Cylinder:

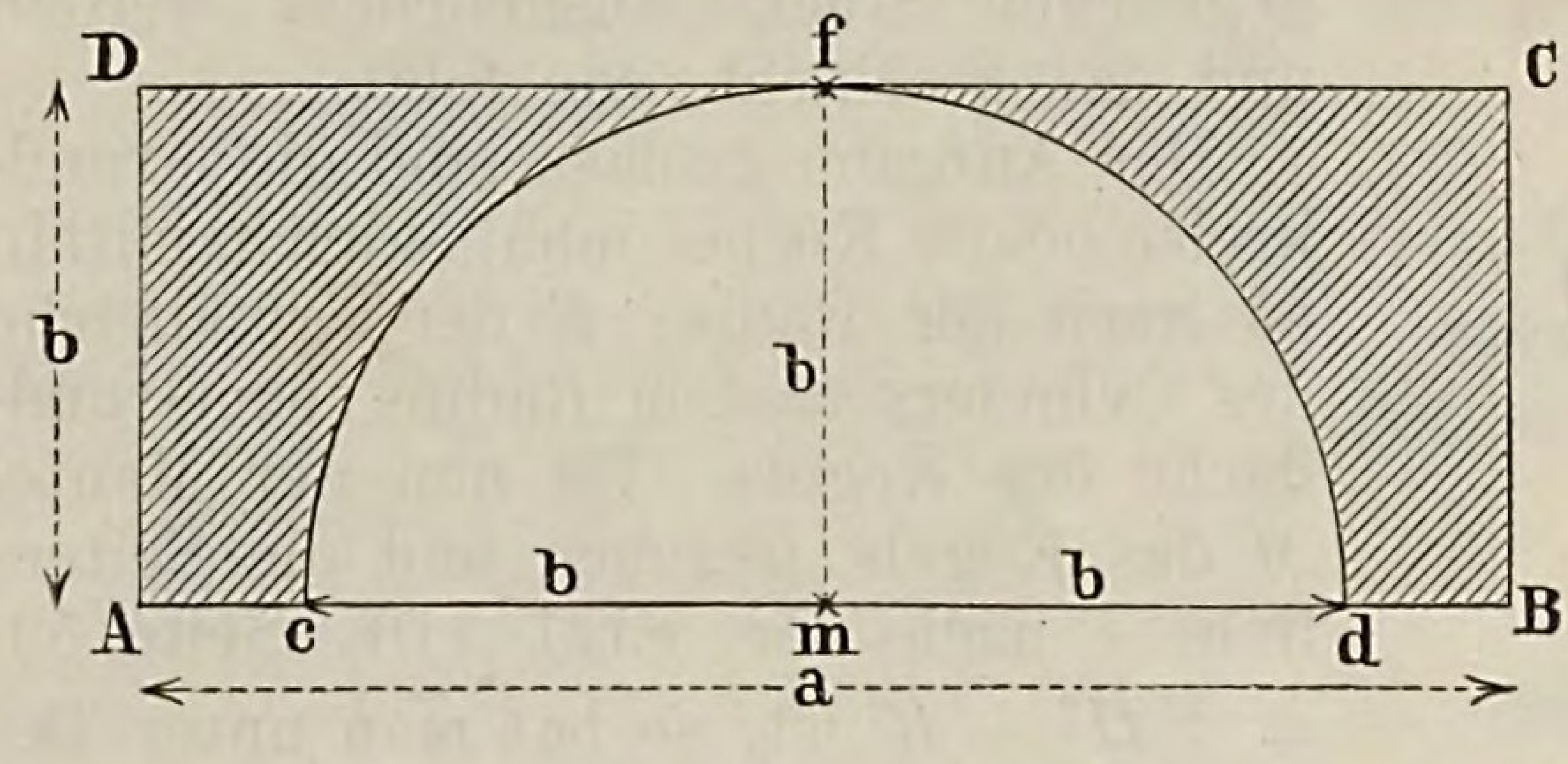
$$\text{II}). \; V = R^2 \pi . H \text{ (s. Erkl. 33, S. 14)}$$

**Auflösung.** Analog wie in der Aufgabe 95, Seite 48, erhält man für die Volumina $V_1$ und $V_2$ der beiden gedachten Cylinder:

$$1) \ldots V_1 = \frac{ab^2}{4\pi} \text{ und}$$

$$2) \ldots V_2 = \frac{a^2 b}{4\pi}$$

Figur 28.




Das Volumen $V$ des gedachten Kegels findet man mit Benutzung vorstehender Formel, wenn man die darin vorkommenden Grössen $R$ und $H$ mittelst folgender Betrachtung bestimmt und deren Werte in diese Formel substituiert. Da die Seite $b$ des gegeb. Rechtecks $ABCD$, siehe Figur 28, wie aus dem in der Aufgabe gegebenen Verhältnis ersichtlich, kleiner als die Hälfte der Seite $a$ ist, so fallen die Schenkel $mc$ und $md$ des mit der Seite $b$ als Radius konstruierten Sektors $cdf$ in die Gerade $AB$ und der erhaltene Sektor ist ein Halbkreis mit dem Radius $b$. Für die Länge des Halbkreises $cfd$, d. i. der Umfang $U = 2R\pi$ der Grundfläche des gedachten Kegels hat man nach der Erkl. 39, S. 16:

$$cfd = \frac{2b\pi}{2} = b\pi$$

somit ist auch:

$$2R\pi = b\pi$$

und hieraus ergibt sich für den Radius $R$ der Kegelgrundfläche:

$$\text{a)} \ldots R = \frac{b}{2}$$

Da ferner die Seitenlinie $s$ des Kegels $= b$ ist, so hat man nach der Erkl. 110, Seite 53, für die Höhe $H$ des Kegels:

$$H^2 = s^2 - R^2$$

bezw.

$$H^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3}{4}b^2$$

woraus sich

$$\text{b)} \ldots H = \frac{b}{2}\sqrt{3} \text{ ergibt.}$$

Setzt man die für $R$ und $H$ gefundenen Werte in vorsteh. Formel II) ein, so erhält man:

$$V = \left(\frac{b}{2}\right)^2 . \pi . \frac{b}{2}\sqrt{3} : 3$$

oder:

$$3) \ldots V = \frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{24}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man also:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{24} : \frac{ab^2}{4\pi} : \frac{a^2 b}{4\pi}$$

**Erkl. 121.** Die nebenstehende laufende Proportion:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{24} : \frac{8b^3}{3 . 4 . \pi} : \frac{64 b^3}{4 . 9 . \pi}$$

kann man mit Hülfe der Erkl. 82, Seite 44, wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} V : V_1 : V_2 &= \frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{24} : \frac{2b^3}{3\pi} : \frac{16 b^3}{9\pi} \\ &= \frac{\pi \sqrt{3}}{24} : \frac{2}{3\pi} : \frac{16}{9\pi} \\ &= 3\pi^2 \sqrt{3} : 48 : 128 \\ &= 51{,}2626 : 48 : 128 \\ &= 25{,}6313 : 24 : 64 \end{aligned}$$

Da nun:

$$a : b = 8 : 3 \text{ ist,}$$

so kann man hiernach:

$$a = \frac{8}{3} b$$

setzen und vorstehende laufende Proportion geht über, in:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{24} : \frac{8 b^3}{3 . 4\pi} : \frac{64 b^3}{9 . 4\pi}$$

Durch Vereinfachen dieser Proportion erhält man nach der Erkl. 121 für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 : V_2 = 3\pi^2 \sqrt{3} : 48 : 128$$
$$= 25{,}6313 : 24 : 64$$

---

**Aufgabe 105.** Die Durchmesser der Grundflächen zweier ähnlichen Kegel sind 1,5 m und 2 m lang, der Kubikinhalt des kleineren beträgt 13,5 cbm; wie gross ist der des anderen?

**Erkl. 122. Definition zweier ähnlichen geraden Kreiskegel:**

„Zwei gerade Kreiskegel sind **ähnlich**, wenn die Radien (Durchmesser) ihrer Grundflächen proportional sind ihren Höhen oder Seitenlinien."

**Erkl. 123.** Zwischen zwei geraden ähnlichen Kreiskegeln besteht unter anderem die Beziehung:

Die Volumina $V$ und $V_1$ zweier ähnlichen Kegel verhalten sich wie die 3. Potenzen der Radien (Durchmesser) ihrer Grundflächen, oder wie die 3. Potenzen ihrer Höhen oder Seitenlinien, in Zeichen:

$$V : V_1 = R^3 : R_1^3 = D^3 : D_1^3 = H^3 : H_1^3 = s^3 : s_1^3$$

**Beweis.** Sind $R$ und $R_1$ die Radien der Grundflächen, $H$ und $H_1$ die Höhen, $V$ und $V_1$ die Volumina zweier Kegel, so hat man nach der Formel:

$$V = \frac{R^2 \pi H}{3} \text{ (s. Erkl. 50, S. 23)}$$

die Proportion:

$$V : V_1 = \frac{R^2 \pi H}{3} : \frac{R_1^2 \pi . H}{3} \text{ oder:}$$

$$V : V_1 = R^2 H : R_1^2 . H_1^2$$

$$1) \quad \frac{V}{V_1} = \frac{R^2}{R_1^2} \cdot \frac{H}{H_1}$$

Da nun nach der Erkl. 122 bei ähnlichen Kegeln:

$$R : R_1 = H : H_1 \; (= D : D_1 = s : s_1) \text{ ist,}$$

so erhält man aus Gleich. 1):

$$2) \quad V : V_1 = R^3 : R_1^3 \; (= D^3 : D_1^3 = H^3 : H_1^3 = s^3 : s_1^3)$$

was zu beweisen war.

**Formel:**

$$V : V_1 = D^3 : D_1^3 \; (= R^3 : R_1^3 = H^3 : H_1^3 = s^3 : s_1^3) \text{ (s. Erkl. 123).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Kubikinhalt des grösseren Kegels mit $x$, so hat man nach vorstehender Formel:

$$V : V_1 = D^3 : D_1^3 \text{ (s. Erkl. 123)}$$

die Bestimmungsgleichung:

$$x : 13{,}5 = 2^3 : 1{,}5^3$$

Hieraus erhält man:

$$x = \frac{13{,}5 . 2^3}{1{,}5^3}$$

Mit Anwendung der Logarithmen ergibt sich:

$$\log x = \log 13{,}5 + 3 . \log 2 - 3 \log 1{,}5$$

Nun ist: $\log 13{,}5 = 1{,}1303338$
$+ 3 . \log 2 = 3 . 0{,}3010300 = + 0{,}9030900$
$2{,}0334238$
$- 3 . \log 1{,}5 = - 3 . 0{,}1760913 = - 0{,}5282739$
$\log x = 1{,}5051499$
$1500$

mithin:

$$\text{numlog}\, x = 32{,}000$$

Das gesuchte Volumen des grösseren Kegels ist somit

$$= 32 \text{ cbm}$$

---

**Aufgabe 106.** Ein Cylinder und ein abgestumpfter Kegel haben dieselbe Basis und dieselbe Höhe. In welchem Verhältnis müssen die Radien der Endflächen des Kegelstumpfs zu einander stehen, damit das Volumen dieses Stumpfes gleich dem halben Volumen des Cylinders ist? Der Wert des Verhältnisses soll bis auf $^1/_{1000}$ berechnet werden?

**Formeln:**

Für den Cylinder:

I) . . . $V = R^2 \pi H$ (s. Erkl. 33, S. 14)

Für den Kegelstumpf:

II) . . . $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

(s. Erkl. 53, S. 25)

**Auflösung.** Bezeichnet man den Radius der Grundfläche des Cylinders, also auch den Radius der grösseren Grundfläche des Kegelstumpfs, mit $R$, die Höhe beider Körper mit $H$ und den Radius der kleineren Grundfläche (Deckfläche) des Stumpfs mit $r$, und das gesuchte Verhältnis mit $x$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln die Gleichungen:

1) . . . $x = \frac{r}{R}$

2) . . . $\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{2} R^2 \pi H$

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses $\frac{R}{r}$ hat man $r$ in $R$, oder $R$ in $r$, mittelst der Gleichung 2) auszudrücken und diesen Wert in Gleich. 1) zu substituieren.

Nach der Erkl. 124 erhält man aus der Gleich. 2):

$$r = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{3})$$

Diesen Wert für $r$ in Gleich. 1) substituiert, gibt:

$$x = \frac{\frac{R}{2}(-1 + \sqrt{3})}{R} \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{(-1 + \sqrt{3})}{2}$$

Das gesuchte Verhältnis ist somit:

$$r : R = (-1 + \sqrt{3}) : 2$$

Soll der Wert dieses Verhältnisses bis auf $^1/_{1000}$ stel genau berechnet werden, so ergibt sich hieraus nach der Erkl. 125:

$$r : R = 0{,}366 : 1$$

oder auch:

$$R : r = 1 : 0{,}366$$

---

**Erkl. 124.** Aus nebensteh. Gleichung 1):

$$\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{2} R^2 \pi H$$

erhält man der Reihe nach:

$$\frac{1}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{2} R^2$$

$$R^2 + Rr + r^2 = \frac{3}{2} R^2 - R^2$$

$$r^2 + Rr = \frac{3}{2} R^2 - R^2$$

$$r^2 + Rr = \frac{1}{2} R^2$$

$$r^2 + Rr + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\left(r + \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{4} R^2$$

$$r + \frac{R}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4} R^2}$$

$$r = -\frac{R}{2} \pm \frac{R}{2}\sqrt{3} \quad \text{mithin}$$

$$r = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{3})$$

**Erkl. 125.** Soll das nebenstehende Verhältnis:

$$r : R = (-1 + \sqrt{3}) : 2$$

bis auf $^1/_{1000}$ genau berechnet werden, so berechne man zunächst $\sqrt{3}$ bis auf 10000stel genau.

Man erhält: $\sqrt{3} = 1{,}7320$

also:

$$r : R = (-1 + 1{,}7320) : 2 = 0{,}7320 : 2$$

oder:

$$r : R = 0{,}3660 : 1$$

oder auch:

$$R : r = 1 : 0{,}366$$

**Aufgabe 107.** Ein Kegelstumpf hat die Radien $R$ und $r$ und die Höhe $H$; wie gross ist der Unterschied zwischen seinem Kubikinhalt und dem eines Cylinders von mittlerem Radius und gleicher Höhe?

**Erkl. 126.** Sind $R$ und $r$ die Radien der Grundflächen eines Kegelstumpfs, so ist der mittlere Radius $\varrho$ dieses Kegelstumpfs

$$= \frac{R+r}{2}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Kegelstumpf** handelt.

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

I) $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ (s. Erkl. 53, S. 25)

Für einen Cylinder:

II) $V = R^2 \pi H$ (s. Erkl. 33, S. 14).

**Auflösung.** Ist der gesuchte Unterschied der Volumina beider Körper $= x$, so hat man mit Benutzung vorstehender Formeln und in Rücksicht, dass die Höhen beider Körper gleich ($= H$) sind und dass der Radius des Cylinders nach der Erkl. 126

$$= \frac{R+r}{2} \text{ ist,}$$

die Bestimmungsgleichung:

$$x = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \pi H$$

Durch Reduktion erhält man hieraus der Reihe nach:

$$x = \pi H\left[\frac{R^2}{3} + \frac{Rr}{3} + \frac{r^2}{3} - \left(\frac{R^2 + 2Rr + r^2}{4}\right)\right]$$

$$x = \pi H\left[\frac{R^2}{3} + \frac{Rr}{3} + \frac{r^2}{3} - \frac{R^2}{4} - \frac{2Rr}{4} - \frac{r^2}{4}\right]$$

$$x = \frac{\pi H}{12}\left(4R^2 + 4Rr + 4r^2 - 3R^2 - 6Rr - 3r^2\right)$$

$$x = \frac{\pi H}{12}\left(R^2 - 2Rr + r^2\right)$$

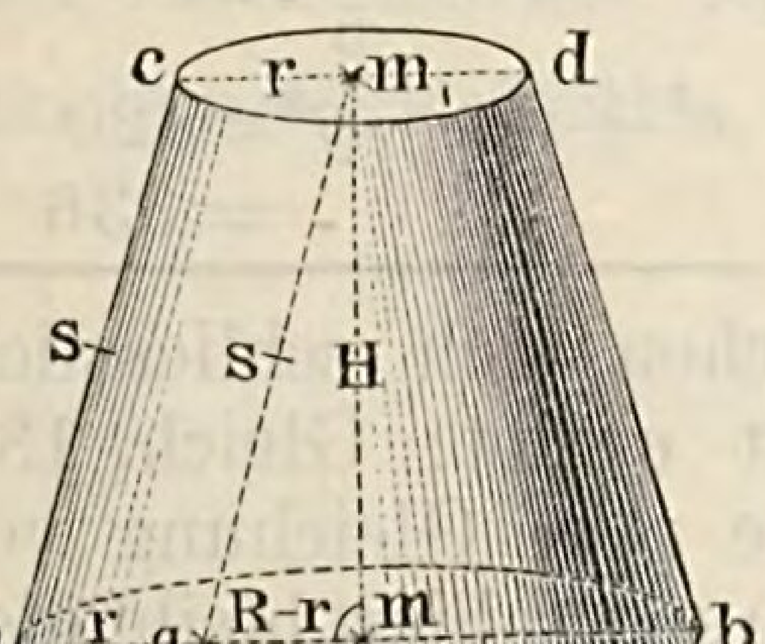
Der gesuchte Unterschied $x$ ist somit:

$$x = \frac{\pi H}{12}(R - r)^2$$

---

**Aufgabe 108.** In einem geraden Kegelstumpf sei die Differenz der deiden Grundflächen $= \frac{3}{5}$ des Mantels, die Differenz der Seitenlinie und der Höhe $= 4$ cm, der Inhalt gleich dem eines Kegels, welcher die Höhe des Stumpfs zum Radius und die um 1 cm vergrösserte Seitenlinie zur Höhe hat. Wie gross sind die Radien?

Figur 29.




**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

I) $M = \pi s(R + r)$ (s. Erkl. 56, S. 26)

II) $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ (s. Erkl. 53, S. 25)

Für einen Kegel:

III) $V = \frac{R^2 \pi H}{3}$ (s. Erkl. 50, S. 23)

Für einen Kreis:

IV) $z = r^2 \pi$ (s. Erkl. 57, S. 26).

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchten Radien $R$ und $r$ der Grundflächen des Kegelstumpfs mit $x$ und $y$, die unbekannte Seitenlinie $s$ desselben mit $z$ und dessen unbekannte Höhe $H$ mit $v$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung vorstehender Formeln die Bestimmungsgleichungen:

**Erkl. 127.** Zwischen den Radien $R$ und $r$ der Grundflächen, der Seitenlinie $s$ und der Höhe $H$ eines Kegelstumpfs besteht (in dem rechtwinkligen Dreieck $gmm_1$, siehe Figur 29) nach dem pythagoräischen Lehrsatz, die Relation:

$$s^2 = (R - r)^2 + H^2$$

**Erkl. 128.** Nebenstehende Gleich. 1):

$$x^2\pi - y^2\pi = \frac{3}{5}\pi z(x+y)$$

kann man einmal durch $\pi$ dividieren, dann kann man $x^2 - y^2$ in $(x-y).(x+y)$ zerlegen und hiernach die ganze Gleichung durch $(x+y)$ dividieren*), wonach die Gleichung:

$$x - y = \frac{3}{5}z$$

resultiert.

*) $x+y$ als Faktor der Gleich. 1) $= 0$ gesetzt, genügt zwar der Gleichung, hat jedoch in Betreff der Aufgabe keinen Sinn, denn die Summe der Radien kann nicht $= 0$ sein.

**Erkl. 129.** Die nebensteh. Gleich. 12):

$$\left(\frac{3z}{5}\right)^2 = 4(2z-4)$$

nach $z$ aufgelöst, erhält man der Reihe nach:

$$\frac{9z^2}{25} = 8z - 16$$

$$z^2 - \frac{25.8}{9}z = -\frac{16.25}{9}$$

$$z^2 - \frac{25.8}{9}z + \left(\frac{25.4}{9}\right)^2 = -\frac{400}{9} + \left(\frac{25.4}{9}\right)^2$$

$$\left(z - \frac{25.4}{9}\right)^2 = -\frac{400}{9} + \frac{10000}{9^2}$$

$$z - \frac{100}{9} = \pm\sqrt{\frac{-400.9+10000}{9^2}}$$

$$z = \frac{100}{9} \pm \sqrt{\frac{6400}{9^2}}$$

$$z = \frac{100}{9} \pm \frac{80}{9}$$

mithin ist:

$$z_1 = \frac{180}{9} = 20$$

und

$$z_2 = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$$

Dieser zweite Wert für $z$ hat für die Aufgabe keinen Sinn, denn $z$ ist die Seitenlinie des Kegels und (als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks) g r ö s s e r als die Höhe, und da sie 4 cm grösser als die Höhe sein soll, so kann sie unmöglich $2^2/_9$ cm gross sein.

1) . . . $x^2\pi - y^2\pi = \frac{3}{5}.\pi z(x+y)$

2) . . . $z - v = 4$

3) . . . $\frac{\pi . v}{3}(x^2+xy+y^2) = \frac{v^2.\pi(z+1)}{3}$

Ferner hat man nach der Erkl. 127 die vierte Gleichung:

4) . . . $z^2 = (x-y)^2 + v^2$

Die vorstehenden 4 Gleichungen reduziert und geordnet ergeben:

5) . . . $x - y = \frac{3}{5}z$ (s. Erkl. 128)

6) . . . $z - v = 4$

7) . . . $x^2 + xy + y^2 = v(z+1)$

8) . . . $(x-y)^2 = z^2 - v^2$
$= (z+v).(z-v)$

---

Setzt man den Wert für $(z-v)$ aus Gleich. 6) in Gleich. 8) ein, so geht die Gleich. 8) über in:

9) . . . $(x-y)^2 = 4(z+v)$

Setzt man ferner den sich aus Gleich. 6) für $v$ ergebenden Wert: $(z-4)$ in die Gleich. 7) und 9) ein so erhält man die drei Bestimmungsgleichungen:

5) . . . $x - y = \frac{3}{5}z$

10) . . . $x^2+xy+y^2 = (z-4)(z+1)$

11) . . . $(x-y)^2 = 4(z+z-4)$
$= 4(2z-4)$

---

Setzt man nunmehr den Wert für: $(x-y)$ aus Gleich. 5) in Gleich. 11) ein, so ist:

12) . . . $\left(\frac{3z}{5}\right)^2 = 4(2z-4)$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 129:

a) . . . $z = 20$ cm

Substituiert man diesen Wert für $z$ in die Gleichungen 5) und 10), so restieren die Gleichungen:

13) . . . $x - y = \frac{3}{5}.20 = 12$

14) . . . $x^2+xy+y^2 = (20-4)(20+1)$
$= 336$

---

aus welchen sich schliesslich $x$ und $y$, wie folgt ergibt: Gleich. 13) quadriert und diese neue Gleichung von der Gleichung 14) subtrahiert bleibt die Gleichung:

$$3xy = 192$$

Man hat somit die Gleichungen:

13) . . . $x - y = 12$

15) . . . $xy = 64$

Quadriert man jetzt die Gleich. 13) und addiert zu der somit erhaltenen Gleichung das 4 fache der Gleich. 15), so erhält man die Gleichung:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 400$$

oder: $(x + y)^2 = 400$

$x + y = 20$ (der negative Wert: $-20$ lässt keinen Sinn zu).

Somit bestehen die Gleichungen:

13) . . . $x - y = 12$

16) . . . $x + y = 20$

und hieraus erhält man:

$$2x = 32$$

oder $x = 16$

und $2y = 20 - 12 = 8$

oder $y = 4$

Die gesuchten Radien sind also 16 cm und 4 cm gross.

---

**Aufgabe 109.** Ein Brunnen, dessen quadratischer Querschnitt die Seite $a =$ 1,50 m hat, soll $t = 10$ m tiefer ausgeschachtet werden. Zur Förderung des Erdreichs bedient man sich eines Eimers, welcher die Gestalt eines Kegelstumpfs hat, dessen grösserer Durchmesser $D$ im Lichten gemessen = 4 dm, dessen kleinerer Durchmesser $d$ im Lichten = 2 dm und dessen Seitenlinie $s = 5$ dm misst.

Wie oft muss der Eimer gefüllt werden, wenn man weiss, dass $p = 11,3$ Kubikeinheiten des festen Erdreichs gleich $q = 13,9$ Kubikeinheiten des aufgelockerten Erdreichs ergeben?

**Erkl. 130.** Der vorstehenden Aufgabe gemäss ergeben $p$ Kubikeinheiten festen Erdreichs = $q$ Kubikeinheiten lockeren Erdreichs, mithin ergibt 1 Kubikeinheit festen Erdreichs $= \frac{q}{p}$ Kubikeinheiten lockeren Erdreichs und $y$ Kubikeinheiten festen Erdreichs ergeben $\frac{q}{p} \cdot y$ Kubikeinheiten lockeren Erdreichs.

**Formeln:**

Für ein Prisma:

I) $V = G \cdot H$ (s. Erkl. 1, S. 1)

Für einen Kegelstumpf:

II) $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ (s. Erkl. 53, S. 25)

**Auflösung.** Sind zur Vertiefung des Brunnenschachtes $y$ cbm festen Erdreichs aufzugraben, so ergeben dieselben nach der Erkl. 130 $= \frac{q}{p} \cdot y$ cbm lockeren Erdreichs. Nimmt man nun an, zur Förderung dieses lockeren Erdreichs müsste der Eimer $x$ mal gefüllt werden und jeder Eimer enthielte $z$ cbm dieses lockeren Erdreichs, so muss bis zur gänzlichen Förderung des lockeren Erdreichs die Relation bestehen:

$$x \cdot z = \frac{q}{p} \cdot y \text{ woraus man}$$

1) . . . $x = \frac{q}{p} \cdot \frac{y}{z}$

erhält.

Für das Volumen $y$ des festen Erdreichs erhält man nach vorstehender

Formel I., wenn man in derselben $V = y$, $G = a^2$ und $H = t$ setzt.

$$2) \quad \ldots \quad y = a^2 . t$$

Für das Volumen $z$ des lockeren Erdreichs, welches der Eimer fasst, erhält man nach vorstehender Formel II., wenn man in derselben $V = z$, $R = \frac{D}{2}$, $r = \frac{d}{2}$ und nach der Erkl. 127, Seite 62,

$$H^2 = s^2 - (R - r)^2 = s^2 - \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$= s^2 - \left(\frac{D-d}{2}\right)^2 = s^2 - \frac{1}{4}(D-d)^2$$

oder:

$$H = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}(D-d)^2} \text{ setzt:}$$

$$z = \frac{\pi\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}(D-d)^2}}{3}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]$$

oder:

$$3) \quad z = \frac{\pi\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}(D-d)^2}}{3 . 4} . (D^2 + Dd + d^2)$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man somit:

$$x = \frac{q}{p} \cdot \frac{a^2 . t}{\frac{\pi\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}(D-d)^2}}{12} . (D^2 + Dd + d^2)}$$

oder:

$$x = \frac{q}{p} \cdot \frac{12\, a^2 t}{\pi\sqrt{s^2 - \frac{1}{4}(D-d)^2} . \left(D^2 + Dd + d^2\right)}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$x = \frac{13{,}9}{11{,}3} \cdot \frac{12 . 1{,}5^2 . 10}{3{,}141\sqrt{0{,}5^2 - \frac{1}{4}(0{,}4 - 0{,}2)^2} . \left(0{,}4^2 + 0{,}4 . 0{,}2 + 0{,}2^2\right)}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$x = 763$$

Zur Förderung des Erdreichs muss also der in Rede stehende Eimer

763 mal gefüllt werden.

**Hülfsrechnung.**

$$x = \frac{13{,}9}{11{,}3} \cdot \frac{12 . 1{,}5^2 . 10}{3{,}141\sqrt{0{,}5^2 - \frac{1}{4}(0{,}4 - 0{,}2)^2 \cdot \left(0{,}4^2 + 0{,}4 . 0{,}2 + 0{,}2^2\right)}}$$

$$= \frac{13{,}9}{11{,}3} \cdot \frac{120 . 1{,}5^2}{3{,}141\sqrt{0{,}25 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}02 \cdot \left(0{,}16 + 0{,}08 + 0{,}04\right)}}$$

$$= \frac{13{,}9}{11{,}3} \cdot \frac{120 . 1{,}5^2}{3{,}141\sqrt{0{,}25 - 0{,}005 . 0{,}28}}$$

$$= \frac{13{,}9}{11{,}3} \cdot \frac{120 . 1{,}5^2}{3{,}141\sqrt{0{,}245} . 0{,}28}$$

$$log\, x = log\, 13{,}9 + log\, 120 + 2 . log\, 1{,}5 - (log\, 11{,}3 + log\, 3{,}141 + \frac{1}{2} : log\, 0{,}245 + log\, 0{,}28)$$

Nun ist:

$$log\, 13{,}9 = 1{,}1430148$$
$$+ log\, 120 = 2{,}0791812$$
$$+ . 2\, log\, 1{,}5 = 2 . 0{,}1760913 = 0{,}3521826$$
$$3{,}5743786$$

Ferner ist:

$$log\, 11{,}3 = 1{,}0530784$$
$$+ log\, 3{,}141 = + 0{,}4971499$$
$$+ \frac{1}{2}\, log\, 0{,}245 = \frac{1}{2} \cdot (0{,}3891661 - 1)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (1{,}3891661 - 2) = + 0{,}6945831 - 1$$
$$+ log\, 0{,}28 = + 0{,}4471580 - 1$$
$$2{,}6919694 - 2$$
$$\text{oder} = 0{,}6919694$$

mithin ist:

$$log\, x = 3{,}5743786 - 0{,}6919694$$

oder:

$$log\, x = 2{,}8824092$$
$$4050$$

Hieraus findet man:

$$numlog\, x = 762{,}79$$

oder abgerundet:

$$x = 763$$

**Aufgabe 110.** Die Summe der Durchmesser zweier Kugeln sei $= S$, die ihrer Oberflächen $= O$; wie gross ist der Durchmesser einer jeden?

**Erkl. 131.** Nebenstehende Gleichung:

$$\pi x^2 + \pi(S - x)^2 = O$$

nach $x$ aufgelöst gibt der Reihe nach:

$$x^2 + (S - x)^2 = \frac{O}{\pi}$$

$$x^2 + S^2 - 2Sx + x^2 = \frac{O}{\pi}$$

$$2x^2 - 2Sx = \frac{O}{\pi} - S^2$$

$$x^2 - Sx = \frac{O}{2\pi} - \frac{S^2}{2}$$

$$x^2 - Sx + \left(\frac{S}{2}\right)^2 = \frac{O}{2\pi} - \frac{S^2}{2} + \left(\frac{S}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 = \frac{O}{2\pi} - \frac{2}{4}S^2 + \frac{S^2}{4}$$

$$x - \frac{S}{2} = \pm\sqrt{\frac{O}{2\pi} - \frac{S^2}{4}}$$

$$x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{2O - \pi S^2}{4\pi}}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(S \pm \sqrt{\frac{2O - 4S^2}{\pi}}\right)$$

**Formeln:**

$$O = \pi d^2 \text{ (s. Erkl. 62, S. 28).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den einen der gesuchten Durchmesser mit $x$, so ist der andere $= S - x$. Mit Benutzung vorstehender Formel besteht der Aufgabe gemäss die Bestimmungsgleichung:

$$\pi x^2 + \pi(S - x)^2 = O$$

Nach der Erkl. 131 erhält man hieraus

$$x = \frac{1}{2}\left(S \pm \sqrt{\frac{2O - 4S^2}{\pi}}\right)$$

Der eine Durchmesser ist also

$$= \frac{1}{2}\left(S + \sqrt{\frac{2O - 4S^2}{\pi}}\right), \text{ der andere}$$

$$= \frac{1}{2}\left(S - \sqrt{\frac{2O - 4S^2}{\pi}}\right).$$

---

**Aufgabe 111.** Wie verhalten sich die Oberflächen zweier Kugeln zu einander, deren Kubikinhalte sich wie $m : n$ verhalten?

**Erkl. 132.** Aus nebensteh. Proportion 4):

$$r^3 : r_1{}^3 = m : n$$

erhält man:

$$r^3 = \frac{m}{n} \cdot r_1{}^3$$

oder:

$$r = \sqrt[3]{\frac{m}{n} \cdot r_1{}^3} = r_1 \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$$

mithin:

$$r^2 = r_1{}^2 \sqrt[3]{\left(\frac{m}{n}\right)^2} = r_1{}^2 \sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}$$

**Formeln:**

$$\text{I. } O = 4\pi r^2 \text{ (s. Erkl. 62, S. 28)}$$

$$\text{II. } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (s. Erkl. 67, S. 29).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die Oberflächen der zwei Kugeln mit $O$ und $O_1$, deren Radien bezw. mit $r$ und $r_1$ und deren Volumina mit $V$ und $V_1$, so hat man mit Benützung vorstehender Formeln und der Aufgabe gemäss, die Proportionen:

1) . . . $O : O_1 = 4\pi r^2 : 4\pi r_1{}^2$

2) . . . $V : V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r_1{}^3 = m : n$

Diese Proportionen reduziert ergeben:

3) . . . $O : O_1 = r^2 : r_1{}^2$

4) . . . $r^3 : r_1{}^3 = m : n$

Drückt man nun mittelst der Gleich. 4) $r^2$ in $r_1{}^2$, oder $r_1{}^2$ in $r^2$ aus, und setzt diesen Wert in Gleich. 3), so erhält man das fragl. Verhältnis.

Nach der Erkl. 132 ergibt sich:

$$r^2 = r_1{}^2 \sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}$$

mithin erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$O:O_1 = r_1^2 \sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}} : r_1^2$$

oder:

$$O:O_1 = \frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{n^2}} : 1 = \sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$$

---

**Aufgabe 112.** Die Differenz der Radien zweier Kugeln ist 1,75 m, die Differenz ihrer Inhalte ist 47 cbm. Es sollen die beiden Radien bis auf 0,001 berechnet werden?

**Erkl. 133.** Nebenstehende Gleichung:

$$\frac{4\pi}{3}x^3 - \frac{4\pi}{3}(x - 1{,}75)^3 = 47$$

reduziert, gibt:

$$x^3 - (x - 1{,}75)^3 = \frac{47 \cdot 3}{4\pi}$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst erhält man der Reihe nach:

$$x^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot 1{,}75 + 3x \cdot 1{,}75^2 - 1{,}75^3) = \frac{47 \cdot 3}{4\pi}$$

$$x^3 - x^3 + 3 \cdot 1{,}75x^2 - 3 \cdot 1{,}75^2 x + 1{,}75^3 = \frac{47 \cdot 3}{4\pi}$$

$$3 \cdot 1{,}75x^2 - 3 \cdot 1{,}75^2 x = \frac{47 \cdot 3}{4\pi} - 1{,}75^3$$

$$x^2 - 1{,}75x = \frac{47 \cdot 3}{4\pi \cdot 3 \cdot 1{,}75} - \frac{1{,}75^3}{3 \cdot 1{,}75}$$

$$x^2 - 1{,}75x + \left(\frac{1{,}75}{2}\right)^2 = \frac{47}{4\pi \cdot 1{,}75} - \frac{1{,}75^2}{3} + \left(\frac{1{,}75}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1{,}75}{2}\right)^2 = \frac{47}{4\pi \cdot 1{,}75} - \frac{1{,}75^2}{3} + \frac{1{,}75^2}{4}$$

$$x - \frac{1{,}75}{2} = \pm\sqrt{\frac{47}{4\pi \cdot 1{,}75} - \frac{4 \cdot 1{,}75^2}{12} + \frac{3 \cdot 1{,}75^2}{12}}$$

$$x = \frac{1{,}75}{2} \pm \sqrt{\frac{47}{4\pi \cdot 1{,}75} - \frac{1{,}75^2}{12}}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1{,}75 \pm \sqrt{\frac{47}{\pi \cdot 1{,}75} - \frac{1{,}75^2}{3}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}(1{,}75 \pm \sqrt{8{,}548896 - 1{,}020833})$$

$$x = \frac{1}{2}(1{,}75 \pm \sqrt{7{,}528063})$$

$$x = \frac{1}{2}(1{,}75 \pm 2{,}7437), \text{ mithin ist:}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 4{,}4937 - 2{,}24685$$

Der zweite Wert für $x$ ist negativ und somit unzulässig.

**Formel:**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29)}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den grösseren der gesuchten Radien mit $x$, so ist der kleinere $= x - 1{,}75$. Mit Benutzung vorsteh. Formel hat man der Aufgabe gemäss hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot x^3 - \frac{4\pi}{3} \cdot (x - 1{,}75)^3 = 47$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 133:

$$x = 2{,}24685$$

Der grössere der gesuchten Radien ist somit $= 2{,}24685$ m, der kleinere $= 2{,}24685 - 1{,}75 = 0{,}49685$ cbm

---

**Aufgabe 113.** Zwei Kugeln, deren Oberflächen sich wie 49 : 25 verhalten, haben zusammen 1728 ccm Inhalt. Wie gross sind die Radien derselben?

**Formeln:**

I. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28)

II. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67, S. 29)

**Erkl. 134.** Die nebensteh. Gleich. 1):

$$\frac{4\pi x^2}{4\pi y^2} = \frac{49}{25}$$

reduziert, gibt:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{49}{25}$$

nunmehr beiderseits die Quadratwurzel ausgezogen, erhält man:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

**Erkl. 135.** Die nebenstehende Gleich. 2):

$$\frac{4}{3}\pi x^3 + \frac{4}{3}\pi y^3 = 1728$$

durch $\frac{4}{3}\pi$ dividiert, ergibt

$$x^3 + y^3 = \frac{1728 \, . \, 3}{4\pi} = \frac{432 \, . \, 3}{\pi} = \frac{1296}{\pi}$$

**Erkl. 136.** Aus den nebensteh. Gleich.:

$$3) \ldots \frac{x}{y} = \frac{7}{5}$$

$$4) \ldots x^3 + y^3 = \frac{1296}{\pi}$$

erhält man $x$, wie folgt:

Setzt man den aus Gleich. 3) für $y$ sich ergebenden Wert:

$$y = \frac{5}{7}x$$

in Gleich. 4) ein, so ist:

$$x^3 + \left(\frac{5}{7}x\right)^3 = \frac{1296}{\pi}$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst erhält man der Reihe nach:

$$x^3 + \frac{5^3}{7^3}x^3 = \frac{1296}{\pi}$$

$$x^3\left(1 + \frac{5^3}{7^3}\right) = \frac{1296}{\pi}$$

$$x^3\left(\frac{7^3 + 5^3}{7^3}\right) = \frac{1296}{\pi}$$

$$x^3 \cdot \frac{468}{7^3} = \frac{1296}{\pi}$$

$$x^3 = \frac{1296 \, . \, 7^3}{\pi \, . \, 468}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1296 \, . \, 7^3}{\pi \, . \, 468}} = 7 \, . \sqrt[3]{\frac{108}{\pi \, . \, 39}}$$

oder:

$$x = 7 \, . \sqrt[3]{\frac{108 \, . \, 2}{\pi \, . \, 39 \, . \, 2}} = 7 \, . \sqrt[3]{\frac{216}{78\pi}}$$

$$x = 7 \, . \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{78\pi}} = 7 \, . \frac{6}{\sqrt[3]{78\pi}} = \frac{42}{\sqrt[3]{78\pi}}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man mit $x$ und $y$ die gesuchten Radien, und zwar den grösseren derselben mit $x$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln die Bestimmungsgleichungen:

$$1) \ldots \frac{4\pi x^2}{4\pi y^2} = \frac{49}{25}$$

$$2) \ldots \frac{4}{3}\pi x^3 + \frac{4}{3}\pi y^3 = 1728$$

Für welche man nach den Erkl. 134 und 135 auch setzen kann:

$$3) \ldots \frac{x}{y} = \frac{7}{5}$$

$$4) \ldots x^3 + y^3 = \frac{1296}{\pi}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach der Erkl. 136 für $x$:

$$x = \frac{42}{\sqrt[3]{78\pi}}$$

Mittelst Logarithmen erhält man:

$$log\, x = log\, 42 - \frac{1}{3} \cdot (log\, 78 + log\, \pi)$$

Nun ist: $log\, 42 = 1{,}6232493$

$$- \frac{1}{3} \cdot log\, 78 + log\, \pi)$$

$$= - \frac{1}{3} \cdot (1{,}8920946 + 0{,}4971499)$$

$$= - \frac{1}{3} \cdot 2{,}3892445 \qquad = - 0{,}7964148$$

$$log\, x = 0{,}8268345$$

8325

20

mithin:

$$numlog\, x = 6{,}7117$$

Der grössere Radius ist hiernach, abgerundet $= 6{,}71$ cm, der kleinere $= \frac{5x}{7} = \frac{5 \, . \, 6{,}7117}{7} = 5 \, . \, 0{,}9588$ oder abgerundet $= 4{,}79$ cm

**Aufgabe 114.** Eine metallene Hohlkugel hat den äusseren Durchmesser $2R = 20$ cm und die Wandstärke $w = 9$ cm. Aus der Masse dieser Hohlkugel wird eine andere Hohlkugel mit dem äussern Durchmesser $2R_1 = 24$ cm gegossen; wie gross ist die Wandstärke dieser Hohlkugel?

**Erkl. 137.** Nebenstehende Gleich. 2):

$$\frac{4}{3}\pi[R^3-(R-w)^3]=\frac{4}{3}\pi(R_1{}^3-y^3)$$

reduziert, gibt:

$$R^3-(R-w)^3=R_1{}^3-y^3$$

und diese Gleichung nach $y$ aufgelöst, erhält man der Reihe nach:

$$y^3=R_1{}^3-R^3+(R-w)^3 \text{ oder:}$$

$$y=\sqrt[3]{R_1{}^3-R^3+(R-w)^3}$$

**Formel:**

$$V=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3) \text{ (s. Erkl. 70, S. 32).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchte Wandstärke der 2. Hohlkugel mit $x$, und deren unbekannter innerer Radius mit $y$, so besteht, wenn der äussere Radius mit $R_1$ bezeichnet wird, die Gleich.:

1) . . . $x=R_1-y$

Bezeichnet man ferner den inneren Radius der 1. Hohlkugel mit $r$, so hat man, denselben in den äusseren Radius $R$ und die Wandstärke $w$ ausgedrückt:

$$r=R-w$$

Da nun die Volumina der beiden Hohlkugeln dieselben sind, so hat man unter Benutzung der vorstehenden Formel die weitere Bestimmungsgleichung:

2) . . . $\frac{4}{3}\pi[R^3-(R-w)^3]=\frac{4}{3}\pi[R_1{}^3-y^3]$

Aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 137:

3) . . . $y=\sqrt[3]{R_1{}^3-R^3+(R-w)^3}$

Aus den Gleich. 1) und 3) folgt:

$$x=R_1-\sqrt{R_1{}^3-R^3+(R-w)^3}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$x=12-\sqrt[3]{12^3-10^3+(10-9)^3}$$

oder:

$$x=12-\sqrt[3]{1728-1000+1^3}=12-\sqrt[3]{729}=12-\sqrt[3]{9^3}=12-9$$

Die gesuchte Wandstärke der 2. Hohlkugel ist also $= 3$ cm

---

**Aufgabe 115.** Zwei Kugeln haben zusammen denselben Kubikinhalt wie ein Würfel mit der Kante $a$; wie gross ist der Kubikinhalt einer jeden der beiden Kugeln, wenn sich ihre Radien wie $1:n$ verhalten?

**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67, S. 29)

Für einen Würfel:

II. $V=k^3$ (s. Erkl. 73, S. 39).

**Auflösung.** Die gesuchten Volumina $V$ und $V_1$ der beiden Kugeln kann man nach vorsteh. Formel I. berechnen, sobald man ihre Radien bezw. die Kuben

ihrer Radien kennt. Bezeichnet man diese Radien durch $x$ und $y$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorsteh. Formeln, die Bestimmungsgleichungen:

$$1) \ldots \frac{4}{3}\pi x^3 + \frac{4}{3}\pi y^3 = a^3$$

$$2) \ldots x : y = 1 : n$$

Setzt man den sich aus Gleich. 2) für $y$ ergebenden Wert: $y = nx$ in Gleich. 1) ein, so erhält man:

$$\frac{4}{3}\pi x^3 + \frac{4}{3}\pi (nx)^3 = a^3$$

$$x^3 + n^3 x^3 = \frac{3a^3}{4\pi}$$

$$x^3(1 + n^3) = \frac{3a^3}{4\pi} \text{ mithin ist:}$$

$$a) \ldots x^3 = \frac{3a^3}{4\pi(1+n^3)} \quad \text{(s. Erkl. 138)}$$

und nach Gleich. 2):

$$b) \ldots y^3 = \frac{n^3 . 3a^3}{4\pi(1+n^3)}$$

Setzt man diese für $x^3$ und $y^3$ gefundenen Werte in vorstehende Formel I. an Stelle von $r^3$, so erhält man die gesuchten Volumen $V$ und $V_1$ mit:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3a^3}{4\pi(1+n^3)} = \frac{a^3}{1+n^3}$$

und

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{n^3 . 3a^3}{4\pi(1+n^3)} = \frac{n^3 a^3}{1+n^3}$$

**Erkl. 138.** Da man zur Berechnung der gesuchten Volumina der Kugeln, nach der vorstehenden Formel I, nicht direkt die Radien, wohl aber deren 3. Potenzen nötig hat, so braucht man nebenst. Gleichungen a) und b) nicht weiter aufzulösen.

---

**Aufgabe 116.** Eine Kugel, deren Oberfläche $O = 36{,}1035$ qm gegeben ist, soll in einen geraden Cylinder von gleichem Volumen verwandelt werden. Wie gross ist der Radius der Grundfläche, wenn sein Mantel gleich der Oberfläche der Kugel ist?

**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28)

II. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl: 67, S. 29)

Für einen Cylinder:

III. $M = 2\pi RH$ (s. Erkl. 47, S. 20)

IV. $V = \pi R^2 H$ (s. Erkl. 33, S. 14).

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Radius der Cylindergrundfläche mit $x$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Hülfe vorstehender Formel III. die Gleichung:

$$1) \ldots 2\pi x H = O$$

in welcher $H$ die noch unbekannte Höhe des Cylinders und $O$ die gegebene Oberfläche der Kugel bedeutet. Zur Bestimmung jener Höhe $H$ hat man nach dem Sinne der Aufgabe und nach vor-

**Erkl. 139.** Aus nebenst. Gleich. 2):

$$O = 4\pi r^2$$

erhält man:

$$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$$

Diesen Wert für $r$ in nebensteh. Gleich. 3):

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi x^2 H$$

welche noch durch $\pi$ dividiert werden kann, substituiert, gibt:

$$\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}\right)^3 = x^2 H$$

Diese Gleichung nach $H$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{O}{\pi}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{O}{\pi}} = x^2 H$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{O}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{O}{\pi}} = x^2 H$$

oder:

$$H = \frac{O}{6\pi x^2} \cdot \sqrt{\frac{O}{\pi}}$$

Diesen Wert in nebensteh. Gleich. 1) substituiert, gibt:

$$2\pi x \cdot \frac{O}{6\pi x^2} \cdot \sqrt{\frac{O}{\pi}} = O$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{O}{3x} \sqrt{\frac{O}{\pi}} = O$$

$$\frac{O}{3} \cdot \sqrt{\frac{O}{\pi}} = O \,.\, x$$

oder:

$$x = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{O}{\pi}}$$

**Hülfsrechnung.**

$$\log x = \log \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{36{,}1035}{3{,}141}}$$

$$= \frac{1}{2} (\log 36{,}1035 - \log 3{,}141) - \log 3$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 36{,}1035 = & 1{,}5575433 \\ & +\ 60 \\ \hline & 1{,}5575493 \\ -\log 3{,}141 = & -\ 0{,}4971499 \\ \hline & 1{,}0603994 \\ & \cdot \frac{1}{2} \\ \hline & 0{,}5301997 \\ -\log 3 = & -\ 0{,}4771213 \\ \hline \log x = & 0{,}0530784 \end{array}$$

mithin:

$$\text{numlog}\, x = 1{,}1300$$

stehenden Formeln I., II. und III. die weiteren Gleichungen:

$$2) \ldots O = 4\pi r^2$$

$$3) \ldots \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi x^2 H$$

Bestimmt man nunmehr aus Gleich. 2) den unbekannten Radius $r$, setzt alsdann diesen Wert für $r$ in Gleich. 3) und bestimmt die unbekannte Höhe $H$ und setzt den hierfür gefundenen Wert in Gleich. 1), so erhält man, wie aus der Erkl. 139 ersichtlich ist, für $x$:

$$x = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{O}{\pi}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{36{,}1035}{3{,}141}}$$

oder nach nebensteh. Hülfsrechnung:

$$x = 1{,}13$$

Der gesuchte Radius des Cylinders ist also $= 1{,}13$ m

---

**Aufgabe 117.** Die Grundfläche eines geraden Cylinders sei gleich einem grössten Kreise einer Kugel, die Gesammtoberfläche des Cylinders verhalte sich zu der Kugeloberfläche wie $m:n$; wie verhalten sich die Kubikinhalte beider Körper und für welche Werte von $m$ und $n$ sind dieselben gleich gross?

**Erkl. 140.** Aus der nebensteh. Gleich. 2):

$$R^2 \pi = r^2 \pi$$

erhält man:

$$R^2 = r^2$$

oder:

$$R = r$$

Substituiert man diesen Wert für $R$ in nebenstehende Gleichung 3):

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

I. $O = 2R\pi(H + R)$ (s. Erkl. 100, S. 50)

II. $V = R^2 \pi H$ („ „ 33, „ 14)

Für eine Kugel:

III. $O = 4\pi r^2$ („ „ 62, „ 28)

IV. $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ („ „ 67. „ 29).

**Auflösung.** Bezeichnet $V$ das Volumen des Cylinders, $V_1$ das der Kugel, so hat man für das gesuchte Verhältnis, unter Benutzung der vorstehenden Formeln II. und IV., die Proportion:

$$\frac{R(H+R)}{2r^2} = \frac{m}{n}$$

so erhält man:

$$\frac{r(H+r)}{2r^2} = \frac{m}{n} \text{ oder:}$$

$$\frac{H+r}{2r} = \frac{m}{n}$$

und hieraus erhält man:

$$H = \frac{2r \cdot m}{n} - r = \frac{2rm}{n} - \frac{nr}{n}$$

oder:

$$H = \frac{r}{n}(2m - n)$$

**Erkl. 141.** Den in nebensteh. Gleichung 4) vorkommenden Quotient:

$$\frac{3r^2 \cdot \frac{r}{n}(2m-n)}{4r^3}$$ kann man, wie folgt, kürzen:

$$\frac{3r^2 \cdot \frac{r}{n}(2m-n)}{4r^3} = \frac{3r^3(2m-n)}{4nr^3} = \frac{3(2m-n)}{4n}$$

**Erkl. 142.** Soll:

$$\frac{3(2m-n)}{4n} = 1 \text{ sein, so muss}$$

$$3(2m-n) = 4n$$

$$6m - 3n = 4n$$

$$6m = 7n \text{ sein.}$$

Diese Gleichung ist nur dann richtig, wenn $m$ das 7 fache irgend einer beliebigen Zahl $z$, alsdann $n$ das 6 fache derselben Zahl $z$ ist, denn hiernach ist:

$$6 \cdot 7z = 7 \cdot 6z \text{ oder}$$

$$z = z$$

was sich nicht bestreiten lässt.

$$\frac{V}{V_1} = \frac{R^2\pi H}{\frac{4}{3}\pi r^3} \text{ oder:}$$

$$1) \ldots \frac{V}{V_1} = \frac{3R^2 H}{4r^3}$$

Zur näheren Bestimmung des Verhältnisses $V : V_1$ müssen die drei Grössen $R$, $H$ und $r$ in ein und dieselbe Grösse ausgedrückt werden und dies geschieht mittelst den aus der Aufgabe zu entnehmenden Gleichungen, wie folgt:

Ist $R$ der Radius der Grundfläche des Cylinders und $r$ der Radius der Kugel, bezw. eines grössten Kreises desselben, so besteht der Aufgabe gemäss die Gleichung:

2) . . . $R^2\pi = r^2\pi$ (s. Erkl. 57, S. 26)

Ist ferner $H$ die Höhe des Cylinders, so hat man nach der Aufgabe und mit Benutzung der vorstehenden Formeln I. und III. die weitere Gleichung:

$$\frac{2R\pi(H+R)}{4\pi r^2} = \frac{m}{n} \text{ oder:}$$

$$3) \ldots \frac{R(H+R)}{2r^2} = \frac{m}{n}$$

Aus den Gleichungen 2) und 3) folgt nach der Erkl. 140, dass

a) . . . $R = r$ und

b) . . . $H = \frac{r}{n} \cdot (2m - n)$ ist.

Substituiert man für $R$ und $H$ diese in $r$ ausgedrückten Werte in Gleich. 1), so erhält man:

$$4) \ldots \frac{V}{V_1} = \frac{3r^2 \cdot \frac{r}{n}(2m-n)}{4r^3}$$

Nach der Erkl. 141 erhält man hieraus für das gesuchte Verhältnis:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{3(2m-n)}{4n}$$

Soll man noch untersuchen, für welche Werte von $m$ und $n$ die Volumina $V$ und $V_1$ gleich sind, so beachte man, dass in diesem Falle

$$\frac{3(2m-n)}{4n} = 1 \text{ sein muss.}$$

Nach der Erkl. 142 ergibt sich hieraus, dass $V = V_1$ wird, wenn $z$ eine beliebige Zahl bedeutet und

$$m = 7z,$$

$$n = 6z \text{ gesetzt wird.}$$

**Aufgabe 118.** Eine Kugel vom Radius $r = 20$ cm soll in einen solchen geraden Kegel verwandelt werden, dass der Mantel desselben $m = 3$ mal so gross ist als seine Grundfläche. Wie gross ist der Halbmesser der Basis und die Höhe des Kegels?

**Erkl. 143.** Aus nebensteh. Gleichungen:

$$1) \ldots 4r^3 = x^2 y$$

$$2) \ldots \sqrt{y^2 + x^2} = mx$$

erhält man $x$ und $y$, wie folgt:

Aus Gleich. 1) erhält man:

$$y = \frac{4r^3}{x^2}$$

diesen Wert in Gleich. 2) substituiert, gibt:

$$\sqrt{\left(\frac{4r^3}{x^2}\right)^2 + x^2} = mx$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst erhält man der Reihe nach:

$$\frac{16r^6}{x^4} + x^2 = m^2x^2$$

$$16r^6 + x^6 = m^2x^6$$

$$m^2x^6 - x^6 = 16r^6$$

$$x^6(m^2 - 1) = 16r^6$$

$$x^6 = \frac{16r^6}{m^2 - 1}$$

$$x = \sqrt[6]{\frac{16r^6}{m^2-1}} = r\sqrt[6]{\frac{16}{m^2-1}} = r\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{16}{m^2-1}}}$$

oder:

$$a) \ldots x = r\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{m^2-1}}}$$

Setzt man diesen Wert für $x$ in vorsteh. Gleichung 1) ein, so wird:

$$4r^3 = \left(r\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{m^2-1}}}\right)^2 \cdot y$$

Diese Gleichung nach $y$ aufgelöst gibt der Reihe nach:

$$4r^3 = r^2\sqrt[3]{\frac{16}{m^2-1}} \cdot y$$

$$4r = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 2}{m^2-1}} \cdot y$$

$$4r = 2\sqrt[3]{\frac{2}{m^2-1}} \cdot y$$

$$y = \frac{2r}{\sqrt[3]{\frac{2}{m^2-1}}} = \frac{r\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{\frac{2}{m^2-1}}}$$

$$y = r\sqrt[3]{\frac{8}{\frac{2}{m^2-1}}} = r\sqrt[3]{\frac{8(m^2-1)}{2}}$$

**Formeln:**

Für eine Kugel:

$$\text{I. } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29)}$$

Für einen Kegel:

$$\text{II. } V = \frac{R^2\pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50, S. 23)}$$

$$\text{III. } M = \pi R s \quad \text{(s. Erkl. 49, S. 22).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den Halbmesser der Basis des Kegels mit $x$, dessen Höhe mit $y$, so hat man unter Benutzung der vorsteh. Formeln I. und II. und dem Sinne der Aufgabe entsprechend, die Gleichung:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{x^2\pi y}{3} \quad \text{oder:}$$

$$1) \ldots 4r^3 = x^2 y$$

Da ferner der Mantel $M$ des Kegels $m$ mal so gross als seine Grundfläche $G$ sein soll und nach vorsteh. Formel III.

$$M = \pi x s \quad \text{oder} = \pi x\sqrt{y^2 + x^2}$$

(s. Erkl. 110, S. 53)

und $G = x^2\pi$ (s. Erkl. 57, S. 26) ist, so besteht die weitere Gleichung:

$$\pi x\sqrt{y^2 + x^2} = m \cdot x^2\pi \quad \text{oder:}$$

$$2) \ldots \sqrt{y^2 + x^2} = mx$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man, wie aus der Erkl. 143 ersichtlich ist, für den gesuchten Radius $x$:

$$a) \ldots x = r\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{m^2-1}}}$$

und für die gesuchte Höhe $y$:

$$b) \ldots y = r\sqrt[3]{4(m^2-1)}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = 20\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{9-1}}} = 20\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{8}}}$$

$$= 20\sqrt[3]{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}}} = 20\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{16}{8}}}$$

$$= 20\sqrt[6]{2}$$

$$= 20 \cdot 1{,}1224621 = 22{,}449242 \quad \text{und}$$

$$y = 20\sqrt[3]{4(9-1)} = 20\sqrt[3]{4 \cdot 8}$$

$$= 20 \cdot 2\sqrt[3]{4} = 40 \cdot 1{,}5874009$$

$$= 63{,}496036$$

oder:

$$\text{b)} \ldots y = r\sqrt[3]{4(m^2-1)}$$

Der gesuchte Radius ist somit, abgerundet $= 22{,}45$ cm
und die gesuchte Höhe $= 63{,}50$ cm

---

**Aufgabe 119.** Die Gesammtoberfläche eines senkrechten Kreiskegels ist $\frac{3}{128}$ von der Oberfläche einer Kugel, deren Radius gleich dem Umfange des Axenschnitts des Kegels ist. Die Fläche des Axenschnitts ist 588 qm; wie gross ist der Radius der Basis und wie gross die Seite des Kegels?

**Erkl. 144.** Aus nebenstehend. Gleichungen:

$$1) \ldots \pi x(y+x) = \frac{3}{128}\cdot 4\pi\,.\,[2(x+y)]^2$$

$$2) \ldots \frac{2x\sqrt{y^2-x^2}}{2} = 588$$

erhält man $x$ und $y$, wie folgt:

Vorstehende Gleich. 1) reduziert und geordnet, ergibt der Reihe nach:

$$x(y+x) = \frac{3}{32}\cdot 4(x+y)^2$$

oder, mit $(x+y)$ beiderseits dividiert:

$$x = \frac{3}{8}(x+y)$$

$$x = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}y$$

$$x - \frac{3}{8}x = \frac{3}{8}y$$

$$\frac{5}{8}x = \frac{3}{8}y$$

$$5x = 3y$$

$$3) \ldots y = \frac{5}{3}x$$

Vorstehende Gleich. 2) reduziert und geordnet gibt der Reihe nach:

$$x\sqrt{y^2-x^2} = 588$$

$$x^2(y^2-x^2) = 588^2$$

$$4) \ldots x^2y^2 - x^4 = 588^2$$

Setzt man ferner für $y$ den aus Gleich. 3) sich ergebenden Wert, so wird:

$$x^2\,.\left(\frac{5}{3}x\right)^2 - x^4 = 588^2$$

$$x^2\,.\,\frac{25}{9}x^2 - x^4 = 588^2$$

$$\frac{25}{9}x^4 - \frac{9}{9}x^4 = 588^2$$

$$\frac{16}{9}x^4 = 588^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 = 588$$

$$x^2 = \frac{3\,.\,588}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{3\,.\,588}{4}} = \frac{\sqrt{1764}}{2} = \frac{42}{2}$$

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. $O = \pi R(s+R)$ (s. Erkl. 107, S. 52)

Für eine Kugel:

II. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28).

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Radius der Kegelgrundfläche mit $x$, die gesuchte Seite des Kegels mit $y$, so ist der Radius der in der Aufgabe erwähnten Kugel $= 2x+2y = 2(x+y)$ und man hat der Aufgabe gemäss einmal die Gleichung:

$$1)\ .\ \pi x(y+x) = \frac{3}{128}\cdot 4\pi\,.\,[2(x+y)]^2$$

Da ferner der Axenschnitt des Kegels ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie $= 2x$ und dessen Höhe in die Seitenlinie $y$ und den Radius $x$ der Grundfläche des Kegels ausgedrückt $= \sqrt{y^2-x^2}$ (s. Erkl. 110, S. 53) ist, so hat man dem Sinne der Aufgabe entsprechend die weitere Gleichung:

$$2)\ .\ \frac{2x\,.\,\sqrt{y^2-x^2}}{2} = 588 \text{ qm}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich, wie aus der Erkl. 144 ersichtlich:

$$x = 21$$

$$y = 35$$

Der gesuchte Radius der Kegelgrundfläche ist also $= 21$ m und die gesuchte Seitenlinie des Kegels $= 35$ m

mithin:

$$a) \ldots x = 21$$

Setzt man diesen Wert für $x$ in vorsteh. Gleichung 3), so ergibt sich:

$$y = \frac{5}{3} \cdot 21$$

oder:

$$b) \ldots y = 35$$

---

**Aufgabe 120.** Der Halbmesser einer Kugel sei $= r$, ein gerader Kegel habe zur Höhe den Durchmesser der Kugel und seine ganze Oberfläche sei gleich der Oberfläche der Kugel. Wie verhält sich die Grundfläche des Kegels zu seinem Mantel und zu seiner Oberfläche?

**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28)

Für einen Kegel:

II. $O = \pi R(s + R)$ (s. Erkl. 107, S. 52)

III. $M = \pi R s$ (s. Erkl. 49, S. 22).

**Auflösung.** Ist $R$ der Radius der Grundfläche $G$ des Kegels, $s$ seine Seitenlinie, so ist seine Grundfläche $G = R^2\pi$, sein Mantel $M = \pi R s$ und seine Oberfläche $O = \pi R(s + R)$, mithin hat man die Proportion:

$$G : M : O = R^2\pi : \pi R s : \pi R(s + R) \text{ oder:}$$

$$1) \ldots G : M : O = R : s : (s + R)$$

Um das in dieser Proportion ausgesprochene Verhältnis näher bestimmen zu können, müssen die Grössen $R$ und $s$ in ein und dieselbe Grösse und zwar in den Radius $r$ der gegeb. Kugel ausgedrückt werden.

Ist $H$ die Höhe des Kegels, so bestehen der Aufgabe gemäss und unter Benutzung der vorsteh. Formeln I. und II. die Gleichungen:

$$2) \ldots H = 2r$$

$$3) \ldots 4\pi r^2 = \pi R(s + R)$$

Da nun nach der Erkl. 110, S. 53:

$s = \sqrt{H^2 + R^2}$, bezw. nach Gleich. 2)

$s = \sqrt{(2r)^2 + R^2}$ oder

$$4) \ldots s = \sqrt{4r^2 + R^2} \text{ ist,}$$

so geht vorsteh. Gleich. 3) über, in

$$5) \ldots 4\pi r^2 = \pi R(\sqrt{4r^2 + R^2} + R)$$

und aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 145

$$a) \ldots R = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$$

Setzt man diesen für $R$ gefundenen Wert in Gleich. 4) ein, so erhält man nach der Erkl. 146

$$b) \ldots s = \frac{4r}{3}\sqrt{3}$$

**Erkl. 145.** Aus nebenstehender Gleich. 5):

$$4\pi r^2 = \pi R(\sqrt{4r^2 + R^2} + R)$$

erhält man $R$ in $r$ ausgedrückt, wie folgt:

$$4r^2 = R\sqrt{4r^2 + R^2} + R^2$$

$$(4r^2 - R^2)^2 = (R\sqrt{4r^2 + R^2})^2$$

$$16r^4 - 82^2R^2 + R^4 = R^2(4r^2 + R^2)$$

$$16r^4 - 8r^2R^2 + R^4 = 42^2R^2 + R^4$$

$$16r^4 = 12r^2R^2$$

$$R^2 = \frac{16r^4}{12r^2} = \frac{4r^2}{3}$$

$$R = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = 2r\sqrt{\frac{1}{3}} = 2r\sqrt{\frac{3}{9}}$$

oder:

$$R = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$$

**Erkl. 146.** Aus der Gleichung 4):

$$s = \sqrt{4r^2 + R^2}$$

erhält man, wenn $R = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$ gesetzt wird:

$$s = \sqrt{4r^2 + \left(\frac{2r}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4r^2 + \frac{4r^2 . 3}{9}}$$

oder:

$$s = \sqrt{\frac{36r^2 + 12r^2}{9}} = \sqrt{\frac{48r^2}{9}} = \sqrt{\frac{16 . r^2}{9} . 3}$$

mithin:

$$s = \frac{4r}{3}\sqrt{3}$$

Setzt man nunmehr die in $r$ ausgedrückten Werte für $R$ und $s$ in die Proportion 1) ein, so ergibt sich:

$$G:M:O = \frac{2r}{3}\sqrt{3} : \frac{4r}{3}\sqrt{3} : \left(\frac{4r}{3}\sqrt{3} + \frac{2r}{3}\sqrt{3}\right)$$

oder:

$$G:M:O = \frac{2r}{3}\sqrt{3} : \frac{4r}{3}\sqrt{3} : \frac{6r}{3}\sqrt{3}$$

$$G:M.O = 2:4:6 \text{ (s. Erkl. 82, S. 44)}$$

und hieraus erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$G:M:O = 1:2:3$$

---

**Aufgabe 121.** Man berechne die Radien der Grundkreise eines geraden Kegelstumpfs, der gleiches Volumen, gleiche Oberfläche und gleiche Höhe mit einer Halbkugel hat, deren Radius $r = 3$ dm gegeben ist.

**Erkl. 147.** Ist $r$ der Radius einer **Halbkugel**, so hat man für das Volumen $V$ derselben:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 : 2 \text{ (s. Erkl. 67, S. 29)}$$

oder:

$$1) \;.\;.\; V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

und für die ganze Oberfläche $O$, welche aus der halben Oberfläche der ganzen Kugel und dem Inhalte eines grössten Kreises derselben besteht:

$$O = 4\pi r^2 : 2 + \pi r^2 \text{ (s. Erkl. 62, S. 28)}$$

oder:

$$O = 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$2) \;.\;.\; O = 3\pi r^2$$

**Erkl. 148.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ eines Kegelstumpfs, dessen Grundflächenradien $R$ und $r$ sind und dessen Seitenlinie mit $s$ berechnet wird, ist:

$$O = \pi[s(R+r) + R^2 + r^2]$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **den Kegelstumpf** handelt.

**Erkl. 149.** Die 2. Gleichung der nebenst. Gleichungen

$$3)\; x^2 + xy + y^2 = 2r^2$$

$$4)\; \sqrt{r^2 + (x-y)^2}\,.\,(x+y) + x^2 + y^2 = 3r^2$$

kann man wie folgt auf eine einfachere Form bringen.

Aus Gleich. 3) ergibt sich:

$$a) \;.\;.\;.\; x^2 + y^2 = 2r^2 - xy$$

Addiert man ferner auf beiden Seiten der Gleich. 3) das Produkt: $+xy$, so erhält man

$$(x+y)^2 = 2r^2 + xy$$

oder:

$$b) \;.\;.\;.\; x + y = \sqrt{2r^2 + xy}$$

Addiert man auch noch auf beiden Seiten der Gleich. 3): $-3xy$, so erhält man:

$$c) \;.\;.\;.\; (x-y)^2 = 2r^2 - 3xy$$

**Formeln:**

Für eine Halbkugel:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } V = \frac{2}{3}\pi r^3 \\ \text{II. } O = 3\pi r^2 \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 147)}$$

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{III. } V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \text{ (s. Erkl. 53, S. 25)}$$

$$\text{IV. } O = \pi[s(R+r) + R^2 + r^2] \text{ (s. Erkl. 148)}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den grösseren der gesuchten Radien der Kegelgrundflächen mit $x$, den kleineren mit $y$ und berücksichtigt man, dass die Höhe $H$ des Stumpfs gleich der Höhe der Halbkugel, also gleich dem gegebenen Radius $r$ dieser Halbkugel ist und dass ferner nach der Erkl. 127, S. 62, zwischen der Seitenlinie $s$ eines Kegelstumpfs den Radien $R$ und $r$ der Grundkreise und der Höhe $H$, die Relation besteht:

$$s^2 = H^2 + (R-r)^2,$$

dass also in dieser Aufgabe

$$s = \sqrt{r^2 + (x-y)^2} \text{ ist,}$$

so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln I. bis IV. die Bestimmungsgleich.:

$$1)\; \frac{\pi \,.\, r}{3}(x^2 + xy + y^2) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$2)\; \pi\left[\sqrt{r^2 + (x-y)^2}\,.\,(x+y) + x^2 + y^2\right] = 3\pi r^2$$

Diese Gleichungen reduziert ergeben:

$$3)\; x^2 + xy + y^2 = 2r^2$$

$$4)\; \sqrt{r^2 + (x-y)^2}\,.\,(x+y) + x^2 + y^2 = 3r^2$$

Bringt man die Gleichung 4) wie in der Erkl. 149 angegeben ist, auf eine einfachere Form, so resultieren die Gleichungen:

Werden nunmehr in Gleichung 4) die für: $x^2+y^2$, $x+y$ und $(x-y)^2$ gefundenen Werte aus den Gleich. a) bis c) substituiert, so geht die Gleich. 4) über, in:

d) $\sqrt{r^2+2r^2-3xy}\,.\,\sqrt{2r^2+xy}+2r^2-xy = 3r^2$

Diese Gleichung 5) reduziert gibt der Reihe nach:

$$\sqrt{3r^2-3xy}\,.\,\sqrt{2r^2+xy} = r^2-xy$$

$$\sqrt{(3r^2-3xy)(2r^2+xy)} = r^2-xy$$

$$(3r^2-3xy)\,.\,(2r^2+xy) = (r^2-xy)^2$$

$$6r^4-6r^2xy+3r^2xy-3x^2y^2 = r^4-2r^2xy+x^2y^2$$

$$5r^4-5r^2xy-4x^2y^2 = 0$$

oder:

f) . . . $4x^2y^2+5r^2xy = 5r^4$

Betrachtet man in dieser Gleichung $xy$ als eine Unbekannte und löst diese Gleichung nach $xy$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$x^2y^2+\frac{5r^2}{4}\cdot xy = \frac{5r^4}{4}$$

$$(xy)^2+\frac{5r^2}{4}\cdot xy+\left(\frac{5r^2}{8}\right)^2 = \frac{5r^4}{4}+\left(\frac{5r^2}{8}\right)^2$$

$$\left(xy+\frac{5r^2}{8}\right)^2 = \frac{5r^4}{4}+\frac{25r^4}{64}$$

$$xy+\frac{5r^2}{8} = \pm\sqrt{\frac{5\,.\,16r^4+25r^4}{64}}$$

$$xy = -\frac{5r^2}{8}\pm\frac{r^2}{8}\sqrt{105}$$

Da das Produkt der beiden Radien $x$ und $y$ nicht negativ werden kann, so ist hiernach:

g) . . . $xy = \frac{r^2}{8}(-5+\sqrt{105})$

**Erkl. 150.** Aus den nebensteh. Gleichungen:

3) $x^2+xy+y^2 = 2r^2$

5) $x\,.\,y = \frac{r^2}{8}\cdot(-5+\sqrt{105})$

findet man $x$ und $y$, wie folgt:

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$x^2+2xy+y^2 = 2r^2+\frac{r^2}{8}\cdot(-5+\sqrt{105})$$

$$(x+y)^2 = 2r^2-\frac{5r^2}{8}+\frac{r^2}{8}\sqrt{105}$$

$$x+y = \sqrt{\frac{11r^2}{8}+\frac{r^2}{8}\sqrt{105}} = \sqrt{\frac{r^2}{4}\cdot\frac{11+\sqrt{105}}{2}}$$

oder:

a) . . . $x+y = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}$

Subtrahiert man das dreifache Produkt der Gleich. 5) von Gleich. 3), so erhält man:

$$x^2-2xy+y^2 = 2r^2-\frac{3r^2}{8}\cdot(-5+\sqrt{105})$$

$$(x-y)^2 = 2r^2+\frac{15r^2}{8}-\frac{3r^2}{8}\sqrt{105}$$

3) $x^2+xy+y^2 = 2r^2$

5) $x\,.\,y = \frac{r^2}{8}(-5+\sqrt{105})$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man, wie aus der Erkl. 150 ersichtlich ist:

$$x = \frac{r}{4}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}+\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}\right)$$

und

$$y = \frac{r}{4}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}-\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}\right)$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel wird:

a) $x = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{11+10{,}247}{2}}+\sqrt{\frac{31-3.10{,}247}{2}}\right)$

und

b) $y = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}-\sqrt{\frac{31-3.\sqrt{105}}{2}}\right)$

und hieraus ergeben sich für die gesuchten Radien $x$ und $y$ die Werte:

$$x = 2{,}709828 \text{ dm}$$

$$y = 2{,}179223 \text{ dm}$$

$$x-y=\sqrt{\frac{31r^2}{8}-\frac{3r^2}{8}\sqrt{105}}$$

$$x-y=\sqrt{\frac{r^2}{4}\cdot\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots x-y=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}$$

Man hat nunmehr die Gleichungen:

$$\text{a)} \ldots x+y=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}$$

$$\text{b)} \ldots x-y=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}$$

Durch Addition derselben erhält man endlich:

$$2x=\frac{r}{2}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}+\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}\right)$$

oder:

$$\text{c)}\ x=\frac{r}{4}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}+\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}\right)$$

Durch Subtraktion der Gleichungen a) und b) erhält man:

$$2y=\frac{r}{2}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}-\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}\right)$$

oder:

$$\text{d)}\ y=\frac{r}{4}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}-\sqrt{\frac{31-3\sqrt{105}}{2}}\right)$$

---

**Aufgabe 122.** Wie verhalten sich die Volumina eines Kegels, einer Kugel und eines Cylinders zu einander, wenn die Durchmesser der Grundflächen und die Höhen des Kegels und des Cylinders dem Durchmesser der Kugel gleich sind?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

$$\text{I.}\quad V=\frac{R^2\pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50, S. 23)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II.}\quad V=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29)}$$

Für einen Cylinder:

$$\text{III.}\quad V=R^2\pi H \quad \text{(s. Erkl. 33, S. 14).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man mit $V$ das Volumen des Kegels, mit $V_1$ das der Kugel und mit $V_2$ das des Cylinders, und ist ferner der Durchmesser der Kugel $=2r$, also sind die Grundflächenradien des Kegels und des Cylinders $=r$, die Höhen beider Körper $=2r$, so hat man mit Benutzung der vorsteh. Formeln I. bis III. die Proportion:

$$V:V_1:V_2=\frac{r^2\pi\,.\,2r}{3}:\frac{4\pi r^3}{3}:r^2\pi\,.\,2r$$

oder:

$$V:V_1:V_2=\frac{2\pi r^3}{3}:\frac{4\pi r^3}{3}:2r^3\pi$$

Diese Proportion nach der Erkl. 82, Seite 44 gekürzt, gibt:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$$

oder:

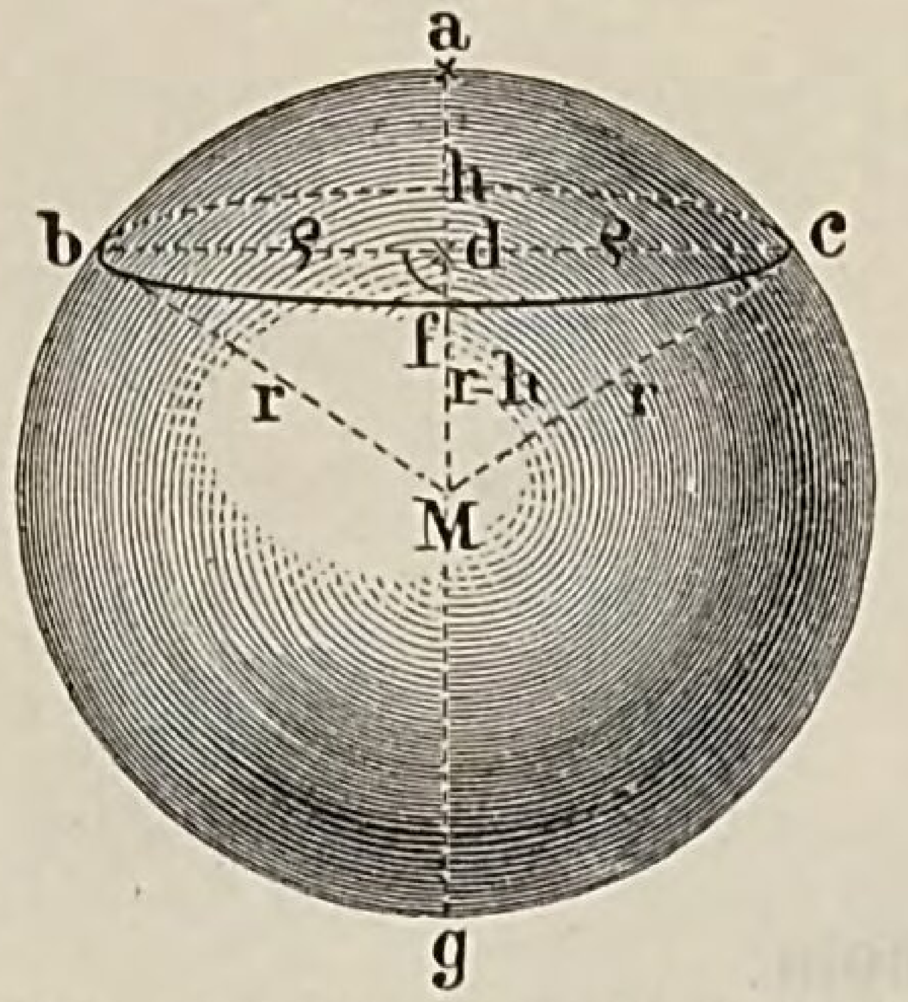
$$V : V_1 : V_2 = 1 : 2 : 3$$

Das gesuchte Verhältnis ist also $= 1 : 2 : 3$

---

**Aufgabe 123.** Ein Kugelsegment hat den halben Kubikinhalt des Kegels, welcher ihn zu einem Kugelsektor ergänzt; der Kugelradius $r$ ist $= 0{,}3$ m; wie gross ist die Höhe des Kugelsegments und wie gross ist der Radius dessen Grundkreises?

Figur 30.




**Formeln:**

Für ein Kugelsegment:

I. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ (s. Erkl. 151).

Für einen Kugelsektor:

II. $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ (s. Erkl. 71, S. 33).

**Auflösung.** Da das Segment $abfc$, siehe Figur 30, an Kubikinhalt halb so gross sein soll als der es zu dem Sektor $abfcM$ ergänzende Kegel $Mbfc$, so ist das Volumen des Segments $abfc$ ein Drittel so gross als das Volumen des Sektors $abfcM$. Bezeichnet man die gesuchte Höhe des Segments mit $x$, so besteht mit Benutzung der vorsteh. Formeln die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots \frac{\pi x^2}{3}(3r - x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\pi r^2 x$$

Diese Gleichung reduziert gibt:

$$2) \ldots x(3r - x) = \frac{2r^2}{3}$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 152 für die gesuchte Höhe:

$$a) \ldots x = r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)$$

als allgemeine Lösung des 1. Teils der Aufgabe.

Bezeichnet man ferner den gesuchten Radius $bd$ des Grundkreises $bfc$ des Segments (siehe Figur 30) mit $y$, so erhält man aus dem rechtwinkligen $bdM$ die Relation:

$$y^2 = r^2 - (r - h)^2$$

mithin:

$$y = \sqrt{r^2 - r^2 + 2rh - h^2}$$

$$3) \ldots y = \sqrt{h(2r - h)}$$

Setzt man für die Höhe $h = x$ des Segments, den mittelst vorsteh. Gleich. a) gefundenen Wert, so wird:

**Erkl. 151.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines Kugelsegments (Kugelabschnitts), dessen Höhe mit $h$ und dessen zugehöriger Kugelradius mit $r$ bezeichnet wird, ist:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Erkl. 152.** Nebensteh. Gleichung 2):

$$x(3r - x) = \frac{2}{3}r^2$$

nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$3rx - x^2 = \frac{2}{3}r^2$$

$$x^2 - 3rx = -\frac{2}{3}r^2$$

$$x^2 - 3rx + \left(\frac{3r}{2}\right)^2 = -\frac{2}{3}r^2 + \left(\frac{3r}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3r}{2}\right)^2 = -\frac{2}{3}r^2 + \frac{9r^2}{4}$$

$$x - \frac{3r}{2} = \pm\sqrt{\frac{-8r^2 + 27r^2}{12}}$$

$$x = \frac{3r}{2} \pm \sqrt{\frac{19r^2}{12}}$$

$$x = \frac{3r}{2} \pm \sqrt{\frac{57r^2}{36}}$$

$$x = \frac{3r}{2} \pm \frac{r}{6}\sqrt{57}$$

$$x = r\left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)$$

In Betreff der in dieser Gleichung vorkommenden doppelten Vorzeichen, ist zu beachten, dass das Vorzeichen + unbrauchbar ist, indem hiernach die Höhe $x$ grösser als $2r$ sein müsste, was nicht möglich ist, somit resultiert:

$$x = r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)$$

**Erkl. 153.** Setzt man in den nebensteh. Gleichungen:

$$\text{a)} \ldots x = r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)$$

$$\text{b)} \ldots y = r\sqrt{\frac{\sqrt{57}-5}{6}}$$

$r = 0{,}3$, so erhält man, da $\sqrt{57} = 7{,}550$ ist:

$$x = 0{,}3\left(\frac{3}{2} - \frac{7{,}550}{6}\right)$$

$$y = 0{,}3\sqrt{\frac{7{,}550-5}{6}}$$

oder:

$$x = 0{,}3 \cdot \frac{1{,}450}{6} = \frac{1{,}450}{20} = 0{,}0725$$

$$y = 0{,}3\sqrt{\frac{2{,}550}{6}} = 0{,}3\sqrt{0{,}425} = 0{,}1955$$

$$y = \sqrt{r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)\cdot\left[2r - r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)\right]}$$

od.:

$$y = \sqrt{r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)\cdot\left(2r - \frac{3r}{2} + \frac{r}{6}\sqrt{57}\right)}$$

$$y = \sqrt{r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)\cdot\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{6}\sqrt{57}\right)}$$

$$y = \sqrt{r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)\cdot r\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{57}\right)}$$

$$y = \sqrt{r^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{57} + \frac{3}{12}\sqrt{57} - \frac{57}{36}\right)}$$

$$y = r\sqrt{\frac{1}{6}\sqrt{57} - \frac{5}{6}}$$

hieraus erhält man für den gesuchten Radius

$$\text{b)} \ldots y = r\sqrt{\frac{\sqrt{57}-5}{6}}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man somit, wenn in den Gleichungen a) und b) für $r = 0{,}3$ gesetzt wird, siehe Erkl. 153:

$$x = 0{,}0725\,\text{m}$$
$$y = 0{,}1955\,\text{m}$$

---

**Aufgabe 124.** Aus jeder von zwei Kugeln, deren Radien sich wie $m:n = 10:7$ verhalten, wird ein Kugelausschnitt genommen. Wenn nun das Volumen $V$ des Sektors der 2. Kugel $= 147$ ccm ist, und die den Sektoren zugehörigen Segmente gleiche Höhen haben; wie gross ist alsdann das Volumen des Sektors der 1. Kugel?

**Formel:**

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h \quad \text{(s. Erkl. 71, S. 33).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man das gesuchte Volumen des Sektors der 1. Kugel mit $x$, den unbekannten Kugelradius mit $y$, die unbekannte Höhe des jenem Sektor zugehörigen Segments mit $u$; ist ferner $V$ das Volumen des Sektors der 2. Kugel, $z$ deren unbekannter Radius und die Höhe des diesem Sektor zugehörigen Segments auch $= u$, so bestehen gemäss der Aufgabe und nach vorsteh. Formel, die Gleichungen:

$$1) \ldots x = \frac{2}{3}\pi y^2 . u$$

$$2) \ldots V = \frac{2}{3}\pi z^2 . u$$

$$3) \ldots y:z = m:n$$

Zur Bestimmung der gesuchten Grösse $x$ dividiere man Gleich. 2) in Gleich. 1) wonach man erhält:

$$\frac{x}{V} = \frac{y^2}{z^2}$$

Da nun aus Gleich. 3) sich ergibt, dass:

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

also: $\frac{y^2}{z^2} = \frac{m^2}{n^2}$ ist, so erhält man:

$$\frac{x}{V} = \frac{m^2}{n^2}$$

oder: $x = \frac{m^2}{n^2} \cdot V$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht des in der Aufgabe gegebenen Zahlenbeispiels ergibt sich hiernach:

$$x = \frac{10^2}{7^2} \cdot 147 = \frac{100}{49} \cdot 147 = 100 \,.\, 3$$

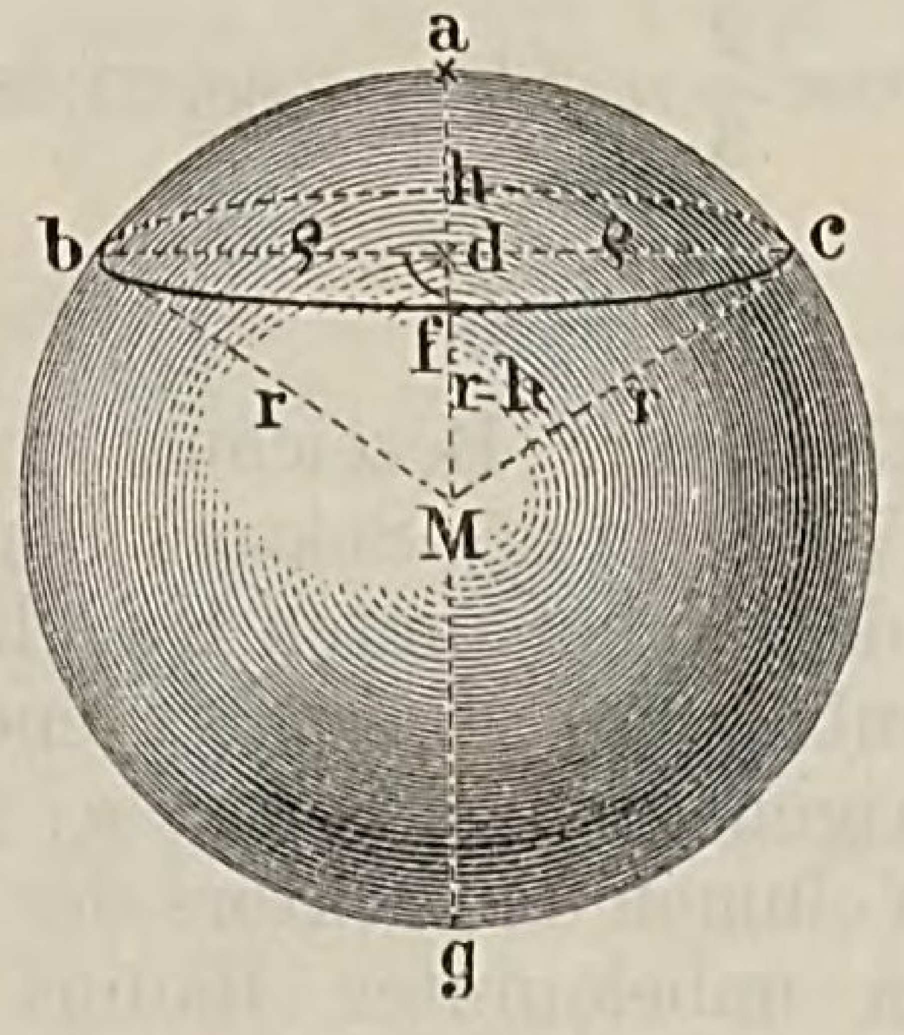
oder:

$$x = 300 \text{ ccm}$$

---

**Aufgabe 125.** Aus dem gegebenen Kubikinhalt $V = 452{,}304$ cbm eines Kugelsegments, dessen Calotte $n = 2$ mal so gross ist, als seine Grundfläche, den Radius der Kugel zu berechnen.

Figur 31.




**Formeln:**

Für ein Kugelsegment:

I. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ (s. Erk. 151, S. 78)

Für eine Calotte:

II. $J = 2\pi r h$ (s. Erkl. 63, S. 29).

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Radius der zu dem Segment gehörigen Kugel mit $x$, die unbekannte Höhe des Segments mit $y$, den unbekannten Radius der Grundfläche dieses Segments mit $z$, so kann man unter Benutzung der vorsteh. Formeln und mit Rücksicht, dass in dem rechtwinkligen Dreieck $bdM$, siehe Figur 31, die Relation besteht:

$$\overline{bd}^2 = \overline{bM}^2 - \overline{dM}^2$$

die drei Gleichungen aufstellen:

$$1) \ldots V = \frac{\pi y^2}{3}(3x - y)$$

$$2) \ldots 2\pi x y = n \,.\, \pi z^2$$

$$3) \ldots z^2 = x^2 - (x - y)^2$$

Diese drei Gleichungen reduziert und geordnet ergeben:

$$4) \ldots 3xy^2 - y^3 = \frac{3V}{\pi}$$

$$5) \ldots 2xy = nz^2$$

$$6) \ldots z^2 = 2xy - y^2$$

**Erkl. 154.** Aus nebensteh. Gleich.:

$$4) \ldots 3xy^2 - y^3 = \frac{3V}{\pi}$$

$$5) \ldots 2xy = nz^2$$

$$6) \ldots z^2 = 2xy - y^2$$

erhält man $x$, wie folgt:

Setzt man den Wert für $z^2$ aus Gleich. 6) in Gleich. 5), so ergibt sich:

$$2xy = 2nxy - ny^2$$

oder, wenn diese Gleichung mit $y$ dividiert wird:

$$2x = 2nx - ny$$

Hiernach ist:

$$ny = 2nx - 2x$$

oder:

$$ny = 2x(n-1)$$

$$\text{a)} \ldots y = \frac{2x(n-1)}{n}$$

Substituiert man nunmehr diesen Wert für $y$ in Gleich. 4), so erhält man:

$$3x \cdot \left(\frac{2x(n-1)}{n}\right)^2 - \left(\frac{2x(n-1)}{n}\right)^3 = \frac{3V}{\pi}$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$3x \cdot \frac{4x^2(n-1)^2}{n^2} - \frac{8x^3(n-1)^3}{n^3} = \frac{3V}{\pi}$$

$$\frac{12x^3(n-1)^2 \cdot n}{n^3} - \frac{8x^3(n-1)^3}{n^3} = \frac{3V}{\pi}$$

$$x^3\left(\frac{12(n-1)^2 \cdot n - 8(n-1)^3}{n^3}\right) = \frac{3V}{\pi}$$

$$x^3 = \frac{3V \cdot n^3}{\pi \cdot [12(n-1)^2 \cdot n - 8(n-1)^3]}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3Vn^3}{\pi \cdot 4(n-1)^2 \cdot [3n - 2(n-1)]}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3Vn^3}{\pi \cdot 4(n-1)^2 \cdot (3n - 2n + 2)}}$$

oder:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3Vn^3}{4\pi(n-1)^2(n+2)}}$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man, wie aus der Erkl. 154 ersichtlich ist, für den gesuchten Kugelradius:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3Vn^3}{4\pi(n-1)^2(n+2)}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 452{,}3042^3}{4\pi(2-1)^2(2+2)}}$$

oder:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 452{,}304 \cdot 8}{4\pi \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 452{,}304}{2\pi}}$$

$$x = \sqrt[3]{3 \cdot 72} = \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot 8} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = 3 \cdot 2$$

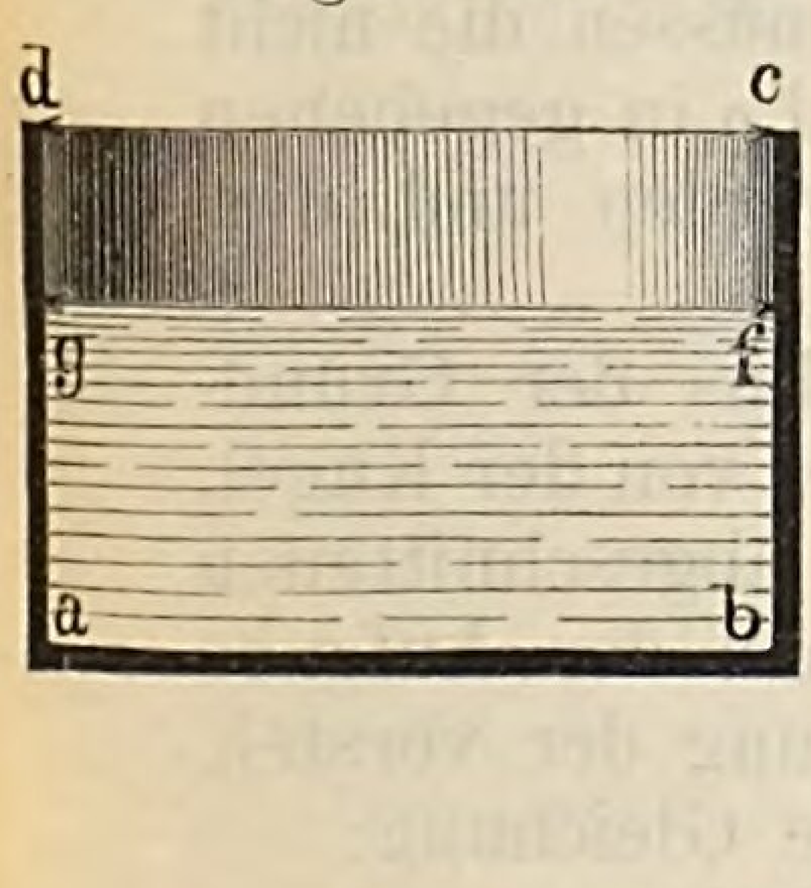
$$x = 6$$

Der gesuchte Radius ist also $= 6$ m

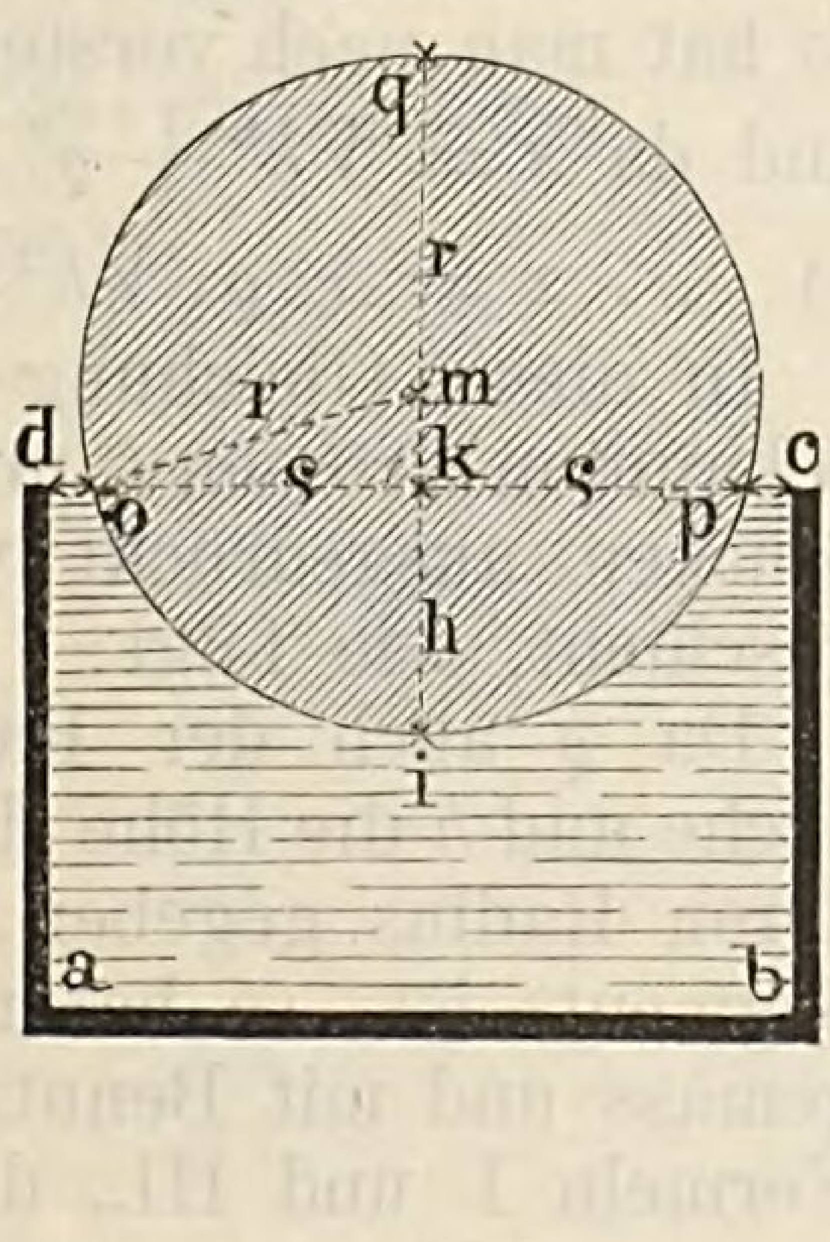
---

**Aufgabe 126.** In einem cylindrischen Gefäss, dessen Grundfläche einen Radius $R$ von 16 cm Länge hat, und dessen Höhe $H = 26{,}803$ dm beträgt, befinden sich 212 Liter Wasser. Wie gross ist der Radius einer Kugel, die 141 mm in das Wasser eintauchen muss, damit es den Cylinder ausfüllt?

Figur 32.




Figur 33.




**Formeln:**

Für ein Kugelsegment:

$$\text{I. } V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \text{ (s. Erkl. 151, S. 78)}$$

Für einen Cylinder:

$$\text{II. } V = R^2\pi \cdot H \text{ (s. Erkl. 33, S. 14).}$$

**Auflösung.** Soll das in dem Gefäss $abcd$, siehe Fig. 32, befindliche Wasser $abfg$ durch Eintauchen der Kugel bis zum Rande des Gefässes gedrängt werden, siehe Figur 33, also das Gefäss ganz ausfüllen, so muss das Volumen $V$ des Teils der Kugel, welcher in das Wasser taucht und ein Kugelsegment mit der gegebenen Höhe $h = 141$ mm ist, gleich dem Volumen $V_1$ des Teils $gfcd$ des Gefässes sein, welches vor dem Eintauchen nicht mit Wasser angefüllt war und hierin besteht der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots V = V_1$$

Da nun 212 Liter $= 212$ cdm sind, so ist das Volumen $V_1$, wenn man die Dimensionen des Gefässes in dm ausdrückt und vorsteh. Formel II. benutzt:

$$2) \ldots V_1 = 1{,}6^2 \cdot \pi \cdot 26{,}803 - 212$$

**Erkl. 155.** Nebensteh. Gleichung 4):

$$\frac{\pi \,.\, 1{,}41^2}{3}(3x - 1{,}41) = 1{,}6^2 \,.\, \pi \,.\, 26{,}803 - 212$$

nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$3x - 1{,}41 = \frac{(1{,}6^2 \,.\, \pi \,.\, 26{,}803 - 212) \,.\, 3}{\pi \,.\, 1{,}41^2}$$

$$3x = \frac{(1{,}6^2 \,.\, \pi \,.\, 26{,}803 - 212) \,.\, 3}{\pi \,.\, 1{,}41^2} + 1{,}41$$

$$x = \frac{(1{,}6^2 \,.\, \pi \,.\, 26{,}803 - 212) \,.\, 3}{3 \,.\, \pi \,.\, 1{,}41^2} + \frac{1{,}41}{3}$$

$$x = \frac{1{,}6^2 \,.\, \pi \,.\, 26{,}803 - 212}{\pi \,.\, 1{,}41^2} + 0{,}47$$

$$x = \frac{2{,}56 \,.\, 84{,}188 - 212}{3{,}141 \,.\, 1{,}9881} + 0{,}47$$

$$x = \frac{215{,}521792 - 212}{6{,}2446221} + 0{,}47$$

$$x = \frac{3{,}521792}{6{,}24462} + 0{,}47$$

$$x = 0{,}57 + 0{,}47$$

$$x = 1{,}04$$

Bezeichnet man ferner den gesuchten Radius der Kugel mit $x$ und drückt die Höhe des in das Wasser tauchenden Segments in dm aus, so hat man nach vorstehender Formel I.:

$$3) \;\ldots\; V = \frac{\pi \,.\, 1{,}41^2}{3}(3x - 1{,}41)$$

Aus den Gleich. 1) bis 3) ergibt sich nunmehr die Bestimmungsgleichung:

$$4) \;\ldots\; \frac{\pi \,.\, 1{,}41^2}{3}(3x - 1{,}41) = 1{,}6^2 \,.\, \pi \,.\, 26{,}803 - 212$$

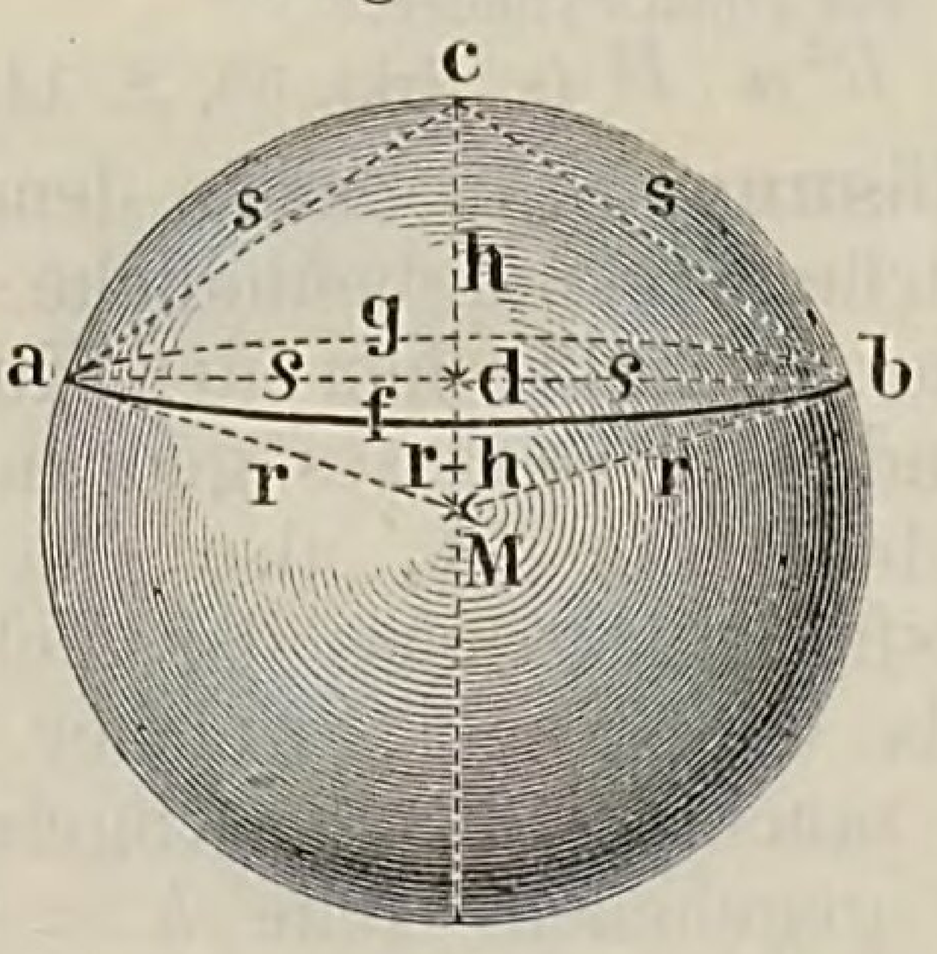
Aus dieser Gleichung erhält man, wie aus der Erkl. 155 ersichtlich ist, für den gesuchten Kugelradius $x$:

$$x = 1{,}04 \text{ dm}$$

---

**Aufgabe 127.** Von einer Kugel, deren Radius $r = 5$ dm ist, soll ein Segment so abgeschnitten werden, dass sich der Inhalt desselben zum Inhalt eines geraden Kegels von derselben Grundfläche und Höhe wie $m : n = 8 : 5$ verhält. Wie gross ist a) der Mantel des Kegels und wie gross ist b) die zu dem Kugelsegment gehörige Calotte?

Figur 34.




**Erkl. 156.** Aus nebensteh. Gleichungen:

$$2) \;.\,.\; \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) : \frac{\varrho^2 \pi h}{3} = m : n$$

$$3) \;.\,.\; \varrho^2 = r^2 - (r - h)^2$$

findet man $h$ und $\varrho$ auf folgende Weise.

Beide Gleichungen reduziert ergeben:

$$4) \;.\,.\; \frac{h(3r - h)}{\varrho^2} = \frac{m}{n}$$

$$5) \;.\,.\; \varrho^2 = 2rh + h^2$$

Setzt man den Wert für $\varrho^2$ aus Gleich. 5) in Gleich. 4), so ist:

**Formeln:**

Für ein Kugelsegment:

I. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ (s. Erkl. 151, S. 78)

Für einen Kegel:

II. $M = \pi R s$ (s. Erkl. 49, S. 22)

III. $V = \frac{R^2 \pi H}{3}$ (s. Erkl. 50, S. 23)

Für eine Calotte:

IV. $J = 2\pi r h$ (s. Erkl. 63, S. 29).

## Auflösung.

**a) Berechnung des Kegelmantels.**

Ist $x$ der gesuchte Mantel des Kegels $cafbg$, $\varrho$ der Radius seiner Grundfläche, $h$ seine Höhe und $s$ seine Seitenlinie, so hat man nach vorstehender Formel II. und da $s = \sqrt{h^2 + \varrho^2}$ ist, die Gleich.:

$$1) \;\ldots\; x = \pi \,.\, \varrho \,.\, \sqrt{h^2 + \varrho^2}$$

In dieser Gleichung müssen die nicht bekannten Grössen $h$ und $\varrho$ in gegebenen Stücken ausgedrückt werden und dies geschieht, wie folgt:

Da $\varrho$ auch der Radius der Grundfläche und $h$ die Höhe des von der Kugel, deren Radius gegeben, abgeschnittenen Segments ist, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorsteh. Formeln I. und III., die Gleichung:

$$2) \;\ldots\; \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) : \frac{\varrho^2 \pi h}{3} = m : n$$

$$\frac{h(3r-h)}{2rh-h^2}=\frac{m}{n}$$

hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$\frac{3r-h}{2r-h}=\frac{m}{n}$$

$$3nr-hn=2mr-hm$$

$$hm-hn=2mr-3nr$$

$$h(m-n)=r(2m-3n)$$

oder:

$$\text{a)}\ \ldots\ h=r\cdot\frac{2m-3n}{m-n}$$

Setzt man den für $h$ gefundenen Wert in Gleich. 5) ein, so resultiert:

$$\varrho^2=2r\cdot r\cdot\frac{2m-3n}{m-n}-r^2\cdot\left(\frac{2m-3n}{m-n}\right)^2$$

oder:

$$\varrho^2=r^2\cdot\frac{2m-3n}{m-n}\left(2-\frac{2m-3n}{m-n}\right)$$

$$\varrho^2=r^2\cdot\frac{2m-3n}{m-n}\cdot\frac{2m-2n-2m+3n}{m-n}$$

$$\varrho^2=r^2\cdot\frac{2m-3n}{(m-n)^2}\cdot n$$

$$\varrho=\sqrt{\frac{r^2\cdot(2m-3n)\cdot n}{(m-n)^2}}$$

$$\text{b)}\ \ldots\ \varrho=\frac{r}{m-n}\cdot\sqrt{(2m-3n)n}$$

Ferner ergibt sich aus dem bei $d$ rechtwinkligen Dreieck $adM$, die weitere Gleichung:

$$3)\ \ldots\ \varrho^2=r^2-(r-h)^2$$

Aus den Gleichungen 2) und 3) findet man, wie aus der Erkl. 156 ersichtlich ist:

$$\text{a)}\ \ldots\ h=r\cdot\frac{2m-3n}{m-n}$$

$$\text{b)}\ \ldots\ \varrho=\frac{r}{m-n}\sqrt{(2m-3n)n}$$

Substituiert man nunmehr diese für $h$ und $\varrho$ gefundenen Werte in Gleich. 1), so erhält man nach gehöriger Reduktion, wie aus der Erkl. 157 ersichtlich ist, für den gesuchten Kegelmantel $x$:

$$x=\frac{\pi r^2(2m-3n)}{(m-n)^2}\cdot\sqrt{2n(m-n)}$$

als **allgemeine** Lösung des 1. Teils der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel wird hiernach:

$$x=\frac{\pi\cdot 5^2(16-15)}{(8-5)^2}\cdot\sqrt{2\cdot 5(8-5)}$$

oder:

$$x=\frac{\pi\cdot 25}{9}\cdot\sqrt{30}$$

und hieraus erhält man:

$$x=47{,}798\text{ dm}$$

**Erkl. 157.** Aus den nebensteh. Gleich. 1), a) und b) erhält man:

$$x=\pi\cdot\frac{r}{m-n}\cdot\sqrt{(2m-3n)n}\cdot\sqrt{\left(r\cdot\frac{2m-3n}{m-n}\right)^2+\left(\frac{r}{m-n}\cdot\sqrt{(2m-3n)n}\right)^2}$$

Die rechte Seite reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x=\frac{\pi r}{m-n}\cdot\sqrt{(2m-3n)n}\cdot\sqrt{\frac{r^2(2m-3n)^2}{(m-n)^2}+\frac{r^2(2m-3n)n}{(n-n)^2}}$$

$$x=\frac{\pi r}{m-n}\cdot\sqrt{\frac{r^2(2m-3n)^3n+r^2(2m-3n)^2n^2}{(m-n)^2}}$$

$$x=\frac{\pi r}{m-n}\cdot\sqrt{\frac{r^2(2m-3n)^2}{(m-n)^2}\cdot n(2m-3n+n)}$$

$$x=\frac{\pi r\cdot r(2m-3n)}{(m-n)\cdot(m-n)}\cdot\sqrt{n(2m-2n)}$$

$$x=\frac{\pi r^2(2m-3n)}{(m-n)^2}\cdot\sqrt{2n(m-n)}$$

#### b) Berechnung der Calotte.

Ist $y$ der gesuchte Inhalt der Calotte, welche dem Segment angehört, das mit jenem Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat, so besteht, wenn $r$ den Radius der zugehörigen Kugel und $h$ die Höhe der Calotte bedeutet, nach vorstehender Formel IV, die Bestimmungsgleichung:

$$1)\ \ldots\ y=2\pi rh$$

Setzt man hierin für $h$ den in der Erkl. 156 mittelst der Gleich. a)

$$h=r\cdot\frac{2m-3n}{m-n}$$

berechneten Wert, so erhält man für den gesuchten Inhalt $y$ der Calotte:

$$y = 2\pi r^2 \cdot \frac{2m - 3n}{m - n}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel wird hiernach:

$$y = 2 . 3{,}141 . 5^2 \cdot \frac{2 . 8 - 3 . 5}{8 - 5}$$

oder:

$$y = 6{,}282 . 25 \cdot \frac{1}{3} = 2{,}094 . 25$$

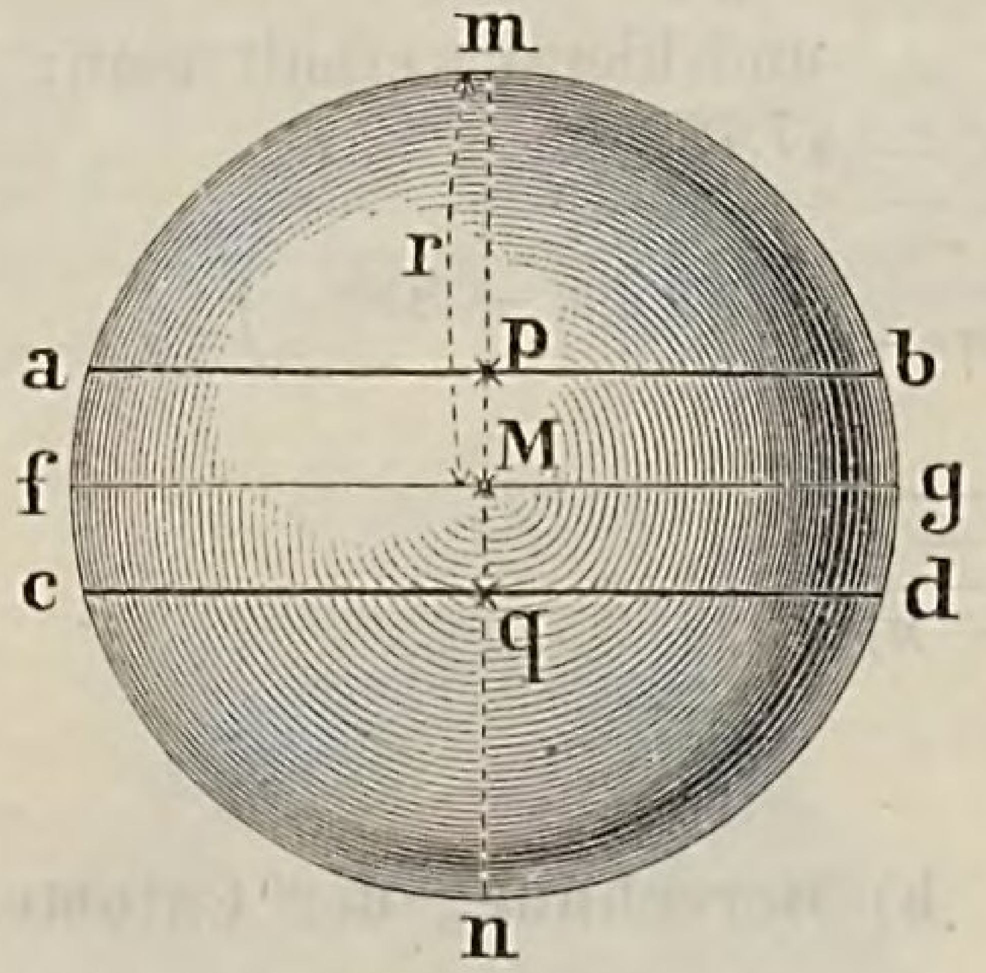
und hieraus erhält man:

$$y = 52{,}35 \text{ dm}$$

---

**Aufgabe 128.** Wie verhält sich der Kubikinhalt einer Kugelschicht, welche die Höhe $2h = 6$ dm hat und von einem grössten Kreis der zugehörigen Kugel, deren Radius $r = 4$ dm ist, halbiert wird, zu dem Kubikinhalt eines Segments derselben Kugel, welches ebenfalls die Höhe $2h = 6$ dm hat?

Figur 35.




**Erkl. 158.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ einer Kugelschicht ist, wenn mit $r$ der Radius der zugehörigen Kugel, mit $H$ und $H_1$ die Höhen der Segmente bezeichnet werden, aus deren Differenz die Kugelschicht besteht:

$$V = \pi[(H^2 - H_1^2)\, r - \frac{1}{3}\,(H^3 - H_1^3)]$$

Man siehe den Abschnitt des ersten Buchs der Körperberechnungen, welcher über **die Kugel** handelt.

**Formeln:**

Für eine Kugelschicht:

$$\text{I. } V = \pi \left[ (H^2 - H_1^2)\, r - \frac{1}{3}(H^3 - H_1^3) \right]$$

(s. Erkl. 158).

Für ein Kugelsegment:

$$\text{II. } V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$ (s. Erkl. 151, S. 78).

**Auflösung.** Da die in der Aufgabe erwähnte Kugelschicht $abdc$, s. Fig. 35, durch den grössten Kreis $fg$ der Kugel halbiert wird, so ist das Volumen $V$ der Schicht $abdc$ = dem doppelten Volumen der Schicht $abgf$. Da man nun das Volumen der Schicht $abgf$ nach vorstehender Formel I. findet, wenn man in derselben $H = Mm = r$ und $H_1 = pm = Mm - Mp = r - \frac{pq}{2} = r - h$ setzt, so erhält man hiernach für das Volumen $V$ der Schicht $abdc$:

$$V = 2 . \pi \left[ \left( r^2 - (r - h)^2 \right) r - \frac{1}{3} \left( r^3 - (r - h)^3 \right) \right]$$

oder:

$$V = 2\pi \left[ (r^2 - r^2 + 2rh - h^2)\, r - \frac{1}{3}\,(r^3 - r^3 + 3r^2h - 3rh^2 + h^3) \right]$$

$$V = 2\pi \left[ 2r^2h - rh^2 - r^2h + rh^2 - \frac{1}{3}\, h^3 \right]$$

$$V = 2\pi \left( r^2h - \frac{1}{3}\, h^3 \right)$$

$$V = \frac{2\pi}{3} \left( 3r^2h - h^3 \right)$$

mithin ist:

$$\text{a) } \ldots \; V = \frac{2\pi h}{3}\,(3r^2 - h^2)$$

Für das Volumen $V_1$ des Segments, dessen Höhe $= 2h$, nämlich gleich der Höhe der Schicht ist, findet man mittelst vorstehender Formel II.:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot (2h)^2}{3}(3r - 2h)$$

oder:

$$\text{b)} \ldots V_1 = \frac{4\pi h^2}{3}(3r - 2h)$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 = \frac{2\pi h}{3}(3r^2 - h^2) : \frac{4\pi h^2}{3}(3r - 2h)$$

oder:

$$V : V_1 = (3r^2 - h^2) : 2h(3r - 2h)$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$V : V_1 = (3 \cdot 4^2 - 3^2) : 2 \cdot 3\,(3 \cdot 4 - 2 \cdot 3)$$

oder:

$$V : V_1 = 39 : 36 = 13 : 12$$

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 129.** Wie gross ist die Kante eines Würfels, welcher seinem Kubikinhalt nach gleich der Summe von zwei anderen Würfeln ist, deren Kanten $a$ u. $b$. bezw. $= 4$ u. 5 dm sind?

**Aufgabe 130.** Wie gross ist die Kante eines Würfels, welcher seiner Oberfläche nach gleich der Differenz von zwei anderen Würfeln ist, deren Kanten $a$ u. $b$, bezw. $= 4$ u. 5 dm sind?

**Aufgabe 131.** Wie gross muss die Kante eines Würfels gemacht werden, welcher den $n$-fachen Kubikinhalt eines andern, dessen Kante $a = 20$ cm beträgt, enthalten soll?

**Aufgabe 132.** Man soll die Kante eines Würfels berechnen, welcher an Volumen gleich der Summe dreier Würfel ist, deren Kanten $a = 0{,}3$, $b = 0{,}6$ und $c = 0{,}9$ m sind.

**Aufgabe 133.** Aus einem eisernen senkrechten ‖ppd, dessen Dimensionen $l = 3{,}4$ m, $b = 1{,}5$ m und $h = 5$ m sind, soll ein Würfel gegossen werden; wie gross wird dessen Kante?

**Aufgabe 134.** Man soll die Kante eines Würfels berechnen, dessen Oberfläche gleich der Oberfläche eines geraden ‖ppds ist, dessen Dimensionen $l = 3{,}4$ dm, $b = 1{,}5$ dm und $h = 5$ dm sind.

**Aufgabe 135.** Wie viel Würfel von 0,9 dm Kantenlänge kann man aus einem andern Würfel, dessen Kante $= 7{,}2$ dm ist, bilden?

**Aufgabe 136.** Die Kante eines Würfels misst 12 m, um wieviel ist die Kante eines Würfels von 3 fachem Inhalte grösser:

**Aufgabe 137.** Die Volumina zweier Würfel betragen zusammen $S = 13{,}895$ cbm, die Summe ihrer Kantenlängen ist $s = 3{,}5$ m; wie lang sind die Kanten der Würfel?

---

**Aufgabe 138.** Wie lang sind die Kanten zweier Würfel, wenn die Kante des einen um $d = 0{,}3$ m länger ist als die des andern, und wenn die Differenz $D$ ihrer Volumina $= 48{,}627$ cbm beträgt?

---

**Aufgabe 139.** Wird die Kante eines Würfels um 1,6 m grösser angenommen, so vergrössert sich dadurch die Oberfläche um 58,5 m; wie gross war ursprünglich das Volumen des Würfels?

---

**Aufgabe 140.** Wenn die Kante eines Würum 0,5 m kleiner angenommen wird, so wird das Volumen um 21,2 cbm kleiner; wie gross war die ursprüngliche Würfelkante?

---

**Aufgabe 141.** Zwei ähnliche Gefässe von prismatischer Form fassen zusammen 13,5 Liter, die Höhe des einen beträgt 1,8 dm, die des andern 2,4 dm; wie viel fasst jedes der Gefässe?

**Andeutung:** Analog der Aufgabe 90, S. 43.

---

**Aufgabe 142.** Ueber einem regulären Sechseck, dessen Seite $= a$ ist, soll ein senkrechtes Prisma und eine senkrechte Pyramide von gleicher Höhe so konstruiert werden, dass die Mantelfläche des Prismas so gross werde, als die der Pyramide. Wie gross ist die gemeinschaftliche Höhe beider Körper?

**Andeutung.** Analog der Aufgabe 91.

---

**Aufgabe 143.** Aus einem bleiernen Würfel, dessen Kante $a$ cm lang ist, soll eine gerade quadratische Pyramide, deren Höhe $= {}^3/_5$ einer ihrer Grundkanten ist, gegossen werden. Wie hoch wird diese Pyramide?

---

**Aufgabe 144.** Die grösste ägyptische Pyramide ist 146 m hoch, ihre Basis ist ein Quadrat, dessen Seite 237 m lang ist und die Spitze des Pantheons befindet sich 79 m über der Grundfläche der Pyramide. Man denke sich nun ein Prisma, dessen quadratische Basis als Seite die Höhe des Pantheons hat und welches gleiche Höhe mit der Pyramide selbst hat; in welchem Verhältnis stehen die Volumina der Pyramide und des gedachten Prismas?

**Anmerkung.** Unter „**Pantheon**" ist hier der Königssaal zu verstehen, welcher sich in einer bestimmten Höhe innerhalb der Pyramide befindet, durch einen aufsteigenden Gang zugänglich, durch zwei seitlich aufsteigende Kanäle ventiliert wird und den granitenen Sarkophag des Königs enthält.

Man siehe auch die Aufgabe 12, S. 10.

---

**Aufgabe 145.** Zwei homologe Kanten zweier ähnlichen Pyramiden sind 4,75 m und 1,25 m lang, die Oberfläche der grösseren beträgt 259,92 qm; wie gross ist die Oberfläche der andern?

**Andeutung:** Analog der Aufgabe 92.

---

**Aufgabe 146.** Zwei homologe Kanten zweier ähnlichen Pyramiden differieren um 2 m, die Oberflächen sind 169 qm und 121 qm; wie gross sind jene Kanten?

---

**Aufgabe 147.** Die Volumina zweier ähnlichen Pyramiden sind 54,872 cdm und 5,832 cdm, eine Kante der ersten Pyramide misst 3,8 m; wie gross ist die homologe Kante der zweiten Pyramide?

**Andeutung:** Analog der Aufgabe 93, S. 46.

**Aufgabe 148.** Die Höhe eines geraden Cylinders zu bestimmen, dessen Mantelfläche gleich der Summe der Mantelflächen $M_1$, $M_2$ und $M_3$ dreier anderer Cylinder ist und dessen Grundfläche einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $s$ einbeschrieben ist.

**Aufgabe 149.** Um wieviel muss man die Höhe eines geraden Cylinders vergrössern, damit der Mantel des vergrösserten Cylinders gleich der Oberfläche des ursprünglichen Cylinders wird?

**Aufgabe 150.** Wird die Höhe eines geraden Cylinders unter Beibehaltung der Grundfläche um $\delta = 11{,}3$ cm vergrössert, so vergrössert sich sein Volumen um $A = 35{,}3$ ccm; wird aber der Radius der Grundfläche unter Beibehaltung der ursprüngl. Höhe um $\varepsilon = 1$ cm verkleinert, so verkleinert sich sein Volumen um $B = 192$ ccm. Wie gross ist das Volumen des ursprünglichen Cylinders?

**Aufgabe 151.** Wird der Radius eines geraden Cylinders um eine bestimmte Grösse $x$ vergrössert und die Höhe des Cylinders um dieselbe Grösse $x$ verkleinert, oder wird der Radius um jene Grösse $x$ verkleinert und die Höhe um dieselbe Grösse $x$ vergrössert, so erhält man in beiden Fällen einen Cylinder, der $^1/_8$ des Volumens des ursprünglichen Cylinders hat. In welchem Verhältnis steht der Radius des ursprünglichen Cylinders zu dessen Höhe, und welches ist jene Grösse $x$?

**Aufgabe 152.** Die Formel zur Berechnung des Volumens eines Cylinders ändert ihren Wert nicht, wenn an Stelle des Radius die Summe oder die Differenz des Radius und einer bestimmten Grösse $x$ und gleichzeitig an Stelle der Höhe, bezw. die Differenz oder die Summe der Höhe und jener Grösse $x$ gesetzt wird. In welchem Verhältnis steht der Radius zur Höhe und welchen Wert hat jene Grösse $x$?

**Aufgabe 153.** Von zwei cylindrischen, ähnlichen Gefässen fasst das eine 3,15 Liter, das andere 85,05 Liter; in welchem Verhältnis stehen ihre Höhen und in welchem Verhältnis die Radien ihrer Grundflächen?

**Andeutung:** Analog der Aufgabe 98, S. 51.

**Aufgabe 154.** Zwei ähnliche, cylindrische Gefässe fassen 0,729 cbm und 1,728 cbm, das zweite ist um 0,5 m tiefer als das erste, welche Tiefe hat jedes der Gefässe?

**Aufgabe 155.** Nimmt man den Durchmesser und die Seitenlinie eines geraden Kegels von 13,345 qm Oberfläche je um 1 m grösser an, so hat der neue Kegel eine Oberfläche von 31,4 qm; wie gross sind der Durchmesser und die Seitenlinie im ursprünglichen Kegel?

**Aufgabe 156.** In welchem Verhältnis steht die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels zu der Oberfläche eines Würfels, der mit dem Kegel gleiches Volumen hat?

**Aufgabe 157.** In welchem Verhältnis steht der Mantel eines gleichseitigen Kegels zu dem Mantel eines ebenso hohen quadratischen Cylinders?

Andeutung: Analog der Aufgabe 101, S. 54.

**Aufgabe 158.** In welchem Verhältnis steht der Mantel eines gleichseitigen Kegels zu dem Mantel eines quadratischen Cylinders, wenn beide Körper gleiches Volumen haben?

**Aufgabe 159.** In welchem Verhältnis steht die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels zu der Oberfläche eines quadratischen Cylinders, wenn beide Körper gleiches Volumen haben?

**Aufgabe 160.** Ein senkrechter Kegel und ein gleichseitiger Cylinder haben eine gemeinschaftliche Grundfläche und gleiche Oberfläche. Wie gross ist der Kubikinhalt des Kegels, wenn der Radius des Cylinders = 35,32 dm beträgt?

**Aufgabe 161.** Unter welcher Bedingung sind die Mäntel eines geraden Cylinders und eines geraden Kegels von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen inhaltsgleich?

**Aufgabe 162.** Man soll die Höhe eines Kegels berechnen, dessen Oberfläche gleich dem Mantel eines Cylinders von halb so grosser Höhe und 4 mal so grosser Grundfläche ist, wenn der Radius $r$ des Kegels 12 dm ist.

**Aufgabe 163.** Eine cylindrische Messingröhre, deren äusserer Durchmesser $D = 13$ cm, deren innerer Durchmesser $d = 5$ cm und deren Länge $L = 18$ dm hat, soll in einen Kegelstumpf umgegossen werden, welcher einen untern Durchmesser $a = 10$ cm, einen obern Durchmesser $b = 8$ cm hat. Welche Höhe wird dieser Kegelstumpf erhalten?

**Aufgabe 164.** Der Radius eines geraden Cylinders ist $R = 13,6602$ cm, dessen Höhe $H = 5$ cm. Ein gerader Kegelstumpf von doppelter Höhe hat mit dem Cylinder gleiche Grundfläche; wie gross ist der Radius der Deckfläche und wie gross der Mantel dieses Kegelstumpfs?

**Aufgabe 165.** Wie gross muss man den Halbmesser einer Kugel nehmen, welche gleiche Oberfläche mit zwei andern Kugeln haben soll, von denen die eine einen Halbmesser von 3,8 m, die andere einen grössten Umfang von 20,08 m hat?

**Aufgabe 166.** Wie gross ist der Radius einer Kugel, die mit zwei andern Kugeln, deren Durchmesser = 3,2 und 9,8894 m sind, gleiches Volumen hat?

**Aufgabe 167.** Wie gross ist der Halbmesser einer Kugel, deren Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen von vier andern Kugeln ist, wenn die grössten Umfänge der letztern bezw. = 250, 300, 350 und 400 cm betragen?

**Aufgabe 168.** Welches ist die Oberfläche einer Kugel, deren Volumen gleich der Summe der Volumina zweier anderer Kugeln mit den Oberflächen $O_1 = 18{,}205$ und $O_2 = 40{,}091$ qm ist?

**Aufgabe 169.** Die Summen der Oberflächen zweier Kugeln betragen 141,3 qdm, die Radien derselben differieren um 1,5 dm; welches sind die Oberflächen dieser Kugeln?

**Aufgabe 170.** Die Durchmesser zweier Kugeln differieren um 2 m, ihre Oberflächen differieren um 62,8 qm; welches sind die Volumina dieser beiden Kugeln?

**Aufgabe 171.** Nimmt man den Radius einer Kugel um 3 dm grösser an, so wird das Volumen derselben um 4,044 cbm grösser; wie gross war der Radius der Kugel ursprünglich?

**Aufgabe 172.** Wie gross sind die Durchmesser zweier Kugeln, deren Radien zusammen 10 dm und deren Volumina zusammen 1172 cdm betragen?

**Aufgabe 173.** Die Oberflächen zweier Kugeln differieren um 238,7616 qm; wie gross sind die Radien derselben, wenn der eine 3 m grösser als der andere ist?

**Aufgabe 174.** Der Durchmesser einer Kugel ist $D = 2{,}5$ dm; wie gross ist der Durchmesser einer andern Kugel, deren Volumen sich zu dem Volumen der ersten Kugel wie $m:n = 3:2$ verhält?

**Aufgabe 175.** In welchem Verhältnis stehen die Volumina zweier Kugeln, deren Oberflächen sich wie $m:n = 16:25$ verhalten?

**Aufgabe 176.** Man soll bis auf 1 cm genau die Kante eines Würfels berechnen, der gleich einer Kugel mit dem Radius $r = 10$ m ist.

**Aufgabe 177.** Die Oberfläche $O$ einer Kugel ist $= 28{,}27431$ qm; wie gross ist die Mantelfläche eines geraden Cylinders, welcher denselben Inhalt wie diese Kugel hat und bei welchem die Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist?

**Aufgabe 178.** Ein Hohlgeschoss hat einen äusseren Durchmesser $D = 4{,}8$ cm, eine lichte Weite $d = 3{,}6$ cm, dasselbe soll in einen massiven gleichseitigen Cylinder umgegossen werden; welches ist die Oberfläche dieses Cylinders?

**Aufgabe 179.** Die Oberflächen einer Kugel und eines gleichseitigen Kegels verhalten sich wie $1:3$; in welchem Verhältnis stehen die Volumina dieser Körper?

**Aufgabe 180.** Von einem geraden Kreiskegel ist der Halbmesser $r$ der Grundfläche $= 6$ m und das Verhältnis der Höhe $h$ zur Seitenlinie $s = m:n = 4:5$ gegeben. Wie gross ist der Halbmesser einer Kugel, welche dieselbe Oberfläche wie dieser Kegel hat?

**Aufgabe 181.** Man soll die Oberfläche des geraden Kegels berechnen, welcher mit einer Kugel, deren Oberfläche $O = 314$ qm beträgt, gleiches Volumen hat und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

**Aufgabe 182.** Die Summe der Kubikinhalte zweier Kugeln ist gleich dem Volumen eines Kegelstumpfs, dessen Höhe $h = 14\frac{14}{79}$ dm beträgt und dessen Grundflächenradien $R = r$, bezw. $= 7$ und $= 3$ dm sind. Wie gross sind die Radien jener Kugeln, wenn ihre Summe $= R + r$ ($= 10$ dm) ist?

**Aufgabe 183.** Das Volumen einer Kugel sei $= 1149{,}763$ cbm, das eines Sektors dieser Kugel $= 44{,}222$ cbm; wie gross ist der Halbmesser der Kugel und wie gross ist der Halbmesser des Begrenzungskreises der zu jenem Sektor gehörigen Haube?

**Aufgabe 184.** Der Durchmesser der kleineren Grundfläche eines geraden Kegelstumpfs ist $2r = 1{,}04$ m; dieser Durchmesser verhält sich zur Seitenlinie und zum Durchmesser der grösseren Grundfläche des Stumpfs wie $2:3:4$. Wie gross ist der Durchmesser einer Kugel, welche mit diesem Stumpf gleiches Volumen hat?

**Aufgabe 185.** Eine Kugel, deren Volumen $V = 1000$ ccm beträgt, wird in zwei Kugelabschnitte geteilt, deren Höhen sich wie $3:5$ verhalten; wie gross ist das Volumen eines jeden dieser Abschnitte?

**Aufgabe 186.** Die Oberfläche $O$ einer Kugel ist $= 25$ qm und die Höhe einer von dieser Kugel genommenen Haube ist $= 1$ m; wie gross ist das Volumen des zu dieser Haube gehörigen Segments?

**Aufgabe 187.** Welche Höhe hat ein Kugelsegment, dessen Kubikinhalt so gross ist, wie die Kugel, welche diese Höhe zum Radius hat?

**Aufgabe 188.** Welche Höhe hat ein Kugelabschnitt, dessen Oberfläche so gross ist als die einer Kugel, welche diese Höhe zum Radius hat?

**Aufgabe 189.** Der Radius einer Kugel sei $r = 1{,}5$ m; wie gross ist die Höhe eines Kugelsegments, welches halb so gross ist als der Kugelsektor, zu dem es gehört?

**Aufgabe 190.** Wie gross ist das Volumen eines Kugelsegments, dessen Höhe $h = 2$ dm ist und welches zu einer Kugel gehört, die gleiches Volumen mit einem gleichseitigen Cylinder hat, dessen Oberfläche $O = 75{,}208$ qdm gegeben ist?

**Aufgabe 191.** Der Kubikinhalt eines Kugelsegments sei $V = 40{,}626$ cm, die Höhe desselben sei $h = 1{,}72$ m. Die Kugel, zu welcher dieses Segment gehört, soll in einen geraden Kegel

verwandelt werden, dessen Grundfläche gleich der Grundfläche jenes Segments ist. Wie gross ist die Oberfläche dieses Kegels?

**Aufgabe 192.** Von einer Kugel, deren Durchmesser $2r = 30{,}6$ cm misst, wird ein Segment abgeschnitten, dessen Volumen sich zum Volumen eines geraden Kegels, welcher mit dem Segment gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, wie $m : n = 8 : 5$ verhält? Wie gross ist die zu jenem Segment gehörige Calotte?

# III.

# Aufgaben über die gegenseitigen Beziehungen der fünf konvexen regulären Polyeder.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 193.** Die Summe der Kubikinhalte zweier regulären Tetraeder beträgt 5 cbm, die Summe zweier ihrer Kanten = 5 m. Wie gross ist die Kante eines jeden dieser beiden Tetraeder?

**Erkl. 159.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines regulären Tetraeders, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$V = \frac{k^3}{12}\sqrt{2}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das regul. Tetraeder** handelt.

**Erkl. 160.** Nebenstehende Gleichungen

$$3) \; \ldots \; x^3 + y^3 = \frac{60}{\sqrt{2}}$$

$$2) \; \ldots \; x + y = 5$$

löst man am besten, um nicht auf eine unrein kubische Gleichung zu kommen, wie folgt auf:

Dividiert man Gleich. 2) in Gleich. 3), so erhält man:

$$4) \; \ldots \; x^2 - xy + y^2 = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

Quadriert man ferner Gleich. 2), so erhält man:

$$5) \; x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

und aus den Gleichungen 4) und 5) ergibt sich durch Subtraktion der Gleich. 4) von 5) die weitere Gleichung:

$$3xy = 5 - \frac{12}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$6) \; \ldots \; xy = \frac{5}{3} - \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Zur Bestimmung der Grössen $x$ und $y$ bestehen somit die einfacheren Gleichungen:

$$2) \; \ldots \; x + y = 5 \text{ und}$$

$$6) \; xy = \frac{5}{3} - \frac{4}{\sqrt{2}}$$

**Formel:**

$$V = \frac{k^3}{12} \cdot \sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 159.)}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchten Kanten der beiden regul. Tetraeder mit $x$ u. $y$ und zwar die grössere derselben mit $x$, so hat man der Aufgabe gemäss und unter Benutzung vorstehender Formel, die Bestimmungsgleichungen:

$$1) \; \ldots \; \frac{x^3}{12}\sqrt{2} + \frac{y^3}{12}\sqrt{2} = 5$$

$$2) \; \ldots \; x + y = 5$$

Reduziert man die Gleichung 1), so restieren zur Bestimmung der Grössen $x$ und $y$ die einfacheren Gleichungen:

$$3) \; \ldots \; x^3 + y^3 = \frac{60}{\sqrt{2}}$$

$$2) \; \ldots \; x + y = 5$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach der Erkl. 160:

$$a) \; \ldots \; x = \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}\right) \text{ und}$$

$$b) \; \ldots \; y = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}\right)$$

Da nach der Erkl. 161:

$$\sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}} = 3{,}105 \text{ ist,}$$

so erhält man hiernach:

Quadriert man die erste dieser Gleichungen, also Gleich. 2), und subtrahiert das 4 fache der Gleich. 6), so erhält man:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 5 - \frac{20}{3} + \frac{16}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$(x-y)^2 = \frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}$$

mithin:

$$x - y = \pm\sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}$$

Da aber angenommen wurde, dass die Kante $x$ die grössere sein soll, so hat das zweite Vorzeichen minus keinen Sinn und man hat die weitere Gleichung:

$$7) \ldots x - y = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}$$

Durch Addition der Gleichungen 2) und 7) erhält man endlich:

$$2x = 5 + \sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}$$

oder:

$$a) \ldots x = \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}\right)$$

und durch Subtraktion:

$$2y = 5 - \sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}$$

oder:

$$b) \ldots y = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}}\right)$$

**Erkl. 161.**

$$\sqrt{\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{5}{3}} = \sqrt{11{,}3137 - 1{,}6667}$$
$$= \sqrt{9{,}64704} = 3{,}105$$

$$x = \frac{1}{2}(5 + 3{,}105) = \frac{1}{2} \cdot 8{,}105 = 4{,}0525$$

und

$$y = \frac{1}{2}(5 - 3{,}105) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}895 = 0{,}9475$$

Die gesuchten Kanten der beiden Tetraeder sind also: 4,053 m u. 0,947 m

---

**Aufgabe 194.** Das Volumen eines gleichseitigen Kegels beträgt $v = 3$ cbm. Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen eines regul. Tetraeders, dessen Kante gleich der Höhe dieses Kegels ist?

**Erkl. 162.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ eines regul. Tetraeders, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$O = k^2 \cdot \sqrt{3}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das regul. Tetraeder** handelt.

**Erkl. 163.** Bezeichnet man in einem gleichseitigen Kegel (siehe Erkl. 116, S. 55) den Durchmesser des Grundkreises mit $2R$, also ist die Seitenlinie $s$ des Kegels auch $= 2R$, so besteht zwischen dieser Seitenlinie $2R$, dem Radius $R$ des Grundkreises und der Höhe $H$, die Relation:

**Formeln:**

I. $V$ eines Kegels $= \dfrac{\pi R^2 . H}{3}$

(s. Erkl. 50, S. 23)

II. $V$ eines Tetraeders $= \dfrac{k^3}{12}\sqrt{2}$

(s. Erkl. 159)

III. $O$ eines Tetraeders $= k^2 . \sqrt{3}$

(s. Erkl. 162).

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$ und des gesuchten Volumens $V$ des regulären Tetraeders dienen vorsteh. Formeln II. und III. Nach diesen Formeln muss zunächst die Kante $k$ des Tetraeders berechnet werden, was folgendermassen geschehen kann.

$$(2R)^2 = R^2 + H^2$$

und hieraus erhält man:

$$4R^2 = R^2 + H^2$$
$$4R^2 - R^2 = H^2$$
$$3R^2 = H^2 \text{ oder:}$$

$R^2 = \frac{H^2}{3}$, welche Gleichung nebenstehend benutzt wurde.

Für $R$ selbst erhält man:

$$R = \sqrt{\frac{H^2}{3}} = H\sqrt{\frac{1}{3}} = H.\sqrt{\frac{3}{9}}$$

oder: $R = \frac{H}{3} \cdot \sqrt{3}$

**Hülfsrechnungen.**

1) $log\, V = log\, 9 + \frac{1}{2} \cdot log\, 2 - (log\, 4 + log\, \pi)$

| | | |
|---|---|---|
| Nun ist: | $log\, 9 =$ | 0,9542425 |
| $+ \frac{1}{2} \cdot log\, 2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3010300 =$ | | 0,1505150 |
| | | 1,1047575 |
| $-(log\, 4 + log\, \pi) =$ | | |
| $-(0{,}6020600 + 0{,}4971499) =$ | | $-$ 1,0992099 |
| | $log\, V =$ | 0,0055476 |
| | | 5273 |
| | | 203 |
| mithin: | | 214,5 |

$numlog\, V = 1{,}01285$

Die Kante $k$ des Tetraeders ist, der Aufgabe gemäss, gleich der Höhe $H$ eines gleichseitigen Kegels, dessen Volumen $= v$ gegeben ist; setzt man daher in vorsteh. Formel I. $V = v$, $H = k$ und $R^2 = \frac{H^2}{3}$ (s. Erkl. 163), bezw. $R^2 = \frac{k^2}{3}$, so erhält man zur Berechnung von $k$ die Bestimmungsgleichung:

$$v = \frac{\pi \cdot \frac{k^2}{3} \cdot k}{3}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Reihe nach:

$$3v = \frac{\pi k^3}{3}$$

1) . . . $k^3 = \frac{9v}{\pi}$ und

2) . . . $k = \sqrt[3]{\frac{9v}{\pi}}$

Substituiert man den Wert für $k^3$ aus Gleich. 1) in vorsteh. Formel I., so erhält man:

$$V = \frac{9v}{12\pi}\sqrt{2}$$

oder:

A) . . . $V = \frac{3v}{4\pi}\sqrt{2}$

Substituiert man ferner den Wert für $k$ aus Gleich. 2) in vorsteh. Formel II., so erhält man:

$$O = \left(\sqrt[3]{\frac{9v}{\pi}}\right)^2 . \sqrt{3} = \sqrt[3]{\frac{3^4 . v^2}{\pi^2}} \cdot \sqrt{3}$$
$$= \sqrt[6]{\frac{3^8 v^4}{\pi^4}} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{\frac{3^{11} v^4}{\pi^4}}$$
$$= \sqrt[6]{\frac{3^6 . 3^5 v^4}{\pi^4}}$$

oder:

B) . . . $O = 3\sqrt[6]{3^5\left(\frac{v}{\pi}\right)^4}$

als **allgemeine** Lösungen der Aufgabe.

Substituiert man hierin den für $v$ gegeb. Zahlenwert, so ergibt sich für das gesuchte Volumen $V$:

$$V = \frac{3 . 3}{4\pi} \cdot \sqrt{2} = \frac{9}{4\pi}\sqrt{2}$$

oder:

$$V = 1{,}01285 \text{ cbm}$$ (s. Hülfsrechn. 1)

2) $\log O = \log 9 + \frac{1}{3} \cdot (\log 3 - 2 \cdot \log \pi)$

Nun ist:

$$\begin{array}{rrl} & (+1) & (-1) \\ \log 3 = & 0{,}4771213 & \\ -2 \cdot \log \pi = -2 \cdot 0{,}4971499 = & -0{,}9942998 & \\ (+2) & 0{,}4828215 & -1\ (-2) \\ \text{oder:} & \cdot \frac{1}{3} & \\ & 0{,}8276072 & -1 \\ +\log 9 = & 0{,}9542425 & \\ \log O = & 1{,}7818497 & -1 \\ \text{oder:} = & 0{,}7818497 & \\ & 8487 & \\ \text{mithin:} & 10 & \end{array}$$

$numlog\ O = 6{,}0513.$

und für die gesuchte Oberfläche $O$ des Tetraeders:

$$O = 3\sqrt[6]{\frac{3^5 \cdot 3^4}{\pi^4}} = 3\sqrt[6]{\frac{3^9}{\pi^4}}$$

$$= 3\sqrt[6]{\frac{3^6 \cdot 3^2}{\pi^4}} = 9\sqrt[6]{\frac{3^2}{\pi^4}} = 9\sqrt[3]{\frac{3}{\pi^2}}$$

$O = 6{,}0513$ qm (s. Hülfsrechnung 2).

---

**Aufgabe 195.** Die Kante eines regul. Tetraeders ist gleich der Diagonale einer Begrenzungsfläche eines regul. Hexaeders. Wie verhält sich die Oberfläche dieses Hexaeders zur Oberfläche jenes Tetraeders?

**Erkl. 164.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ eines regulären Hexaeders (eines Würfels), dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$O = 6k^2$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das Hexaeder** handelt.

**Erkl. 165.** Der Aufgabe gemäss ist die Kante $k_1$ des Tetraeders gleich der Diagonale einer Begrenzungsfläche des regul. Hexaeders, also gleich der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite $= k$ ist.

Da nun zwischen der Diagonale $k_1$ eines Quadrats und dessen Seite $k$ die Relation besteht:

$$k_1^2 = k^2 + k^2$$

so hat man auch:

$$k_1^2 = 2k^2$$

**Formeln:**

I. $O$ eines Tetraeders $= k^2 \cdot \sqrt{3}$
(s. Erkl. 162)

II. $O$ eines Hexaeders $= 6k^2$
(s. Erkl. 164).

**Auflösung.** Bezeichnet man die Kante des Hexaeders mit $k$, so ist nach vorstehender Formel II dessen Oberfläche $O = 6k^2$; bezeichnet man ferner die Kante des Tetraeders mit $k_1$, so ist nach vorsteh. Formel I und da $k_1^2 = 2k^2$ (s. Erkl. 165), dessen Oberfläche

$$O_1 = 2k^2 \sqrt{3}$$

Für das gesuchte Verhältnis dieser Oberflächen hat man somit die Proportion:

$$O : O_1 = 6k^2 : 2k^2 \sqrt{3}$$

oder:

$$O : O_1 = 3 : \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 : \sqrt{3}$$

mithin:

$$O : O_1 = \sqrt{3} : 1$$

---

**Aufgabe 196.** Wie gross ist das Volumen eines regul. Oktaeders, welches dieselbe Oberfläche mit einem Tetraeder hat, dessen Kante $= a$ gegeben ist?

**Erkl. 166.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ eines regul. Oktaeders, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$O = 2k^2 \cdot \sqrt{3}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das Oktaeder** handelt.

**Formeln:**

I. $O$ eines Tetraeders $= k^2 \sqrt{3}$
(s. Erkl. 162)

II. $O$ eines Oktaeders $= 2k^2 \sqrt{3}$
(s. Erkl. 166)

III. $V$ eines Oktaeders $= \frac{k^3}{3} \sqrt{2}$
(s. Erkl. 167).

**Auflösung.** Bezeichnet man die noch unbekannte Kante des Oktaeders mit $x$, so hat man für das gesuchte Volumen $V$ desselben, nach vorstehender Formel III.:

**Erkl. 167.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines regul. Oktaeders, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$V = \frac{k^3}{3}\sqrt{2}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das Oktaeder** handelt.

$$1) \ldots V = \frac{x^3}{3}\sqrt{2}$$

Zur Berechnung der Kante $x$ des Oktaeders besteht der Aufgabe gemäss, und mit Benutzung der vorstehenden Formeln I und II, die weitere Gleich.:

$$2x^2\sqrt{3} = a^2 . \sqrt{3}$$

Hieraus erhält man:

$$2x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}} = a\sqrt{\frac{2}{4}}$$

oder:

$$2) \ldots x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Substituiert man diesen Wert für $x$ in Gleichung 1) so erhält man:

$$V = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3}{3} \cdot \sqrt{2}$$

oder:

$$V = \frac{a^3}{2^3}\sqrt{2^3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{2^3 . 3} \cdot \sqrt{2^4}$$

$$V = \frac{a^3}{2^3 . 3} \cdot 2^2 = \frac{a^3}{2 . 3}$$

mithin ist das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{a^3}{6}$$

---

**Aufgabe 197.** Ein reguläres Oktaeder hat mit einem regul. Hexaeder gleiche Oberfläche; in welchem Verhältnis stehen die Volumina beider Körper?

**Erkl. 168.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines regulären Hexaeders (eines Würfels), dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$V = k^3$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das reguläre Hexaeder** handelt.

**Erkl. 169.** Umstehende Proportion:

$$V : V_1 = \frac{k^3}{3}\sqrt{2} : \left(k\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^3$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V : V_1 = \frac{k^3}{3}\sqrt{2} : k^3\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^3$$

$$V : V_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} : \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^2 . \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

**Formeln:**

Für einen Würfel:

I. $O = 6k^2$ (s. Erkl. 164)

II. $V = k^3$ (s. Erkl. 168)

Für ein Oktaeder:

III. $O = 2k^2\sqrt{3}$ (s. Erkl. 166)

IV. $V = \frac{k^3}{3}\sqrt{2}$ (s. Erkl. 167).

**Auflösung.** Bezeichnet man das Volumen des Oktaeders mit $V$, das des Hexaeders mit $V_1$, die Kante des Oktaeders mit $k$ und die Kante des Hexaeders mit $k_1$, so hat man zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses, mit Benutzung der vorsteh. Formeln II und IV, die Proportion:

$$1) \ldots V : V_1 = \frac{k^3}{3}\sqrt{2} : k_1{}^3 .$$

Nunmehr muss noch, damit die linearen Grössen $k$ und $k_1$ in Wegfall kommen,

$$V:V_1=\frac{\sqrt{2}}{3}:\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$V:V_1=\sqrt{2}:\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$V:V_1=\sqrt{2}:\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{2}:\sqrt{\sqrt{3}}$$

oder:

$$V:V_1=\sqrt{2}:\sqrt[4]{3}$$

$k$ in $k_1$ oder $k_1$ in $k$ ausgedrückt werden, und hierzu besteht dem Sinne der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorsteh. Formeln I und III die Relation:

$$2)\ \ldots\ 2k^2\sqrt{3}=6k_1^{\,2}$$

Hieraus erhält man:

$$k_1^{\,2}=k^2\cdot\frac{2}{6}\sqrt{3}$$

$$k_1=\sqrt{k^2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}}=k\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

oder:

$$3)\ \ldots\ k_1=k\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Substituiert man diesen Wert für $k_1$ in vorsteh. Gleich. 1), so erhält man:

$$V:V_1=\frac{k^3}{3}\sqrt{2}:\left(k\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^3$$

Nach der Erkl. 169 ergibt sich hieraus für das gesuchte Verhältnis:

$$V:V_1=\sqrt{2}:\sqrt[4]{3}$$

---

**Aufgabe 198.** Die Seite eines regulären Dodekaeders ist $=a$; wie gross ist der Inhalt eines regul. Tetraeders, das mit dem Dodekaeder gleiche Oberfläche hat?

**Formeln:**

Für ein Tetraeder:

I. $O=k^2.\sqrt{3}$ (s. Erkl. 162)

II. $V=\frac{k^3}{12}\sqrt{2}$ (s. Erkl. 159)

Für ein Dodekaeder:

III. $O=3k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ (s. Erkl. 170).

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ des regulären Tetraeders dient vorsteh. Formel II:

$$1)\ \ldots\ V=\frac{k^3}{12}\sqrt{2}$$

Die in dieser Gleichung vorkommende noch unbekannte Kante $k$ des Tetraeders findet man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorsteh. Formeln I und III, wenn man in letzterer $k=a$ setzt, mittelst der Gleichung:

**Erkl. 170.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ eines regul. Dodekaeders, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$O=3k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über das **reguläre Dodekaeder** handelt.

**Erkl. 171.** Nebenstehende Gleichung:

$$V=\left(a\sqrt{3\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}}}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V=a^3.\sqrt{3^3\left(\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}}\right)^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$V=a^3\sqrt{3^2.3\left(\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$V=3a^3\sqrt{3.\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}\cdot\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5}}{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$V=3a^3\sqrt{\sqrt{[5(5+2\sqrt{5})]^2}\cdot\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{12}\sqrt{\sqrt{\frac{[5(5+2\sqrt{5})]^3}{3}}}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}\sqrt[4]{\frac{125(125+150\sqrt{5}+300+8\sqrt{5^3})}{3}}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}\sqrt[4]{\frac{125(425+190\sqrt{5})}{3}}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}\sqrt[4]{\frac{125.5(85+38\sqrt{5})}{3}}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}\sqrt[4]{\frac{5^4(85+38\sqrt{5})}{3}}$$

$$V = \frac{5a^3}{4}\sqrt[4]{2^2}\sqrt[4]{\frac{85+38\sqrt{5}}{3}} \text{ oder:}$$

$$V = \frac{5a^3}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{4(85+38\sqrt{5})}{3}}$$

$$k^2.\sqrt{3} = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

indem sich hieraus:

$$k = \sqrt{\frac{3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{3}}} \text{ oder:}$$

$$2) \ldots k = a\sqrt{3\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}}}$$

ergibt.

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt:

$$V = \left(a\sqrt{3\sqrt{\frac{5(5+2\sqrt{5})}{3}}}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 171 für das gesuchte Volumen $V$:

$$V = \frac{5a^3}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{4(85+38\sqrt{5})}{3}}$$

---

**Aufgabe 199.** Der Radius einer Kugel ist gleich der Kante eines regul. Ikosaeders. Wie gross ist die Oberfläche jener Kugel, wenn die Oberfläche $O_{20}$ des Ikosaeders $= 1684$ qcm beträgt?

**Erkl. 172.** Die Formel zur Berechnung der Oberfläche $O$ eines regulären Ikosaeders, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$O = 5k^2.\sqrt{3}$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das reguläre Ikosaeder** handelt.

**Hülfsrechnung.**

Aus:

$$O = \frac{4}{15}\cdot 3{,}141 . 1684 . \sqrt{3}$$

erhält man durch Logarithmierung:

$log\, O$

$$= log 4 + log 3{,}141 + log 1684 + \frac{1}{2}\cdot log 3 - log 15$$

| | | |
|---|---|---|
| Nun ist: | $log 4 =$ | 0,6020600 |
| | $+ log 3{,}141 =$ | 0,4971499 |
| | $+ log 1684 =$ | 3,2263421 |
| $+\frac{1}{2}\cdot log 3 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}4771213 =$ | | 0,2385606 |
| | | 4,5641126 |
| | $- log 15 =$ | $-$ 1,1760913 |
| | $log\, O =$ | 3,3880213 |
| | | 0123 |
| | | 90 |
| | | 89 |

mithin:

$$numlog\, O = 2443{,}55$$

**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28)

Für ein Ikosaeder:

II. $O = 5k^2.\sqrt{3}$ (s. Erkl. 172).

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$ der Kugel dient vorsteh. Formel I.:

$$1) \ldots O = 4\pi r^2$$

Die in dieser Gleichung vorkommende, noch unbekannte Grösse $r$, beziehungsweise $r^2$, findet man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung vorstehender Formel 2), wenn man in derselben $O = O_{20}$ und $k = r$ setzt, mittelst der Gleichung:

$$O_{20} = 5r^2.\sqrt{3}$$

indem sich hieraus:

$$r^2 = \frac{O_{20}}{5\sqrt{3}} = \frac{O_{20}.\sqrt{3}}{5\sqrt{3}.\sqrt{3}} \text{ oder:}$$

$$2) \ldots r^2 = \frac{O_{20}.\sqrt{3}}{15} \text{ ergibt.}$$

Aus den Gleich. 1) und 2) folgt:

$$O = 4\pi\cdot\frac{O_{20}\sqrt{3}}{15}$$

Die gesuchte Oberfläche ist also:

$$O = \frac{4}{15}\pi.O_{20}.\sqrt{3}$$

In Rücksicht des für $O_{20} = 1684$ qcm gegeb. Zahlenbeispiels erhält man nach nebensteh. Hülfsrechnung:

$$O = 2443{,}55 \text{ qcm}$$

---

**Aufgabe 200.** Aus einem eisernen Pyramidenstumpf sollen ein reguläres Tetraeder und ein reguläres Ikosaeder, beide von gleichem Kubikinhalt gegossen werden. Wie gross müssen die Kanten dieser regulären Polyeder sein, wenn man weiss, dass das Verhältnis zweier homologen Grundkanten des Pyramidenstumpfs $= 5:3$ ist, dass die grössere Grundfläche $G$ desselben $= 16$ qdm und die Höhe $H$ des Stumpfs $= 6$ dm misst?

(Auf das beim Giessen verloren gehende Eisen soll keine Rücksicht genommen werden.)

**Erkl. 173.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ eines regulären Ikosaeders, dessen Kante mit $k$ bezeichnet wird, ist:

$$V = \frac{5}{12} k^3 (3 + \sqrt{5})$$

Man siehe den Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über **das reguläre Ikosaeder** handelt.

**Erkl. 174.** Da die Grundflächen eines geraden Pyramidenstumpfs **ähnliche** Polygone sind, so hat man nach der Erkl. 88, S. 45, wenn man diese Grundflächen mit $G$ und $g$ und zwei homologe Kanten derselben mit $a$ und $b$ bezeichnet, die Relation:

$$G : g = a^2 : b^2$$

Da nun der Aufgabe gemäss zwei homologe Grundkanten des Pyramidenstumpfs sich wie $5:3$ verhalten sollen, da also:

$$a : b = 5 : 3, \text{ mithin:}$$

$a^2 : b^2 = 5^2 : 3^2$ ist, so hat man die Relation:

$$G : g = 5^2 : 3^2$$

**Hülfsrechnungen.**

1) $log\, x = \frac{1}{3} \cdot \left(log\, 83{,}2 + log\, 6 + \frac{1}{2} \cdot log\, 2\right)$

Nun ist: $log\, 31{,}36 = 1{,}4963761$

$+ log\, 6 = 0{,}7781513$

$+ \frac{1}{2} \cdot log\, 2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3010300 = 0{,}1505150$

$2{,}4250424$

$\cdot \frac{1}{3}$

$log\, x = 0{,}8083475$

$3460$

$15$

$13{,}6$

mithin:

$$numlog\, x = 6{,}43202$$

**Formeln:**

Für einen Pyramidenstumpf:

I. $V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$ (s. Erkl. 31, S. 13)

Für ein Tetraeder:

II. $V = \frac{k^3}{12}\sqrt{2}$ (s. Erkl. 159)

Für ein Ikosaeder:

III. $V = \frac{5}{12} k^3 (3 + \sqrt{5})$ (s. Erkl. 173).

**Auflösung.** Da die aus dem Pyramidenstumpf zu giessenden beiden regul. Polyeder gleiches Volumen haben sollen, so muss das Volumen eines jeden derselben gleich der Hälfte des Volumens jenes Stumpfes sein. Bezeichnet man die gesuchte Kante des regul. Tetraeders mit $x$, die des Ikosaeders mit $y$, so hat man hiernach und mit Benutzung der vorsteh. Formeln die Gleichungen:

1) $\frac{x^3}{12}\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$

2) $\frac{5}{12} y^3 (3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$

Setzt man in diese Gleichungen die für $H$ und $G$ gegeb. Zahlenwerte: 6 und 16 und berücksichtigt, dass nach der Erkl. 174:

$$G : g = 5^2 : 3^2$$

mithin: $g = \frac{9}{25} \cdot G$

oder: $g = \frac{9}{25} \cdot 16$

ist, so gehen die Gleich. 1) u. 2) über in:

3) $\frac{x^3}{12}\sqrt{2} = \frac{6}{6}\left(16 + \sqrt{16 \cdot \frac{9}{25} \cdot 16} + \frac{9}{25} \cdot 16\right)$

4) $\frac{5}{12} y^3 (3 + \sqrt{5}) = \frac{6}{6}\left(16 + \sqrt{16 \cdot \frac{9}{25} \cdot 16} + \frac{9}{25} \cdot 16\right)$

Durch Reduktion erhält man aus diesen Gleichungen die einfacheren Gleichungen:

2) $\log y = \frac{1}{3} \cdot \left( \log 31{,}36 + \log 3 + \log 0{,}764 - \log 5 \right)$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 31{,}36 &= 1{,}4963761 \\ + \log 3 &= 0{,}4771213 \\ + \log 0{,}764 &= 0{,}8830934 - 1 \\ & \quad 2{,}8565908 - 1 \\ \text{oder} &= 1{,}8565908 \\ - \log 5 &= -\,0{,}6989700 \\ & \quad 1{,}1576208 \\ & \quad \cdot \tfrac{1}{3} \\ \log y &= -\,0{,}3858736 \end{aligned}$$

8564
172
161

mithin:

$\text{numlog}\, y = 2{,}43149.$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^3}{12}\sqrt{2} &= 16 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{5} + 5{,}76 \\ \frac{5}{12} y^3 (3 + \sqrt{5}) &= 16 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{5} + 5{,}76 \end{aligned}\right\} \text{oder:}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^3}{12}\sqrt{2} &= 31{,}36 \\ \frac{5}{12} y^3 (3 + \sqrt{5}) &= 31{,}36 \end{aligned}\right\} \text{oder:}$$

$$x^3 = \frac{31{,}36 \cdot 12}{\sqrt{2}} = \frac{31{,}36 \cdot \sqrt{2}}{2} = 31{,}36 \cdot 6 \cdot \sqrt{2},$$

mithin:

$$5) \ldots x = \sqrt[3]{31{,}36 \,.\, 6 \,.\, \sqrt{2}} \quad \text{und:}$$

$$y^3 = \frac{31{,}63 \cdot 12}{5 \cdot (3 + \sqrt{5})} = \frac{31{,}36 \cdot 12 \cdot (3 - \sqrt{5})}{5\,(3 + \sqrt{5})\,(3 - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{31{,}36 \cdot 12 \cdot (3 - \sqrt{5})}{5 \cdot (3^2 - 5)} = \frac{31{,}36 \cdot 12 \cdot (3 - 2{,}236)}{5 \cdot 4}$$

$$= \frac{31{,}36 \cdot 3 \cdot 0{,}764}{5} \quad \text{mithin:}$$

$$6) \ldots y = \sqrt[3]{\frac{31{,}36 \,.\, 3 \,.\, 0{,}764}{5}}$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) ergeben sich nach den Hülfsrechnungen 1) und 2) für die gesuchten Kanten $x$ und $y$ der zu giessenden regulären Polyeder:

$x = 6{,}43$ dm und

$y = 2{,}43$ dm

---

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 201.** Wie gross ist die Kante eines regul. Tetraeders, welches mit einer Kugel vom Halbmesser $r = 5$ cm gleiches Volumen hat?

**Aufgabe 202.** Wie gross ist der Durchmesser einer Kugel, welche mit einem Tetraeder, dessen Kante $k = 4$ m misst, gleiche Oberfläche hat?

**Aufgabe 203.** Welches ist der Radius einer Kugel, die mit einem Tetraeder, dessen Kante $= 8$ m misst, gleiches Volumen hat?

**Aufgabe 204.** Ein reguläres Tetraeder, ein gleichseitiger Kegel und eine Kugel haben gleiche Oberflächen. In welchem Verhältnis stehen die Kante des Tetraeders, die Seitenlinie des Kegels und der Durchmesser der Kugel zu einander?

**Aufgabe 205.** Wenn ein regul. Hexaeder mit einer Kugel gleiches Volumen hat; wie verhalten sich alsdann die Oberflächen beider Körper?

**Aufgabe 206.** Aus einem regul. Tetraeder mit der Kante $k = 9$ dm soll ein reguläres Hexaeder geformt werden; wie gross ist die Oberfläche und das Volumen des Hexaeders?

**Aufgabe 207.** Wie gross ist das Volumen eines regul. Tetraeders, dessen Kante gleich der Körperdiagonale eines Würfels mit der Kante $k = 1{,}5$ ist?

**Aufgabe 208.** Wird die Kante eines regul. Oktaeders um 1 dm vergrössert, so vergrössert sich dadurch das Volumen desselben um 17,442 cdm; welches war das Volumen des ursprünglichen Oktaeders?

**Aufgabe 209.** Wie gross ist das Volumen eines regul. Oktaeders, dessen Oberfläche gleich der Oberfläche eines abgestumpften Kegels ist, von welchem der Kubikinhalt $= 636{,}7$ cdm, die Höhe $H = 8$ dm und die Differenz $R - r$ der Radien der Grundflächen $= 2$ dm gegeben ist?

**Aufgabe 210.** Ein regul. Tetraeder und ein regul. Oktaeder haben gleiche Oberflächen; in welchem Verhältnis stehen ihre Volumina?

**Aufgabe 211.** Die Kante eines regul. Dodekaeders sei $= k$; wie gross ist das Volumen eines Hexaeders, welches mit dem Dodekaeder gleiche Oberfläche hat?

**Aufgabe 212.** Die Kante eines regul. Oktaeders sei $= k$; wie gross ist das Volumen eines regul. Ikosaeders, welches mit dem Oktaeder gleiche Oberfläche hat?

**Aufgabe 213.** Wenn ein reguläres Dodekaeder mit einer Kugel gleiches Volumen hat, wie verhalten sich alsdann die Oberflächen beider Körper?

**Aufgabe 214.** Wie gross sind die Volumina der fünf konvexen regul. Polyeder: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekader und Ikosaeder, wenn deren Oberflächen, bezw. mit $O_4$, $O_6$, $O_8$ $O_{12}$ und $O_{20}$ gegeben sind?

# IV.

# Aufgaben über die fünf einfachen geometrischen Körper in ihrer Verbindung mit Schnittebenen.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 215.** Legt man durch die Mitten je dreier an einer Ecke eines Würfels zusammenstossenden Kanten Ebenen, so bilden diese Ebenen einen Körper, der von 6 Quadraten und 8 regulären Dreiecken begrenzt wird. Wie gross ist die Oberfläche und das Volu-

**Formeln:**

Für einen Würfel:

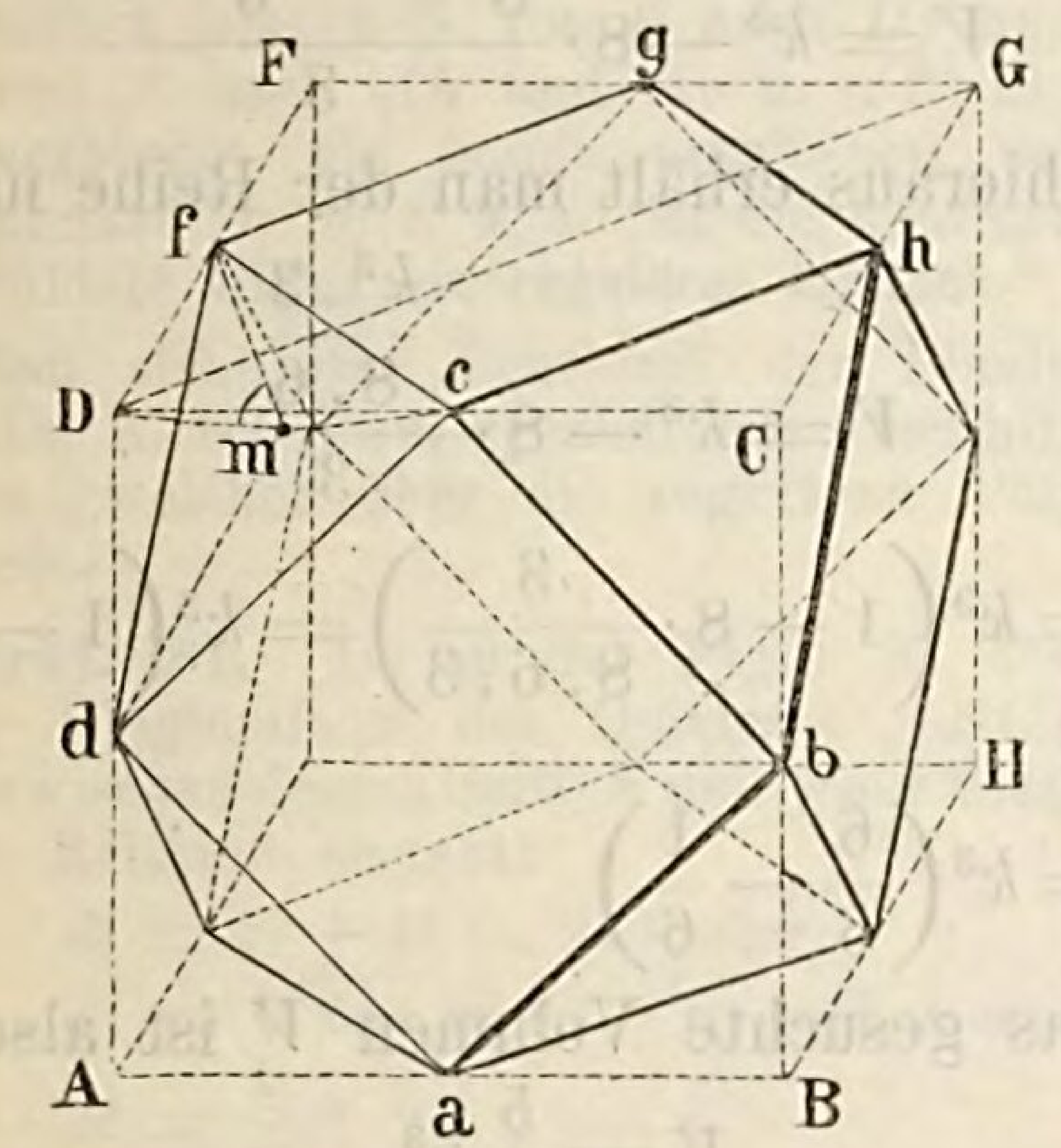
I. $V = k^3$ (s. Erkl. 73, S. 39).

Für eine Pyramide:

II. $V = \frac{G \cdot H}{3}$ (s. Erkl. 28, S. 11)

men dieses Körpers, wenn die Kante des Würfels $= k$ gegeben ist?

Figur 36.




**Erkl. 175.** Den Inhalt des Quadrats $cfgh$, siehe Figur 36, findet man, in die gegebene Seite $k$ des Quadrats $DCGF$ (in die gegeb. Kante des Würfels) ausgedrückt, wie folgt:

Nach der Erkl. 176 ist die Seite $fg$ des Quadrats $cfgh$ gleich der halben Diagonale $DG$ des Quadrats $DCGF$; da nun:

$$\overline{DG}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FG}^2 \text{ oder:}$$

$$\overline{DG}^2 = 2k^2, \text{ also:}$$

1) . . . $DG = k\sqrt{2}$, mithin

2) . . . $fg = \frac{DG}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$ ist, .

so erhält man für den Inhalt $J$ des Quadrats $cfgh$:

$$J = \left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}\cdot 2 \text{ oder}$$

3) . . . $J = \frac{k^2}{2}$

**Erkl. 176.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man die Mitten der 4 Seiten eines Quadrats, so entsteht wieder ein Quadrat, dessen Seite gleich der halben Diagonale des ersten Quadrats ist.“

Dieser Satz wird bewiesen mittelst des weiteren planimetrischen Satzes:

„Verbindet man die Mitten zweier Seiten eines beliebigen Dreiecks, so ist diese Verbindungslinie parallel der dritten Dreiecksseite und halb so gross als letztere.“

**Erkl. 177.** Den Inhalt $J$ des gleichseitigen Dreiecks $dcf$, siehe Fig. 36, findet man mittelst der Formel:

$$J_3 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 11, S. 5)}$$

wenn man in derselben für die Seite $s$ $(= fc = fg)$ des gleichseitigen Dreiecks $dcf$, nach der Erkl. 175 den Wert: $= \frac{k}{2}\sqrt{2}$ setzt. Man erhält hiernach:

**Auflösung.** Die gesuchte Oberfläche des durch die in Rede stehenden Ebenen gebildeten neuen Körpers besteht, wie aus der Figur 36 ersichtlich ist, aus der Summe der Inhalte von 6 kongruenten Quadraten plus der Summe der Inhalte von 8 gleichseitigen Dreiecken.

Da nun der Inhalt eines der Quadrate, z. B. des Quadrats $cfgh$, siehe Figur 36,

$$= \frac{k^2}{2} \quad \text{(s. Erkl. 175)}$$

und der Inhalt eines der gleichseitigen Dreiecke, z. B. des Dreiecks $dcf$, siehe Figur 36,

$$= \frac{k^2}{8}\sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 177)}$$

ist, so hat man zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$, die Gleichung:

$$O = 6\cdot\frac{k^2}{2} + 8\cdot\frac{k^2}{8}\sqrt{3}$$

Aus derselben erhält man:

$$O = 3k^2 + k^2\sqrt{3} \text{ oder}$$

A) . . . $O = k^2(3 + \sqrt{3})$

---

Das gesuchte Volumen des neu gebildeten Körpers findet man mittelst der Betrachtung, dass durch die Schnittebenen an jeder der 8 Ecken des Würfels eine gerade dreiseitige Pyramide abgeschnitten wird, und dass diese 8 Pyramidchen einander kongruent sind.

Bezeichnet man das noch unbekannte Volumen einer dieser Pyramidchen mit $x$, so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formel I für das gesuchte Volumen $V$ des 14-flächigen neuen Körpers, die Gleichung:

1) . . . $V = k^3 - 8x$

Das Volumen $x$ eines der Pyramidchen, z. B. des Pyramidchens $dcfD$, siehe Figur 36, findet man mittelst vorstehender Formel II, wenn man in derselben

$$V = x,\ G = \triangle dcf = \frac{k^2}{8}\sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 177)}$$

und

$$H = Dm = \sqrt{\overline{Df}^2 - \overline{fm}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{6}\sqrt{6}\right)^2} \quad \text{(s. Erkl. 178 und 179)}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{k^2\cdot 6}{36}} = \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{6}} = \sqrt{\frac{k^2}{12}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{36}} \text{ oder } = \frac{k}{6}\sqrt{3} \text{ setzt.}$$

$$J = \frac{\left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{k^2}{4} . 2 . \sqrt{3}}{4}$$

oder:

$$J = \frac{k^2}{8}\sqrt{3}$$

**Erkl. 178.** In Figur 36 ist:

$$Df = \frac{DF}{2} = \frac{k}{2},$$

nach Konstruktion.

**Erkl. 179.** In Fig. 36 ist $fm$ gleich dem Radius des um das gleichseitige Dreieck $dcf$ umschriebenen Kreises; da eine Seite dieses Dreiecks nach der Erkl. 175 $= \frac{k}{2}\sqrt{2}$ ist, so hat man nach der in der Erkl. 109, S. 53 aufgestellten Formel:

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

wenn man in derselben

$$R = fm \text{ und } a = \frac{k}{2}\sqrt{2} \text{ setzt:}$$

$$fm = \frac{k}{6}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \text{ oder:}$$

$$fm = \frac{k}{6}\sqrt{6}$$

Vorstehende Gleichung 1) geht somit über in:

$$V = k^3 - 8 \cdot \frac{\frac{k^2}{8}\sqrt{3} \cdot \frac{k}{6}\sqrt{3}}{3}$$

und hieraus erhält man der Reihe nach:

$$V = k^3 - 8 \cdot \frac{\frac{k^3 . 3}{8 . 6}}{3}$$

$$V = k^3\left(1 - 8 \cdot \frac{3}{8 . 6 . 3}\right) = k^3\left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

oder:

$$V = k^3\left(\frac{6}{6} - \frac{1}{6}\right)$$

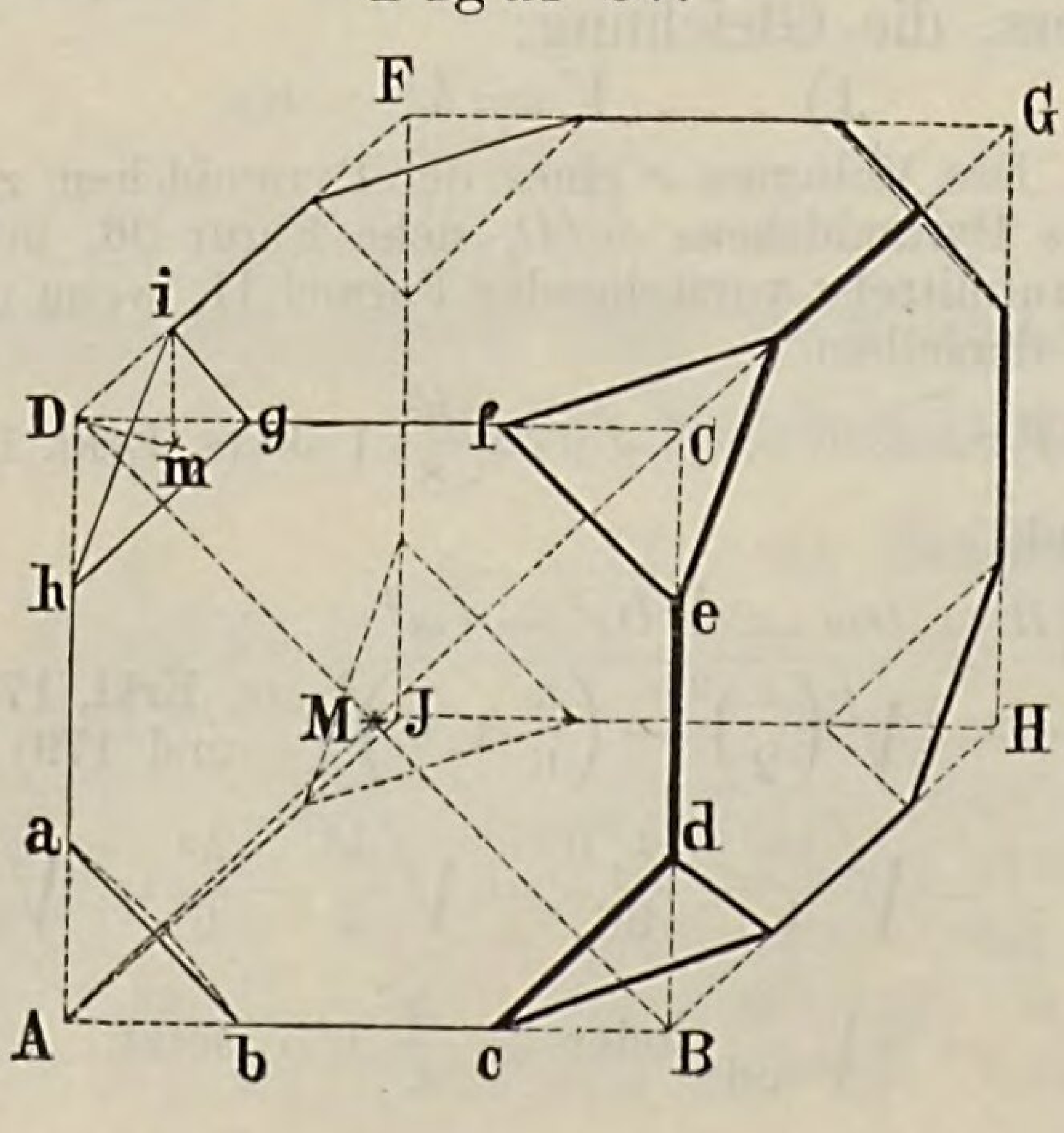
Das gesuchte Volumen $V$ ist also:

$$V = \frac{5}{6}k^3$$

---

**Aufgabe 216.** Man soll durch je drei der an einer Ecke eines Würfels zusammenstossenden Kanten Ebenen, welche die Ecken des Würfels abschneiden, so legen, dass ein Körper entsteht, der von 6 regulären Achtecken und 8 regulären Dreiecken begrenzt wird. Wie sind diese Ebenen zu legen und welches ist die Oberfläche und das Volumen des so gebildeten Körpers, wenn die Kante des Würfels $= k$ gegeben ist.

Figur 37.




**Formeln:**

Für einen Würfel:

I. $V = k^3$ (s. Erkl. 73, S. 39)

Für eine Pyramide:

II. $V = \frac{G \cdot H}{3}$ (s. Erkl. 28, S. 11).

**Auflösung.** Zur Bestimmung der Lage der Ebenen, durch welche die Ecken des Würfels in gedachter Weise abgeschnitten werden sollen, beachte man den in der Erkl. 180 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz. Schneidet man diesem Lehrsatz entsprechend die halbe Flächendiagonale (z. B. $DM$) von sämtlichen Ecken des Würfels aus, auf allen Kanten desselben ab und legt durch je drei der somit erhaltenen Schnittpunkte, welche an einer Ecke am nächsten liegen, eine Ebene, so werden durch diese Ebenen die Ecken des Würfels so abgeschnitten, dass man den in Rede stehenden Körper, siehe Figur 37, erhält.

---

Um die Oberfläche und das Volumen des neuen Körpers berechnen zu können, muss man zunächst eine Kante desselben,

**Erkl. 180.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Schneidet man, siehe Figur 37, die halbe Diagonale $DM$ eines Quadrats $ABCD$ von sämtlichen Ecken aus, auf den Seiten desselben (also z. B. von $D$ nach $Df$ und $Da$, von $A$ nach $Ah$ und $Ac$ u. s. f.) ab, und verbindet die somit erhaltenen Schnittpunkte: $a$, $b$, $c$, $d$, so ist die hierdurch gebildete Figur ein **reguläres Achteck.**"

Man siehe das Lehrbuch der Planimetrie von Dr. A. Kleyer, speziell den Abschnitt desselben, welcher über die regulären Polygone handelt.

**Erkl. 181.** Da in der Figur 37 $CM$ die halbe Diagonale $d$ des Quadrats $ABCD$ ist, und zwischen dessen Seite $k$ und jener Diagonale $d$ die Relation besteht:

$$d^2 = k^2 + k^2 = 2k^2 \text{ oder}$$
$$d = \sqrt{2k^2} = k \cdot \sqrt{2}, \text{ so hat man:}$$
$$CM = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

**Erkl. 182.** Den Inhalt $J_8$ eines der regul. Achtecke, z. B des regul. Achtecks $abcdefgh$ in Figur 37, kann man unter anderem, wie folgt finden:

Der Inhalt des Achtecks $abcdefgh$ ist gleich dem Inhalt $k^2$ des Quadrats $ABCD$ weniger der Summe der Inhalte der 4 kongruenten an den Ecken dieses Quadrats abgeschnittenen rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken. Da der Inhalt eines dieser Dreiecke, z. B. des Dreiecks $hDg$ nach der Erkl. 183 $= \frac{k^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$ ist, so hat man für den Inhalt $J_8$ des regulären Achtecks:

$$J_8 = k^2 - 4 \cdot \frac{k^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) \text{ oder:}$$
$$J_8 = k^2(1 - 3 + 2\sqrt{2}) \text{ mithin}$$
$$\text{a) } .. \; J_8 = 2k^2(\sqrt{2} - 1)$$

**Erkl. 183.** Die Seite $Dg$ des rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks $hDg$, siehe Fig. 37, findet man mittelst der Betrachtung, dass

$$Dg = DC - Cg = DC - CM = k - \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

ist, man erhält hiernach:

$$\text{a) } \ldots \; Dg = \frac{k}{2}(2 - \sqrt{2})$$

Da ferner der Inhalt $J$ des Dreiecks $hDg$ $= \frac{Dg \cdot Dh}{2} = \frac{\overline{Dg}^2}{2}$, so erhält man für diesen Inhalt unter Berücksichtigung der vorstehend. Gleich. a):

$$J = \left(\frac{k}{2}(2 - \sqrt{2})\right)^2 : 2 \text{ oder}$$
$$J = \frac{k^2}{4}(4 - 4\sqrt{2} + 2) : 2$$
$$J = \frac{k^2}{8}(6 - 4\sqrt{2}) = \frac{k^2 \cdot 2}{8}(3 - 2\sqrt{2})$$

z. B. die Kante $hg$, siehe Figur 37, in die gegebene Kante $k$ des Würfels ausdrücken und dies geschieht, wie folgt:

In dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $hDg$, siehe Figur 37, ist:

$$Dg = DC - Cg = DC - CM = k - \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

(s. Erkl. 181), ebenso ist $Dh = k - \frac{k}{2}\sqrt{2}$, mithin besteht die Relation:

$$\overline{hg}^2 = \overline{Dh}^2 + \overline{Dg}^2 = 2\overline{Dh}^2 \text{ oder } = 2\overline{Dg}^2$$
$$= 2 \cdot (k - \frac{k}{2}\sqrt{2})^2 \text{ oder:}$$
$$\overline{hg}^2 = 2k^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$
$$hg = \sqrt{2k^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= k\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}$$

und hieraus erhält man für eine Kante $k_1$ des neuen Körpers:

$$1) \ldots \; k_1 = hg = k \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$ des neuen Körpers beachte man nunmehr, dass derselbe aus 6 regulären kongruenten Achtecken und acht kongruenten regul. Dreiecken besteht, dass der Inhalt $J_8$ eines dieser Achtecke:

$$2) \ldots \; J_8 = 2k^2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ (s. Erkl. 182)}$$

und der Inhalt $J_3$ eines dieser Dreiecke:

$$3) \ldots \; J_3 = \frac{k^2}{4}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \text{ (siehe Erkl. 184)}$$

ist.

Man erhält hiernach:

$$O = 6 \cdot 2k^2(\sqrt{2} - 1) + 8 \cdot \frac{k^2}{4}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$$

oder:

$$O = 2k^2[6(\sqrt{2} - 1) + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}]$$

als Resultat für die gesuchte Oberfläche.

---

Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ des neuen Körpers beachte man, dass das Volumen des Körpers gleich dem Volumen $k^3$ (s. vorst. Formel I) des Würfels, weniger der Summe der Volumen der an den 8 Ecken des Würfels abgeschnittenen 8 kongruenten Pyramidchen ist, und dass das Volumen $v$

mithin:

b) . . . $J = \frac{k^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$

**Erkl. 184.** Den Inhalt $J_3$ eines der den neuen Körper begrenzenden regulär. Dreiecke, z. B. des gleichseitigen Dreiecks $ghi$ in Fig. 37, findet man mittelst der Formel:

$$J_3 = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ (s. Erkl. 11, S. 5),}$$

wenn man in derselben für $s = hg$, nämlich den in nebenst. Auflösung aus der Gleichung 1) sich ergebenden Wert: $k(\sqrt{2} - 1)$ substituiert. Man erhält:

$$J_3 = \frac{[k(\sqrt{2} - 1)]^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ oder:}$$

$$J_3 = \frac{k^2(2 - 2\sqrt{2} + 1) \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$J_3 = \frac{k^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} \text{ mithin:}$$

a) . . . $J_3 = \frac{k^2}{4}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$

**Erkl. 185.** Das Volumen $v$ eines der an den Ecken des Würfels abgeschnittenen Pyramidchen, z. B. des Pyramidchens $Dgih$ in Fig. 37, findet man mittelst der umstehenden Formel II:

$$V = \frac{G \cdot H}{3}$$

Betrachtet man in dem Pyramidchen ($Dgih$) $Dig$ als Grundfläche und $Dh$ als Höhe*), so erhält man, da

$$Dig = \frac{Di \cdot Dg}{2} = \frac{\overline{Dg}^2}{2} \text{ und:}$$

$Dh = Dg$ ist, für das Volumen $v$:

$$v = \frac{\frac{\overline{Dg}^2}{2} \cdot Dg}{3} = \frac{\overline{Dg}^3}{6} \text{ oder, wenn man}$$

nach der in der Erkl. 183 stehenden Gleich. a)

$$Dg = \frac{k}{2}(2 - \sqrt{2}) \text{ setzt:}$$

$$v = \frac{\left(\frac{k}{2}(2 - \sqrt{2})\right)^3}{6} = \frac{k^3}{48}(8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2})$$

oder:

$$v = \frac{k^3}{48}(20 - 14\sqrt{2}) \text{ mithin:}$$

a) . . $v = \frac{k^3}{24}(10 - 7\sqrt{2})$

einer dieser Pyramidchen in die Kante $k$ des Würfels ausgedrückt, nach der Erklärung 185:

4) . . . $v = \frac{k^3}{24}(10 - 7\sqrt{2})$

ist. Man erhält hiernach:

$$V = k^3 - 8 \cdot \frac{k^3}{24}(10 - 7\sqrt{2})$$

oder:

$$V = k^3\left(1 - \frac{1}{3}(10 - 7\sqrt{2})\right)$$

$$V = \frac{k^3}{3}(3 - 10 + 7\sqrt{2})$$

$$V = \frac{k^3}{3}(7\sqrt{2} - 7) \text{ mithin:}$$

B) . . . $V = \frac{7k^3}{3}(\sqrt{2} - 1)$

als Resultat für das gesuchte Volumen.

*) Nach dieser Annahme ist das Pyramidchen $Dgih$ ein **schiefes**, da die Formel

$$V = \frac{G \cdot H}{3}$$

jedoch auch für **schiefe** Pyramiden gilt, wie später gezeigt wird, und diese Annahme rascher zum Ziele führt, so möchte dieselbe hier zu entschuldigen sein.

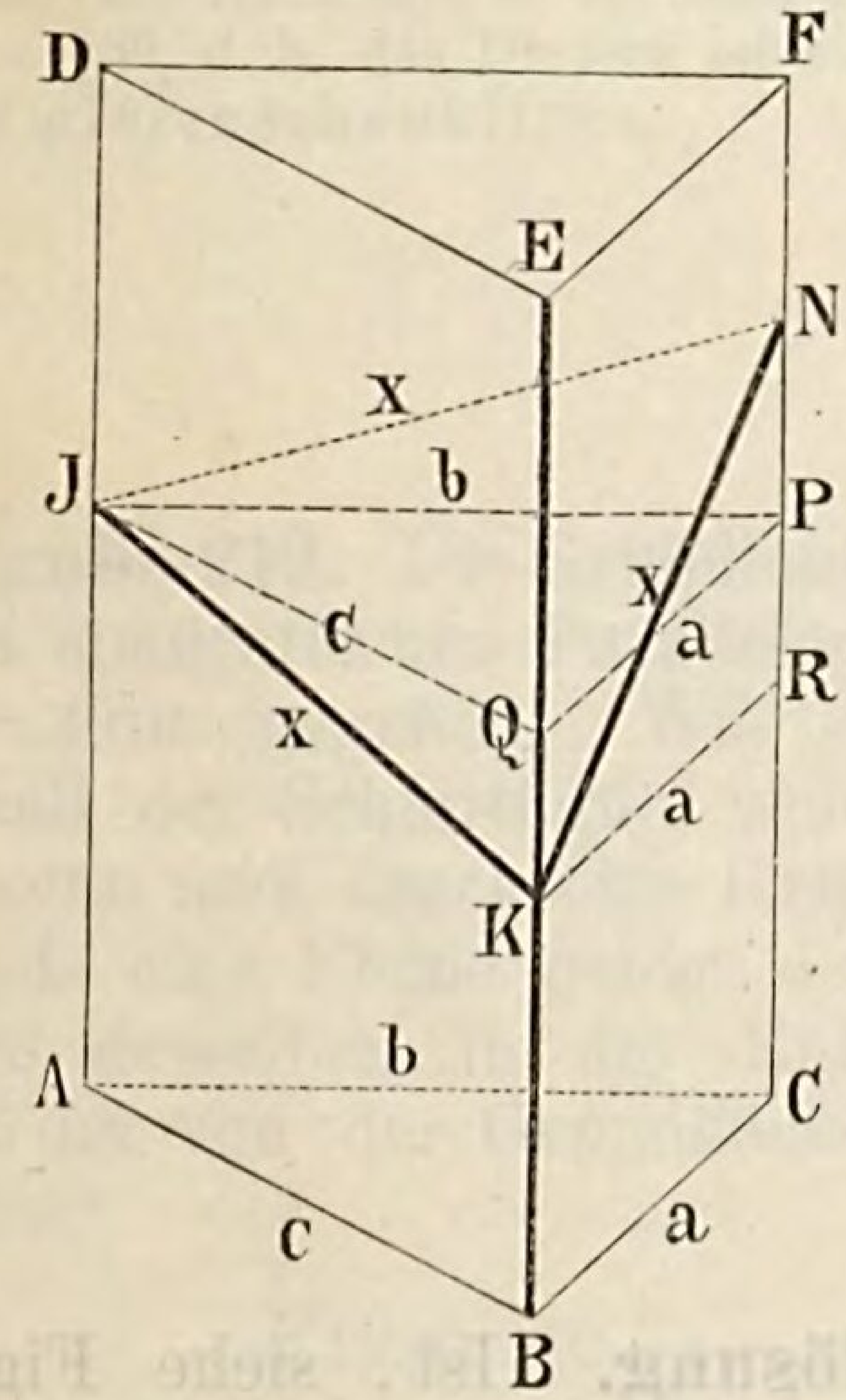
Man kann auch $hig$ als Grundfläche betrachten und dann ist die Pyramide $gihD$ eine **gerade**; in diesem Falle muss man den Inhalt $G$ der Fläche $gih$ berechnen, von $D$ die Höhe auf $gih$ fallen und diese Höhe $H$ in $Dg$ und den Radius $mi$ des um das Dreieck $hig$ beschriebenen Kreises ausdrücken etc.

**Anmerkung.** Weitere Aufgaben über den Würfel findet man in dem folgenden, dem V. Abschnitt.

---

**Aufgabe 217.** Die Grundkanten der Basis eines geraden dreiseitigen Prismas sind bezw. $a = 2$, $b = 4$ und $c = 3$ m lang. Dieses Prisma soll mittelst einer Ebene so durchschnitten werden, dass die Durchschnittsfigur ein gleichseitiges Dreieck ist; welche Länge wird eine Seite dieses Dreiecks haben?

Figur 38.




**Erkl. 186.** Nebenstehende Gleichung:

5) . . . $\sqrt{x^2 - 2^2} = \sqrt{x^2 - 4^2} + \sqrt{x^2 - 3^2}$

nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$(\sqrt{x^2 - 2^2})^2 = (\sqrt{x^2 - 4^2} + \sqrt{x^2 - 3^2})^2$$

$$x^2 - 2^2 = x^2 - 4^2 + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 4^2} \cdot \sqrt{x^2 - 3^2} + x^2 - 3^2$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 16 + 2\sqrt{(x^2 - 16) \cdot (x^2 - 9)} + x^2 - 9$$

$$16 + 9 - 4 - x^2 = 2\sqrt{x^4 - 16x^2 - 9x^2 + 144}$$

$$21 - x^2 = 2\sqrt{x^4 - 25x^2 + 144}$$

$$(21 - x^2)^2 = (2\sqrt{x^4 - 25x^2 + 144})^2$$

$$21^2 - 2 \cdot 21 \cdot x^2 + x^4 = 4(x^4 - 25x^2 + 144)$$

$$441 - 42x^2 + x^4 = 4x^4 - 100x^2 + 576$$

$$441 - 576 = 4x^4 - x^4 - 100x^2 + 42x^2$$

$$3x^4 - 58x^2 = -135$$

$$x^4 - \frac{58}{3}x^2 = -\frac{135}{3}$$

**Auflösung.** Angenommen, in Fig. 38 sei $JKN$ das die Durchschnittsfigur der gedachten Ebene mit dem Prisma bildende gleichseitige Dreieck, dessen Seite $x$ berechnet werden soll.

Legt man zu diesem Zweck durch den mittleren Durchschnittspunkt $J$ eine Ebene $JPQ$ parallel zur Grundfläche $ACB$ und zieht $KR$ parallel $QP$, so ist

$$JP = AC = b = 4 \text{ m}$$
$$JQ = AB = c = 3 \text{ m}$$
$$RK = PQ = CB = a = 2 \text{ m}$$

und man hat in den rechtwinkligen Dreiecken $JPN$, $JQK$ und $KRN$, zwischen der gesuchten Dreiecksseite $x$, den gegebenen Dimensionen 4, 3 u. 2 m und den Abschnitten $NP$, $QK$ u. $NR$ die Relationen:

$$\overline{NP}^2 = \overline{JN}^2 - \overline{JP}^2 \text{ oder}$$

1) . . . $NP = \sqrt{x^2 - 4^2}$

$$\overline{QK}^2 = \overline{JK}^2 - \overline{JQ}^2 \text{ oder}$$

2) . . . $QK = \sqrt{x^2 - 3^2}$

$$\overline{NR}^2 = \overline{NK}^2 - \overline{RK}^2 = \overline{NK}^2 - \overline{PQ}^2$$

oder:

3) . . . $NR = \sqrt{x^2 - 2^2}$ und

4) . . . $NR = NP + PR = NP + QK$

Substituiert man die für $NR$, $NP$ und $QK$ mittelst den Gleich. 1) bis 3) gefundenen Werte in die Gleich. 4), so erhält man für $x$ die Bestimmungsgleich.:

5) . . $\sqrt{x^2 - 2^2} = \sqrt{x^2 - 4^2} + \sqrt{x^2 - 3^2}$

und hieraus ergibt sich für die gesuchte Dreiecksseite nach nebensteh. Erkl. 186:

$$x_1 = 4{,}07 \text{ m}$$
$$x_2 = 1{,}6 \text{ m}$$

indem die gefundenen negativen Werte für $x_3$ und $x_4$ unbrauchbar sind.

Denkt man sich nunmehr $x^2 = y$, also $x^4 = y^2$ gesetzt, so erhält man:

$$y = x^2 = \frac{58}{2 \cdot 3} \pm \sqrt{-\frac{135}{3} + \left(\frac{58}{2 \cdot 3}\right)^2} \quad \text{oder:}$$

$$x^2 = \frac{29}{3} \pm \sqrt{-\frac{135}{3} + \left(\frac{29}{3}\right)^2}$$

$$x^2 = \frac{29}{3} \pm \sqrt{\frac{-405 + 841}{9}}$$

$$x^2 = \frac{29}{3} \pm \sqrt{\frac{436}{9}} = \frac{29}{3} \pm \frac{20,88}{3}$$

mithin ist:

$$x = \pm \sqrt{\frac{29 \pm 20,88}{3}}$$

und hieraus erhält man für $x$ die 4 Werte:

$$x_1 = + \sqrt{\frac{29 + 20,88}{3}} = \sqrt{\frac{49,88}{3}} = \sqrt{16,63} = 4,07 \cdots$$

$$x_2 = + \sqrt{\frac{29 - 20,88}{3}} = \sqrt{\frac{8,12}{3}} = \sqrt{2,706} = 1,6 \cdots$$

$$x_3 = - \sqrt{\frac{29 + 20,88}{3}} = -4,07 \cdots$$

$$x_4 = - \sqrt{\frac{29 - 20,88}{3}} = -1,6 \cdots$$

Untersucht man, ob die beiden für $x_1$ und $x_2$ gefundenen Werte der Aufgabe genügen, so findet man, da die Dreiecksseite $x$ grösser als der senkrechte Abstand je zweier der Seitenkanten des Prismas, also auch grösser als 4 m sein muss, dass der gesuchten Dreiecksseite nur der Wert:

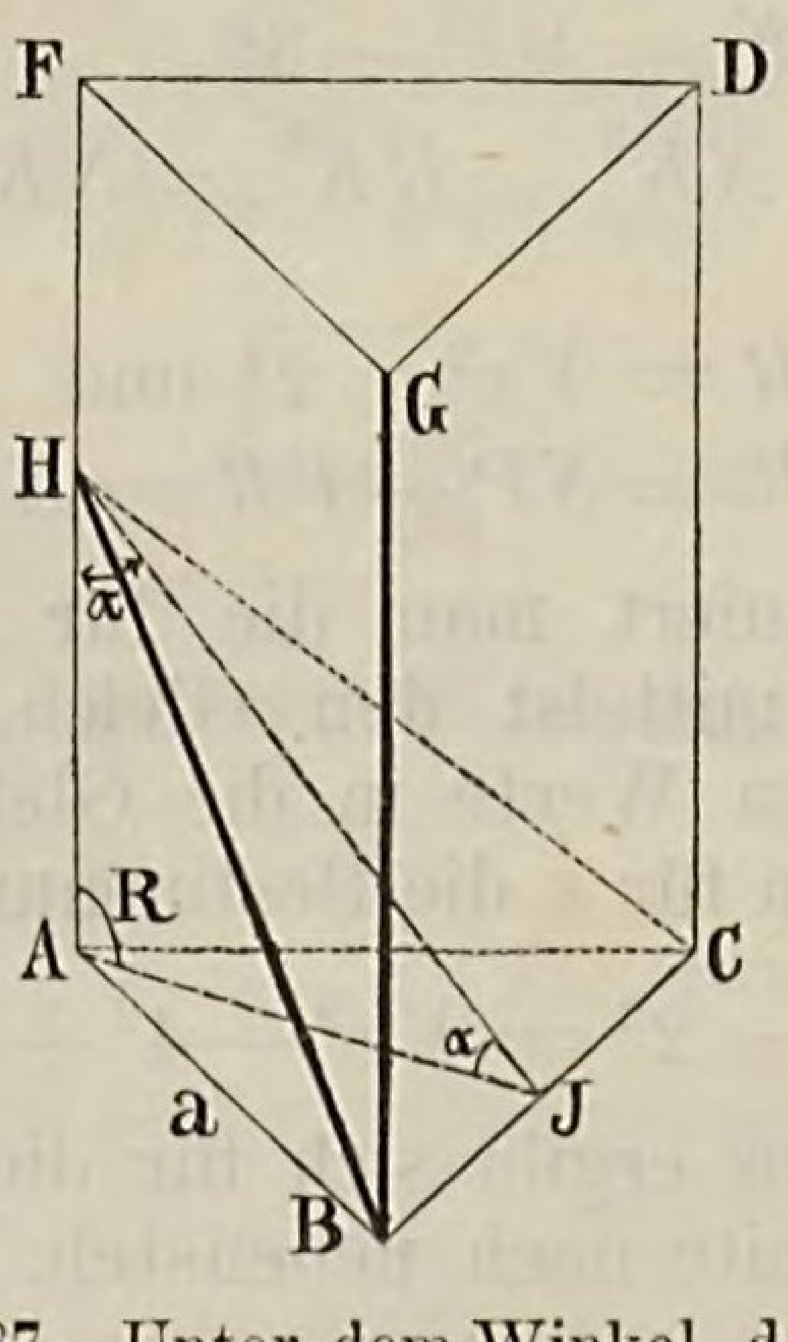
$$x_1 = 4,07 \text{ m}$$

genügt.

---

**Aufgabe 218.** Die Grundkante eines geraden dreiseitigen Prismas mit regulärer Basis sei $a = 6$ dm gegeben. Wie gross ist der Inhalt der Schnittfigur, welche entsteht, wenn man durch eine Grundkante des Prismas eine Ebene gelegt denkt, die mit der Grundfläche einen Winkel $\alpha = 45^0$ bildet?

Figur 39.




**Auflösung.** Ist, siehe Figur 39, $BCH$ die Schnittfigur, welche entsteht, wenn man z. B. durch die Grundkante $BC$ eine Ebene gelegt denkt, die mit der Grundfläche $ABC$ den Winkel $\alpha = 45^0$ (s. Erkl. 187) bildet und man fällt von $A$ und $H$ die Senkrechten $AJ$ und $HJ$ auf $BC$, so entsteht das bei $A$ rechtwinklige gleichschenklige Dreieck $HAJ$ (s. Erkl. 189). Für den gesuchten Inhalt $x$ des Dreiecks $BCH$ besteht die Relation:

$$1) \ldots x = \frac{BC \cdot HJ}{2}$$

Da nun $BC = a$, nämlich gleich der gegebenen Grundkante, und in dem rechtwinkligen, gleichschenkl. Dreieck $JAH$:

$$\overline{HJ}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AJ}^2 = \overline{AJ}^2 + \overline{AJ}^2$$

oder:

$$HJ = \sqrt{2\overline{AJ}^2} = AJ\sqrt{2}$$

**Erlk. 187.** Unter dem Winkel, den 2 Ebenen bilden, versteht man **den Neigungswinkel** (siehe Erkl. 188) beider Ebenen. Da das Dreieck $BCH$ in Figur 39 ein gleichschenkliges mit der Basis $BC$, und da ferner das Dreieck $ABC$ ein gleich-

seitiges ist, so treffen sich die von $A$ und $H$ auf $BC$ gefällten Senkrechten in der Mitte $J$ der Grundkante $BC$ und diese Senkrechten schliessen den gegebenen Winkel $\alpha$ ein (siehe Erkl. 188).

**Erkl. 188.** Unter dem **Neigungswinkel** zweier sich schneidenden Ebenen versteht man den Winkel, welchen die zwei in einem beliebigen Punkte der Durchschnittslinie auf letztere errichteten Senkrechten bilden, von welchen die eine Senkrechte in der einen Ebene, die zweite Senkrechte in der andern Ebene liegt.

**Erkl. 189.** Ist in einem rechtwinkligen Dreieck (wie im Dreieck $HAJ$, siehe Figur 39) ein Winkel $(HJA) = 45^0$, so ist auch der andere Winkel $= 45^0$, d. h. das Dreieck ist ein rechtwinklig gleichschenkliges.

oder nach der Erkl. 11, Seite 5

$$HJ = \frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

ist, so erhält man für den gesuchten Inhalt $x$:

$$x = a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{6} : 2 \text{ oder:}$$

$$x = \frac{a^2}{4}\sqrt{6}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht des für $a$ gegebenen Zahlenbeispiels ergibt sich hieraus:

$$x = \frac{6^2}{4}\sqrt{6} = \frac{36}{4}\sqrt{6} = 9\sqrt{6}$$
$$= 9\cdot 2{,}449$$

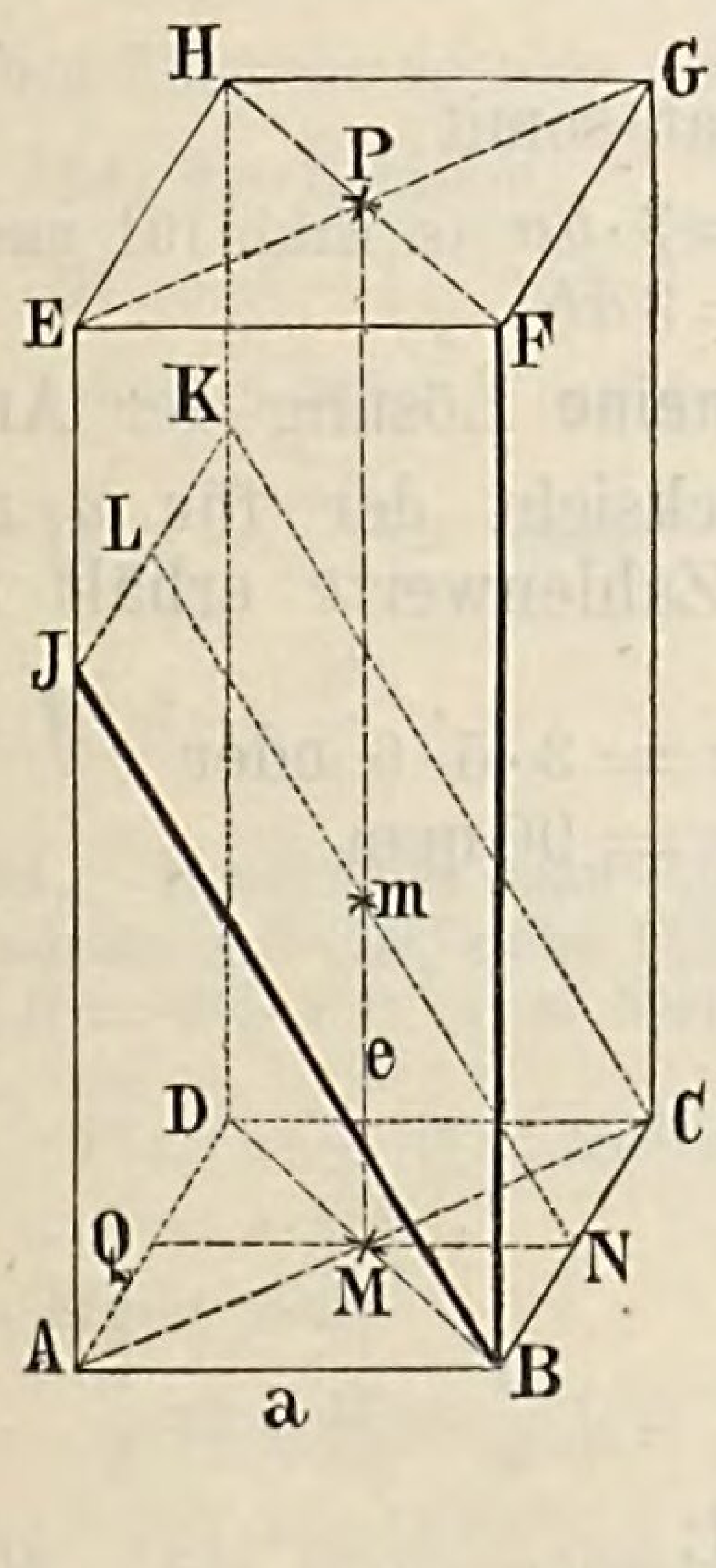
oder:

$$x = 22{,}041 \text{ qdm}$$

---

**Aufgabe 219.** Die Grundkante eines geraden quadratischen Parallelopipedons sei $a = 4$ dm gegeben. Wie gross ist der Inhalt der Schnittfigur, welche entsteht, wenn man durch eine Grundkante des $\|$ppds eine Ebene gelegt denkt, die die Axe desselben in der Entfernung $e = 1{,}5$ dm von der Grundfläche durchschneidet?

Figur 40.




**Auflösung.** Ist, siehe Figur 40, $BCKJ$ die Schnittfigur, welche entsteht, wenn man z. B. durch die Grundkante $BC$ eine Ebene gelegt denkt, welche die Axe $MP$ des $\|$ppds in der Entfernung $Mm = e$ von der Grundfläche schneidet und man zieht durch $m$ die zu $BC$ senkrechte, bezw. zu $JB$ parallele Linie $LN$, so hat man zur Berechnung des gesuchten Inhalts $x$ der Schnittfigur, die Relation:

1) . . . $x = BC\cdot LN$

Da nun $BC = a$, nämlich gleich der gegebenen Grundkante des $\|$ppds ist, da ferner $LN = 2\cdot mN$ (siehe Erkl. 190), $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ ist und in dem bei $M$ rechtwinkligen Dreieck $mMN$ die Relation:

$$mN = \sqrt{\overline{Mm}^2 + \overline{MN}^2} \text{ oder:}$$

$$mN = \sqrt{e^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ besteht,}$$

so geht vorstehende Gleich. 1) über, in:

$$x = a\cdot 2\cdot\sqrt{e^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

und hieraus erhält man für den gesuchten Inhalt $x$:

**Erkl. 190.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogramms eine beliebige Linie, so sind die Abschnitte dieser Linie, die zwischen jenem Durchschnittspunkt und den Seiten des Parallelogramms liegen, einander gleich.“

$$x = 2a\sqrt{e^2 + \frac{a^2}{4}} = 2a\sqrt{\frac{4e^2 + a^2}{4}}$$

$$= \frac{2a}{2}\sqrt{4e^2 + a^2}$$

oder:

$$x = a\sqrt{(2e)^2 + a^2}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $a$ und $e$ gegebenen Zahlenwerte erhält man hieraus:

$$x = 4\sqrt{(2\cdot 1{,}5)^2 + 4^2} = 4\sqrt{3^2 + 4^2}$$

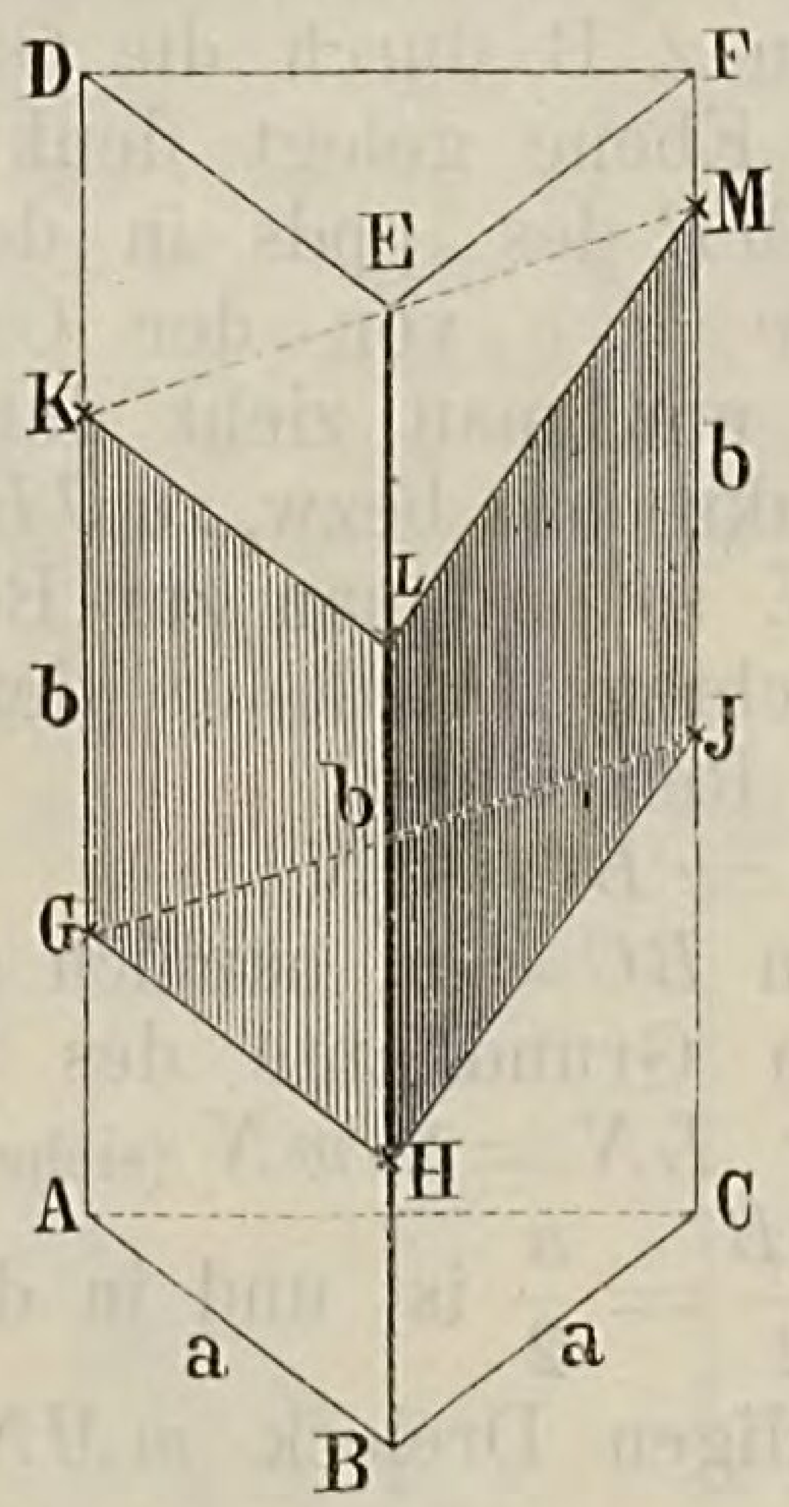
$$x = 4\sqrt{9 + 16} = 4\sqrt{25} = 4\cdot 5 \text{ oder:}$$

$$x = 20 \text{ qdm}$$

---

**Aufgabe 220.** Die Grundkante eines geraden dreiseitigen Prismas sei $a = 5$ cm gegeben. Durch dieses Prisma werden zwei parallele Ebenen so gelegt, dass der zwischen denselben liegende Körperteil ein schiefes Prisma mit der Seitenkante $b = 6$ cm ist. Wie gross ist die Mantelfläche des herausgeschnittenen schiefen Prismas?

Figur 41.




**Erkl. 191.** Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

**Erkl. 192.** Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich.

**Auflösung.** Die gesuchte Mantelfläche $x$ des zwischen den gedachten parallelen Schnittebenen liegenden schiefen Prismas $GHJMKL$, siehe Figur 41, besteht aus den drei Parallelogrammen $GHLK$, $LHJM$ und $MJGK$. Diese Parallelogramme haben gleiche Grundlinien, das sind die Seitenkanten $b$ des schiefen Prismas und gleiche Höhen, das sind die senkrechten Abstände je zweier Seitenkanten, bezw. die gegebenen Grundkanten $a$.

Man hat somit:

$$x = 3\cdot ba \quad \text{(s. Erkl. 191 und 192)}$$

$$x = 3ab$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $a$ und $b$ gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

$$x = 3\cdot 5\cdot 6 \text{ oder}$$

$$x = 90 \text{ qcm}$$

---

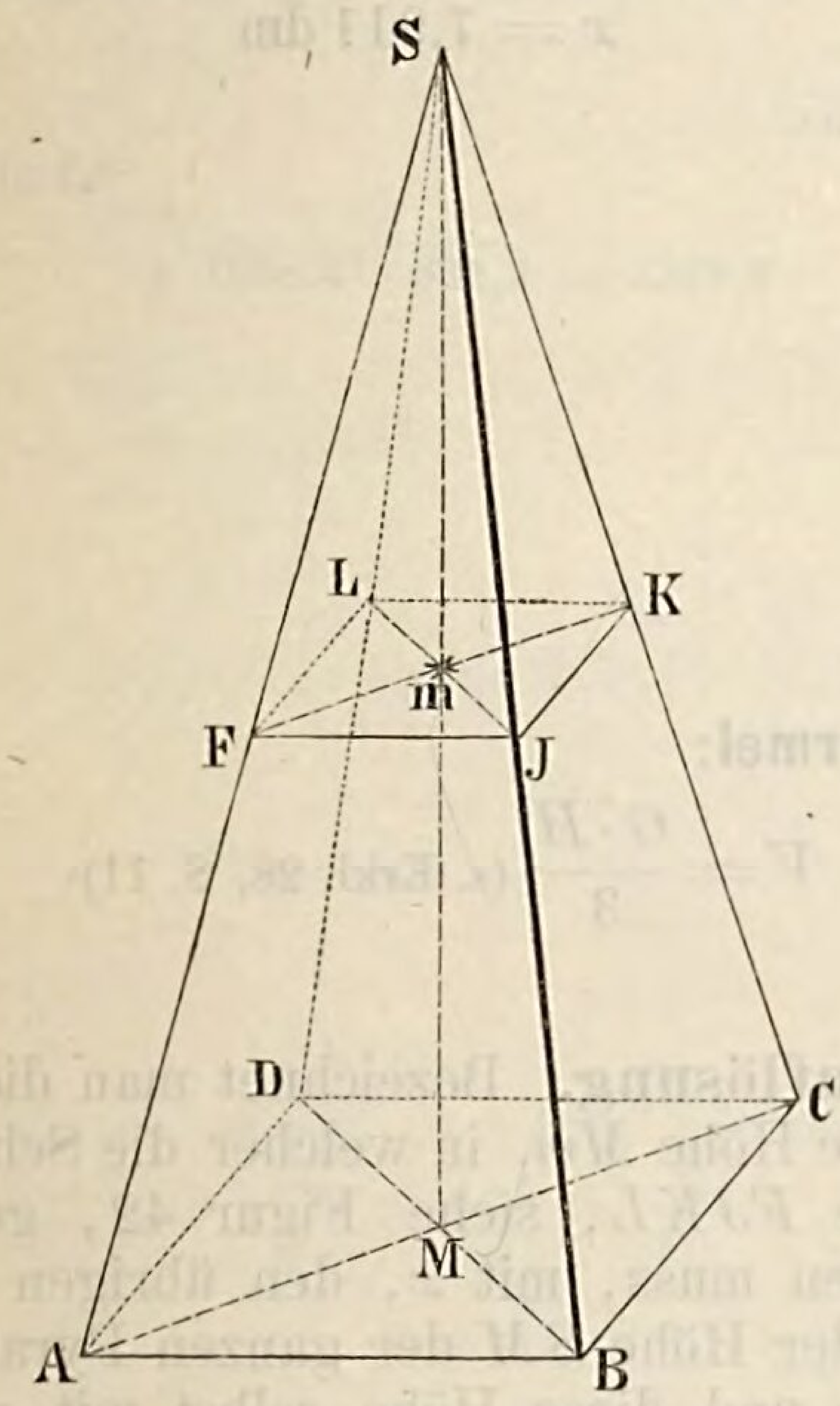
**Aufgabe 221.** Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche, soll durch eine zu dieser parallelen Ebene halbiert werden. In welcher Entfernung

**Formel:**

$$V = \frac{G\cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl 28, S. 11).}$$

von der Spitze ist diese Schnittebene zu legen, wenn eine Grundkante $a = 4$ dm und eine Seitenkante $s$ der Pyramide $= 10$ dm lang ist?

Figur 42.




**Erkl. 193.** In dem bei $M$ rechtwinkligen Dreieck $AMS$, siehe Figur 42 besteht zwischen der Höhe $SM = H$, der Seitenkante $SA = s$ und der halben Flächendiagonale $AM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (siehe Erkl. 194) die Relation:

$$H^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

und hieraus erhält man:

$$H = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4} \cdot 2} \quad \text{oder:}$$

$$H = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}$$

**Erkl. 194.** Bezeichnet man die Diagonale $AC$ des Quadrats $ABCD$, siehe Fig. 42, mit $d$, die Seite $AB = BC$ mit $a$, so besteht die Relation:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \text{oder:}$$

$$1) \ldots d = a\sqrt{2}$$

und hieraus ergibt sich:

$$2) \ldots \frac{d}{2} = AM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

**Erkl. 195.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Legt man durch eine Pyramide parallele Ebenen zur Grundfläche, so verhalten sich

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchte Entfernung $Sm$ der Schnittebene $FJKL$, siehe Figur 42, mit $x$, den Inhalt der Grundfläche $ABCD$ mit $G$, den Inhalt der Schnittfigur $FJKL$ mit $g$, die Höhe $SM$ der Pyramide mit $H$, wobei zu beachten ist, dass für $H$, in die Grundkante $AB = a$ und die Seitenkante $SA = s$ ausgedrückt:

$$1) \ldots H = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}$$

gesetzt werden kann (s. Erkl. 193), so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formel, die Relation:

$$\frac{g \cdot x}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{oder:}$$

$$2) \ldots g \cdot x = \frac{G \cdot H}{2}$$

Den noch unbekannten Inhalt $g$ der Schnittfigur $FJKL$ kann man nach der Erkl. 195 mittelst der Proportion:

$$g : G = x^2 : H^2$$

in die Stücke $G$, $H$ und $x$ ausdrücken. Man erhält:

$$3) \ldots g = \frac{G \cdot x^2}{H^2}$$

Aus den Gleich. 2) und 3) folgt nunmehr:

$$\frac{G \cdot x^2}{H^2} \cdot x = \frac{G \cdot H}{2}$$

und hieraus ergibt sich

$$x^3 = \frac{H^3}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{H^3}{2}} = H\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = H\sqrt[3]{\frac{4}{8}} \quad \text{od.:}$$

$$4) \ldots x = \frac{H}{2} \cdot \sqrt[3]{4}$$

Wird hierin der für $H$ in $s$ und $a$ ausgedrückte Wert aus Gleich. 1) substituiert, so erhält man für die gesuchte Entfernung:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} \cdot \sqrt[3]{4}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

die Inhalte der entstehenden Schnittfiguren, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze" (s. Erkl. 196).

**Erkl. 196.** Der in der Erklärung 195 ausgesprochene Satz gilt auch von den Grundflächen ähnlicher Pyramiden in Bezug auf die zugehörigen Höhen.

Man siehe die Erkl. 174, Seite 98 und die Erkl. 92 bis 97, Seite 46.

**Hülfsrechnung.**

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10^2 - \frac{4^2}{2}} \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{100 - \frac{16}{2}} \cdot \sqrt[3]{4} = \frac{1}{2} \sqrt{92} \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9{,}592 \cdot 1{,}587 = 4{,}796 \cdot 1{,}587$$

$$= 7{,}911252.$$

In Rücksicht der für $a$ und $s$ gegebenen Zahlenwerte erhält man:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10^2 - \frac{4^2}{2}} \cdot \sqrt[3]{4}$$

oder nach nebensteh. Hülfsrechnung:

$$x = 7{,}911 \text{ dm}$$

---

**Aufgabe 222.** Eine Pyramide, deren Grundfläche $G = 204{,}8$ qm beträgt, hat ein Volumen $V = 1638{,}4$ cbm. In welcher Höhe über der Grundfläche muss sie parallel zur Grundfläche abgeschnitten werden, damit der Kubikinhalt des entstandenen Pyramidenstumpfs $V_1 = 947{,}2$ cbm beträgt?

**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28, S. 11)}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchte Höhe $Mm$, in welcher die Schnittebene $FJKL$, siehe Figur 42, gelegt werden muss, mit $x$, den übrigen Teil $mS$ der Höhe $SM$ der ganzen Pyramide mit $y$ und diese Höhe selbst mit $z$, so hat man die Relation:

$$1) \ldots x = z - y \quad \text{(s. Erkl. 197).}$$

Da man das Volumen $V$ und die Grundfläche $G$ der ganzen Pyramide kennt, so findet man die Höhe $z$ nach vorstehender Formel aus der Gleichung:

$$\frac{G \cdot z}{3} = V$$

Man erhält:

$$2) \ldots z = \frac{3V}{G}$$

Die Höhe $Sm = y$ der oberen abgeschnittenen Pyramide findet man der Aufgabe gemäss mit Benutzung der vorstehenden Formel, wenn man den Inhalt der Schnittfläche mit $w$ bezeichnet, aus der Gleichung:

$$3) \ldots V - \frac{w \cdot y}{3} = V_1$$

Die in dieser Gleichung noch vorkommende Unbekannte $w$, d. i. der Inhalt der Schnittfläche, kann man nach der Erkl. 195 mittelst der Proportion:

$$G : w = z^2 : y^2$$

**Erkl. 197.** Hätte man die gesuchte Entfernung $Mm = x$ direkt, und nicht erst den Abschnitt $Sm = y$, bestimmen wollen, so hätte die Lösung der Aufgabe auf eine **kubische** Gleichung geführt.

**Hülfsrechnungen.**

1)

$$x = \frac{3}{204{,}8} \cdot \left(1638{,}4 - \sqrt[3]{1638{,}4^2 (1638{,}4 - 947{,}2)}\right)$$

$$= \frac{3}{204{,}8} \left(1638{,}4 - \sqrt[3]{1638{,}4^2 \cdot 691{,}2}\right)$$

$$= \frac{3}{204{,}8} (1638{,}4 - 1228{,}8) \quad \text{(s. Hülfsrechn. 2)}$$

$$= \frac{3 \cdot 409{,}6}{204{,}8} = \frac{1228{,}8}{204{,}8} \quad \text{oder:}$$

$$x = 6$$

---

2)

$$log \sqrt[3]{1638{,}4^2 \cdot 691{,}2} = \frac{1}{3} \cdot (log\, 691{,}2 + 2 \cdot log\, 1638{,}4)$$

Nun ist: $log\, 691{,}2 = 2{,}8396037$

$+ 2 \cdot log\, 1638{,}4 = 2 \cdot 3{,}2144199 = 6{,}4288398$

$9{,}2684435$

$\cdot \frac{1}{3}$

$3{,}0894812$

mithin ist

$$\sqrt[3]{1638{,}4^2 \cdot 691{,}2} = 1228{,}8$$

bezw. unter Berücksichtigung der Gleichung 2), mittelst der Proportion:

$$4) \ldots G : w = \left(\frac{3\,V}{G}\right)^2 : y^2$$

in $V$, $G$ und $y$ ausdrücken, man erhält:

$$G : w = \frac{9\,V^2}{G^2} : y^2$$

$$w \cdot \frac{9\,V^2}{G^2} = G \cdot y^2 \text{ oder:}$$

$$5) \ldots w = \frac{G^3 \cdot y^2}{9\,V^2}$$

Substituiert man diesen Wert für $w$ in Gleich. 3), so ergibt sich:

$$V - \frac{G^3 \cdot y^3}{27\,V^2} = V_1 \text{ oder:}$$

$$\frac{G^3 \cdot y^3}{27\,V^2} = V - V_1$$

$$y^3 = \frac{27\,V^2}{G^3}\,(V - V_1), \text{ mithin}$$

$$6) \ldots y = \frac{3}{G} \sqrt[3]{V^2 (V - V_1)}$$

Aus den Gleich. 1), 2) und 6) erhält man endlich für die gesuchte Höhe $x$:

$$x = \frac{3\,V}{G} - \frac{3}{G} \sqrt[3]{V^2 (V - V_1)}$$

$$x = \frac{3}{G}\left(V - \sqrt[3]{V^2 (V - V_1)}\right)$$

und dies ist die **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $G$, $V$ und $V_1$ gegeb. Zahlenwerte ergibt sich hieraus:

$$x = \frac{3}{204{,}8}\left(1638{,}4 - \sqrt[3]{1638{,}4^2\,(1638{,}4 - 947{,}2)}\right)$$

oder nach nebensteh. Hülfsrechnung:

$$x = 6 \text{ m}$$

---

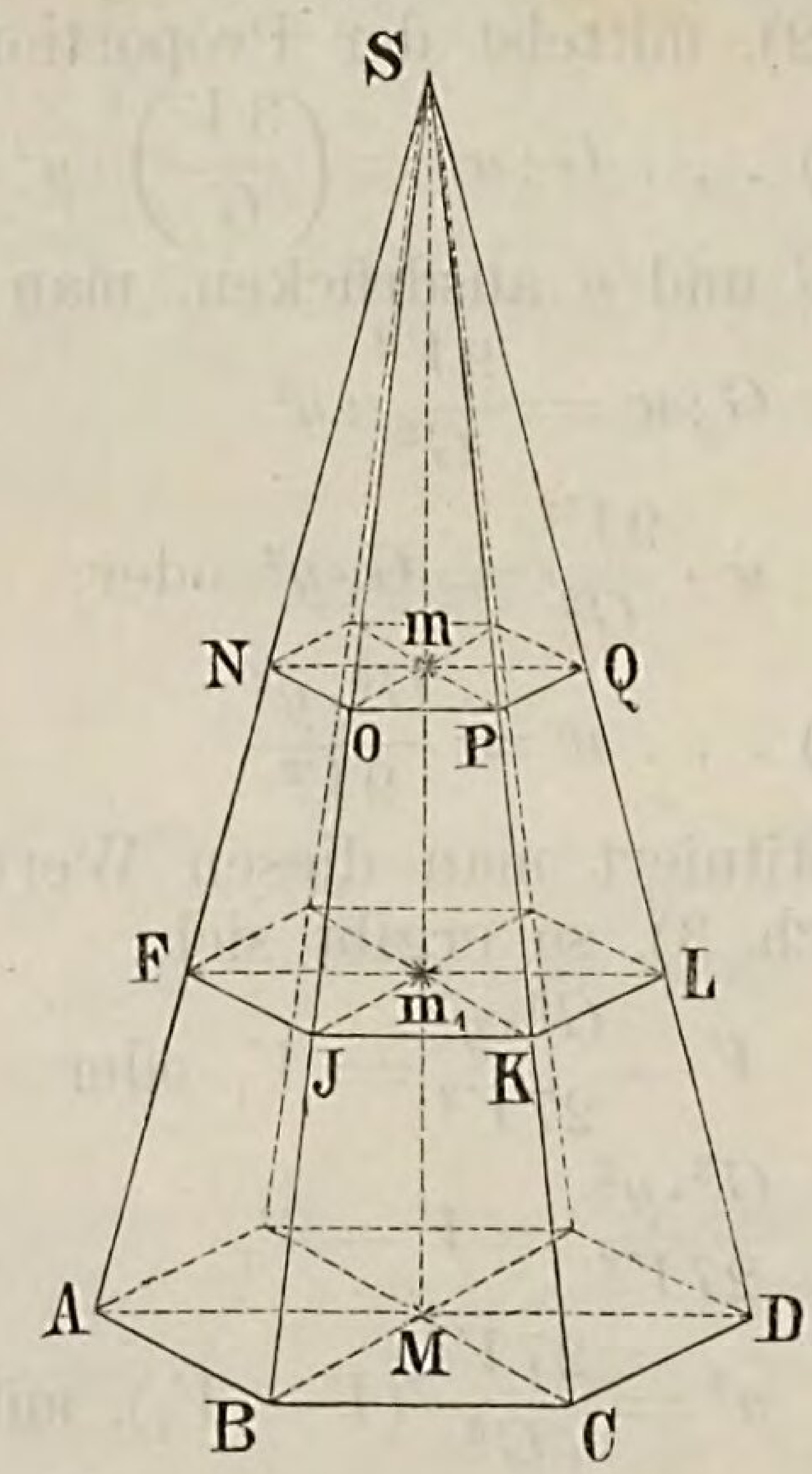
**Aufgabe 223.** Eine gerade Pyramide, deren Höhe $H = 10$ m beträgt, soll durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen in drei gleiche Teile geteilt werden. Welche Höhe wird jeder dieser 3 Teile erhalten?

**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 28, S. 11).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die Entfernung $Sm$, siehe Figur 43, der der Spitze der Pyramide am nächsten liegenden Ebene von dieser Spitze mit $x$, den Inhalt der Schnittfigur $NOPQ$ dieser Ebene mit $g$; ferner den Abstand $Sm_1$ der 2. Schnittebene von der Spitze

Figur 43.




**Erkl. 198.** Die gesuchte Höhe $Mm_1$ des der Grundfläche $ABCD\cdots$ (s. Figur 43) am nächsten liegenden Körperteils, ist:

$$Mm_1 = MS - Sm_1$$

oder, da $MS = H$ ist und $Sm_1 = y$ gesetzt wurde:

$$Mm_1 = H - y$$

Substituiert man hierin aus nebenstehender Gleich. b) den für $y$ gefundenen Wert, so erhält man:

$$Mm_1 = H - \frac{H}{3}\sqrt[3]{18}$$

oder:

$$Mm_1 = \frac{3H}{3} - \frac{H}{3}\sqrt[3]{18}, \text{ mithin}$$

$$Mm_1 = \left(3 - \sqrt[3]{18}\right)\cdot\frac{H}{3}$$

$$Mm_1 = (3 - 2{,}621)\cdot\frac{H}{3}$$

$$Mm_1 = 0{,}379\cdot\frac{H}{3} \text{ und schliesslich:}$$

$$Mm_1 = 0{,}1264\cdot H$$

**Erkl. 199.** Die gesuchte Höhe $m_1m$ des zwischen den parallelen Schnittebenen liegenden Körperteils (s. Figur 43), ist:

$$m_1m = m_1S - mS$$

oder, da $m_1S = y$ und $mS = x$ gesetzt wurde:

$$m_1m = y - x$$

Substituiert man hierin aus nebenstehenden Gleich. a) und b) die für $x$ und $y$ gefundenen Werte, so erhält man:

$$m_1m = \frac{H}{3}\sqrt[3]{18} - \frac{H}{3}\sqrt[3]{9}$$

$$m_1m = \left(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{9}\right)\cdot\frac{H}{3}$$

mit $y$, den Inhalt dieser Schnittfigur $FJKL$ mit $g_1$ und schliesslich den Inhalt der Grundfläche $ABCD\cdots$ der ganzen Pyramide mit $G$, so hat man gemäss der Aufgabe und mit Benutzung der vorsteh. Formel, die Gleichungen:

$$1)\ \ldots\ \frac{1}{3}\cdot\frac{G\cdot H}{3} = \frac{g\cdot x}{3}$$

$$2)\ \ldots\ \frac{2}{3}\cdot\frac{G\cdot H}{3} = \frac{g_1\cdot y}{3}$$

Nach der Erkl. 195 bestehen ferner noch die weiteren Gleichungen:

$$3)\ \ldots\ G : g = H^2 : x^2$$

$$4)\ \ldots\ G : g_1 = H^2 : y^2$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) erhält man:

$$5)\ \ldots\ g = \frac{G\cdot x^2}{H^2} \text{ und}$$

$$6)\ \ldots\ g_1 = \frac{G\cdot y^2}{H^2}$$

Reduziert man die Gleich. 1) und 2) und setzt für $g$ und $g_1$ die mittelst den Gleich. 5) und 6) gefundenen Werte ein, so erhält man einmal:

$$\frac{G\cdot H}{3} = \frac{G\cdot x^2}{H^2}\cdot x \text{ oder:}$$

$$\frac{H^3}{3} = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{H^3}{3}} = \sqrt[3]{\frac{H^3\cdot 9}{3^3}} \text{ mithin:}$$

$$a)\ \ldots\ x = \frac{H}{3}\sqrt[3]{9}$$

Ferner erhält man:

$$\frac{2G\cdot H}{3} = \frac{G\cdot y^2}{H^2}\cdot y \text{ oder:}$$

$$\frac{2H^3}{3} = y^3$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2H^3}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2H^3\cdot 9}{3^3}} \text{ mithin:}$$

$$b)\ \ldots\ y = \frac{H}{3}\sqrt[3]{18}$$

Mit Hülfe dieser für $x$ und $y$ gefundenen Werte erhält man auf rasche Weise die gesuchten Höhen der durch die Schnittebene entstandenen Körperteile.

$$m_1 m = (2{,}621 - 2{,}080) \cdot \frac{H}{3}$$

$$m_1 m = 0{,}541 \cdot \frac{H}{3} \text{ und schliesslich}$$

$$m_1 m = 0{,}1804 \cdot H$$

**Erkl. 200.** Die gesuchte Höhe $Sm$, siehe Figur 43, findet man direkt mittelst nebensteh. Gleichung; nach derselben ist:

$$Sm = x = \frac{H}{3}\sqrt[3]{9}$$

oder:

$$Sm = 2{,}080 \cdot \frac{H}{3}$$

$$Sm = 0{,}6933 \cdot H$$

Nach der Erkl. 198 ergibt sich hiernach, siehe Figur 43:

A) . . . $Mm_1 = 0{,}1264 \cdot H$

Nach der Erkl. 199 ergibt sich:

B) . . . $m_1 m = 0{,}1804 \cdot H$

Nach der Erkl. 200 ergibt sich:

C) . . . $Sm = 0{,}6933 \cdot H$

und dies die **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht des für $H$ gegebenen Zahlenwerts erhält man aus den Gleich. A), B) und C):

$$Mm_1 = 1{,}264 \text{ m}$$
$$m_1 m = 1{,}804 \text{ m und}$$
$$Sm = 6{,}933 \text{ m}$$

---

**Aufgabe 224.** In welchem Verhältnis muss die Höhe einer Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene geteilt werden, damit der obere abgeschnittene Teil der Pyramide gleich dem $m$ten, z. B. dem 5ten Teil, der ganzen Pyramide ist?

**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 28, S. 11).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 42, $FJKL$ die gedachte Schnittebene und bezeichnet man die Höhe $SM$ mit $H$, den unbekannten Abschnitt $Sm$ derselben mit $x$, also ist der andere Abschnitt $mM = (H - x)$, so hat man für das gesuchte Verhältnis:

1) . . . $Sm : mM = x : (H - x)$

Um nun das gesuchte Verhältnis näher bestimmen zu können, muss man den Abschnitt $x$ in die ganze Höhe $H$ ausdrücken und dies geschieht, wie folgt:

Bezeichnet man die Grundfläche der Pyramide mit $G$, den Inhalt der Schnittfigur $FJKL$ mit $g$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formel, die Beziehung:

$$\frac{g \cdot x}{3} = \frac{1}{m} \cdot \frac{G \cdot H}{3} \text{ oder:}$$

2) . . . $x = \frac{1}{m} \cdot \frac{G}{g} \cdot H$

Ferner hat nach der Erkl. 195, S. 109 zur Bestimmung des in dieser Gleichung vorkommenden Quotienten $\frac{G}{g}$, die Proportion:

3) . . . $\frac{G}{g} = \frac{H^2}{x^2}$

Aus den Gleich. 2) und 3) erhält man:

$$x = \frac{1}{m} \cdot \frac{H^3}{x^2} \text{ oder:}$$

**Erkl. 201.** Setzt man in nebenst. Gleichung:

1) . . . $Sm : mM = x : (H - x)$

für $x$ den sich aus nebenstehend. Gleichung 4) ergebenden Wert:

$$x = H\sqrt[3]{\frac{1}{m}},$$

so erhält man:

$$Sm : mM = H\sqrt[3]{\frac{1}{m}} : \left(H - H\sqrt[3]{\frac{1}{m}}\right)$$

$$= H\sqrt[3]{\frac{1}{m}} : H\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{m}}\right) \text{ oder:}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{m}} : \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{m}}\right)$$

Dividiert man nunmehr Zähler und Nenner des Quotienten rechts durch $\sqrt[3]{\frac{1}{m}}$, so restiert:

$$Sm : mM = 1 : \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{m}}} - 1\right) \text{ oder:}$$

$$= 1 : \left(\sqrt[3]{\frac{1^3}{\frac{1}{m}}} - 1\right)$$

$$= 1 : \left(\sqrt[3]{\frac{1^3 \cdot m}{1}} - 1\right)$$

mithin ist:

$$Sm : mM = 1 : \left(\sqrt[3]{m} - 1\right)$$

$$x^3 = \frac{1}{m} H^3, \text{ mithin:}$$

$$4) \ldots x = H \sqrt[3]{\frac{1}{m}}$$

Substituiert man diesen Wert für $x$ in Gleich. 1), so ergibt sich nach der Erkl. 201 für das gesuchte Verhältnis:

$$Sm : mM = 1 : \left(\sqrt[3]{m} - 1\right)$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

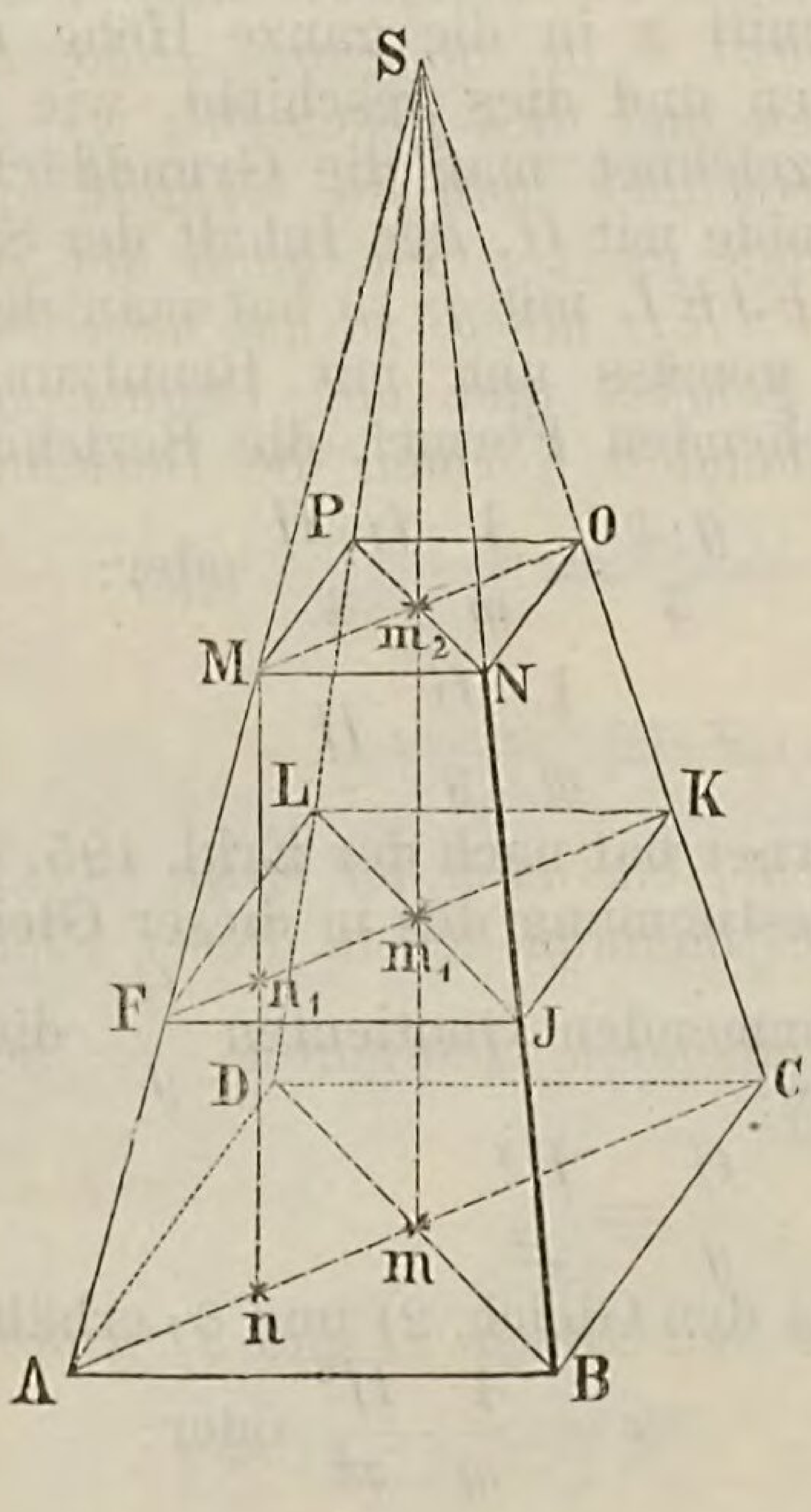
$$Sm : mM = 1 : \left(\sqrt[3]{27} - 1\right) \text{ oder:}$$

$$Sm : mM = 1 : (3 - 1) = 1 : 2$$

---

**Aufgabe 225.** Die Seite der quadratischen Basis eines geraden Pyramidenstumpfs sei $= a$, die Seite der Deckfläche $= b$ und die Höhe des Stumpfs $= H$. In welcher Entfernung von der Grundfläche muss eine zu letzterer parallele Ebene gelegt werden, wenn dieselbe den Stumpf in 2 gleiche Teile zerlegen soll?

Figur 44.




**Formel:**

$$V = \frac{H}{3} (G + \sqrt{Gg} + g)$$

(s. Erkl. 31, S. 13).

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 44, $FJKL$ die gedachte Ebene, welche den Pyramidenstumpf in 2 (an Volumen) gleiche Teile zerlegt, und bezeichnet man die gesuchte Entfernung $mm_1$ mit $x$, die noch unbekannte Seite der quadratischen Schnittfigur $FJKL$ mit $y$, den Teil $m_1 m_2$ der Höhe $mm_2$ mit: $(H - x)$ und beachtet man, dass die Inhalte der Flächen $ABCD$, $MNOP$ und $FJKL$, bezw. $= a^2$, $b^2$ und $y^2$ sind, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formel, die Gleichung:

$$\frac{x}{3}(a^2 + ay + y^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

oder:

$$1)\ x(a^2 + ay + y^2) = \frac{1}{2} \cdot H(a^2 + ab + b^2)$$

Denkt man sich ferner den Perpendikel $Mn$ gefällt und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 194:

$$a) \ldots Mm_2 = \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

$$b) \ldots Fm_1 = \frac{y}{2}\sqrt{2}$$

**Erkl. 202.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Werden die Schenkel eines Winkels von mehreren parallelen Geraden durchschnitten, so sind die Schenkelabschnitte proportional den zwischen den Schenkeln liegenden parallelen Stücke.

In Fig. 44 ist z. B. diesem Satze entsprechend:

$$Mn : Mn_1 = An : Fn_1$$

**Erkl. 203.** Würde man $x$ bestimmen wollen, indem man den Wert für $y$ aus Gleich. 2) in Gleich. 1), substituiert, so würde man auf eine **kubische** Gleichung stossen.

**Erkl. 204.** Nebenstehende Gleich. 2):

$$\frac{H}{H-x} = \frac{a-b}{y-b}$$

nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$Hy - Hb = Ha - Hb - ax + bx$$
$$ax - bx = Ha - Hy$$
$$(a-b)x = H(a-y) \text{ oder:}$$

a) . . . $x = H \cdot \frac{a-y}{a-b}$

**Erkl. 205.** Nebenstehende Gleichung:

3) $\frac{a-y}{a-b}(a^2 + ay + y^2) = \frac{1}{2}(a^2 + ab + b^2)$

nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$(a-y)(a^2+ay+y^2) = \frac{1}{2}(a-b)(a^2+ab+b^2)\ ^{*)}$$

$$a^3 - a^2y + a^2y - ay^2 + ay^2 - y^3 = \frac{1}{2}(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 - y^3 = \frac{1}{2}(a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3)$$

$$a^3 - y^3 = \frac{1}{2}(a^3 - b^3)$$

$$-y^3 = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}b^3 - a^3$$

$$y^3 = -\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}b^3 + a^3 = \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}b^3$$

$y^3 = \frac{1}{2}(a^3 + b^3)$ mithin ist:

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(a^3 + b^3)} = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$$

*) Ein geübter Mathematiker wird sofort erkennen, dass z. B. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ ist, denn aus der Division:

$\frac{a^3 - b^3}{a - b}$ erhält man zum Quotienten:

$a^2 + ab + b^2$, mithin muss auch:

$(a^2 + ab + b^2)(a-b) = a^3 - b^3$ sein.

c) . . $Am = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, dass ferner:

d) . . $Fn_1 = Fm_1 - nm_1 = Fm_1 - Mm_2$
$= \frac{y}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2}$ und

f) . . $An = Am - nm = Am - Mm_2$
$= \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2}$ und dass schliesslich:

g) . . $Mn_1 = m_2m_1 = H - x$ und

h) . . $n_1n = m_1m = x$ ist, so hat man nach der in der Erkl. 202 aufgestellten Proportion $\frac{Mn}{Mn_1} = \frac{An}{Fn_1}$ die Gleichung:

$$\frac{H}{H-x} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2}}{\frac{y}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2}} \text{ oder:}$$

2) . . . $\frac{H}{H-x} = \frac{a-b}{y-b}$

Aus den Gleich. 1) und 2) findet man nunmehr $x$ wie folgt (s. Erkl. 203):

Bestimmt man den Wert für $x$ aus Gleich. 2), siehe Erkl. 204, und setzt diesen so bestimmten Wert in Gleich. 1), so resultiert die Gleichung:

$$H \cdot \frac{a-y}{a-b}(a^2+ay+y^2) = \frac{1}{2}H(a^2+ab+b^2)$$

oder:

3) $\frac{a-y}{a-b}(a^2+ay+y^2) = \frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)$

Diese Gleichung nach $y$ aufgelöst, gibt nach der Erkl. 205:

4) . . . $y = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$

Substituiert man diesen Wert für $y$ in die in der Erkl. 204 entwickelte Gleichung a):

$$x = H \cdot \frac{a-y}{a-b}$$

so erhält man:

$$x = H \cdot \frac{a - \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}}{a-b} \text{ oder:}$$

$$x = \frac{H}{a-b}\left(a - \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\right)$$

**Aufgabe 226.** Von einer abgestumpften Pyramide, deren Höhe $H = 20$ dm misst, kennt man die Grundfläche $G = 36$ qdm und die Deckfläche $g = 16$ qdm. In welchem Abstand von der Deckfläche $g$ muss dieser Pyramidenstumpf von einer zu der Deckfläche parallelen Ebene durchschnitten werden, damit der Inhalt der entstehenden Schnittfigur gleich dem arithmetischen Mittel aus der Grund- und Deckfläche des Stumpfes wird.

**Erkl. 206.** Unter dem **arithmetischen Mittel** $y$ zweier Zahlen $G$ und $g$ versteht man das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion, in Zeichen:

$$G - y = y - g$$

und hieraus erhält man für das arithmetische Mittel $y$:

$$y = \frac{G+g}{2}$$

Man siehe das Kapitel: Die Proportionen.

**Erkl. 207.** Nebenstehende Proportion:

$$2) \ldots G : g = (H+z)^2 : z^2$$

kann man folgendermassen auf einfachere Form bringen:

$$\sqrt{G : g} = \sqrt{(H+z)^2 : z^2}$$

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} = \frac{H+z}{z}$$

Mit Benutzung des in der Erkl. 209 ausgesprochenen Differenzensatzes erhält man hieraus:

$$\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{H+z-z} = \frac{\sqrt{g}}{z} \text{ oder:}$$

$$\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{H} = \frac{\sqrt{g}}{z}$$

**Erkl. 208.** Nebenstehende Proportion:

$$3) \ldots y : g = (x+z)^2 : z^2$$

kann man folgendermassen auf einfachere Form bringen:

$$\sqrt{y : g} = \sqrt{(x+z)^2 : z^2}$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{g}} = \frac{x+z}{z}$$

Mit Benutzung des in der Erkl. 209 ausgesprochenen Differenzensatzes erhält man hieraus:

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{g}}{x+z-z} = \frac{\sqrt{g}}{z} \text{ oder:}$$

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{g}}{x} = \frac{\sqrt{g}}{z}$$

**Erkl. 209.** Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zur entsprechenden Summe oder Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses wie ein Paar homologe Glieder.“

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 44, $FJKL$ die gedachte Ebene, welche den Pyramidenstumpf so schneidet, dass die entstandene Schnittfigur gleich dem arithmetischen Mittel aus der Grund- und Deckfläche des Stumpfs ist, und bezeichnet man die gesuchte Entfernung $m_1 m_2$ mit $x$, den noch unbekannten Inhalt der Schnittfigur $FJKL$ mit $y$ und die unbekannte Höhe $Sm_2$ der Ergänzungspyramide mit $z$, so hat man gemäss der Aufgabe und nach der Erklärung 206:

$$1) \ldots y = \frac{G+g}{2}$$

Ferner hat man nach der Erkl. 195, Seite 109, die weiteren Relationen:

$$2) \ldots G : g = (H+z)^2 : z^2$$

$$3) \ldots y : g = (x+z)^2 : z^2$$

aus welchen sich nach den Erkl. 207 und 208 die einfacheren Gleichungen ergeben:

$$4) \ldots \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{H} = \frac{\sqrt{g}}{z}$$

$$5) \ldots \frac{\sqrt{y} - \sqrt{g}}{x} = \frac{\sqrt{g}}{z}$$

Substituiert man in Gleich. 5) für $y$ den sich aus Gleich. 1) ergebenden Wert und berücksichtigt man, dass die rechten Seiten der Gleichungen 4) und 5) gleich sind, so resultiert hiernach:

$$\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{H} = \frac{\sqrt{\frac{G+g}{2}} - \sqrt{g}}{x}$$

und hieraus ergibt sich für die gesuchte Entfernung $x$:

$$x = H \cdot \frac{\sqrt{\frac{G+g}{2}} - \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $H$, $G$ und $g$ gegebenen Zahlenwerte erhält man:

$$x = 20 \cdot \frac{\sqrt{\frac{36+16}{2}} - \sqrt{16}}{\sqrt{36} - \sqrt{16}} \quad \text{oder:}$$

$$x = 20 \cdot \frac{\sqrt{26} - 4}{6 - 4} = 20 \cdot \frac{5{,}099 - 4}{2}$$

$$x = 10 \cdot 1{,}099 \text{ mithin:}$$

$$x = 10{,}99 \text{ oder abgerundet} = 11 \text{ qdm}$$

---

**Aufgabe 227.** In welchem Verhältnis wird ein Pyramidenstumpf, dessen Endflächen reguläre Polygone mit den Seiten $a = 2$ m und $b = 1$ m sind, durch eine Ebene geteilt, die parallel der Grundfläche ist und die Höhe des Stumpfs in zwei gleiche Teile zerlegt?

**Erkl. 210.** Die in Figur 44 durch **die Mitte** $m_1$ der Höhe $mm_2$ gelegte Ebene $FJKL$ geht auch durch **die Mitten** der Seitenkanten des geraden Pyramidenstumpfs, was sich mittelst Proportionalität leicht beweisen lässt.

Jede Seite der mittleren Durchschnittsfigur wird somit die Mittellinie eines Paralleltrapezes sein, dessen parallele Seiten die Seiten $a$ und $b$ der Grund- und Deckfläche des Pyramidenstumpfs sind. Nach der Erkl. 211 hat man somit für eine Seite $y$ der mittleren Durchschnittsfigur:

$$y = \frac{a+b}{2}$$

**Erkl. 211.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Verbindungslinien der Mitten der 2 nicht parallelen Seiten eines Paralleltrapezes, d. i. die sogenannte **Mittellinie** $m$ desselben, ist parallel den parallelen Seiten $a$ und $b$ und gleich der halben Summe dieser letzteren Seiten $a$ und $b$, in Zeichen:

$$m = \frac{a+b}{2}$$

**Erkl. 212.** Sind die nebenstehenden Proportionen:

$$\text{a)} \ldots \frac{G}{g} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{b)} \ldots \frac{x}{g} = \frac{(a+b)^2}{4b^2}$$

gegeben, so kann man aus denselben unter anderen, die laufenden Proportionen:

$$\text{c)} \ldots \frac{G}{a^2} = \frac{\sqrt{Gx}}{\frac{a(a+b)}{2}} = \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}} \quad \text{und:}$$

$$\text{d)} \ldots \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{gx}}{\frac{b(a+b)}{2}} = \frac{g}{b^2}$$

herleiten, denn nimmt man an, $G$ entspräche der Verhältnisgrösse $a^2$, so entspricht $g$, nach Proportion a), die Verhältnisgrösse $b^2$; entspricht

**Formel:**

$$V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

(s. Erkl. 31, S. 13).

**Auflösung.** Ist, s. Fig. 44, $FJKL$ die durch die Mitte $m_1$ der Höhe $mm_2$ gelegte Ebene, und bezeichnet man den Inhalt der durch diese Ebene entstandenen Durchschnittsfigur mit $x$, das Volumen des unteren Körperabschnitts mit $V$, das des oberen mit $V_1$ und die Hälfte der Höhe $mm_2$ mit $\frac{H}{2}$, so hat man mit Benutzung der vorsteh. Formel für das gesuchte Verhältnis der beiden Körperabschnitte, die Relation:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\frac{H}{2 \cdot 3}(G + \sqrt{Gx} + x)}{\frac{H}{2 \cdot 3}(x + \sqrt{xg} + g} \quad \text{oder:}$$

$$1) \ldots \frac{V}{V_1} = \frac{G + \sqrt{Gx} + x}{x + \sqrt{xg} + g}$$

Um nun die in dem Quotienten rechts vorkommenden Grössen $G$, $g$ und $x$ in die gegeb. Seiten $a$ und $b$ ausdrücken zu können, verfahre man folgendermassen.

Nach der Erkl. 195, S. 109, ist:

$$G : g = a^2 : b^2$$

$$x : g = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 : b^2 \quad \text{(s. Erkl. 210)}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \frac{G}{g} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{b)} \ldots \frac{x}{g} = \frac{(a+b)^2}{4b^2}$$

Aus diesen beiden Proportionen kann man, wie in der Erkl. 212 gezeigt ist, die zwei laufenden Proportionen:

aber $g$ die Verhältnisgrösse $b^2$, so entspricht $x$ die Verhältnisgrösse $\frac{(a+b)^2}{4}$, u. s. f. Man hat somit:

1) $G$ entspricht $a^2$ } siehe Proportion a)
2) $g$ „ $b^2$ }
3) $x$ „ $\frac{(a+b)^2}{4}$ ergibt sich aus Proportion b), wenn für $g$ seine Verhältnisgrösse $b^2$ gesetzt wird
4) $\sqrt{G}$ „ $\sqrt{a^2}$ oder $a$, ergibt sich aus 1)
5) $\sqrt{g}$ „ $\sqrt{b^2}$ „ $b$, „ „ „ 2)
6) $\sqrt{x}$ „ $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}$ oder: $\frac{a+b}{2}$, ergibt sich aus 3)
7) $\sqrt{Gx} = a \cdot \frac{a+b}{2}$ ergibt sich aus 4) und 6)
8) $\sqrt{gx} = b \cdot \frac{a+b}{2}$ „ „ „ 5) und 6).

Aus den unter 1) und 8) aufgestellten Relationen kann man, da alle Stücke auf ein und dieselbe Verhältnisgrösse ($a^2$) zurückgeführt sind, unter anderem die laufenden Proportionen bilden:

$$\frac{G}{a^2} = \frac{\sqrt{Gx}}{\frac{a(a+b)}{2}} = \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}} \text{ und}$$

$$\frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{gx}}{\frac{b(a+b)}{2}} = \frac{g}{b^2}$$

Ueber das Laufendmachen von Proportionen siehe man Dr. Kleyers Lehrbuch der Proportionen.

**Erkl. 213.** Ein Satz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder laufenden Proportion verhält sich die Summe der ersten Glieder der Verhältnisse zur Summe der zweiten Glieder der Verhältnisse, wie die entsprechenden Glieder eines Verhältnisses der Proportion.“

$$\text{c)} \ldots \frac{G}{a^2} = \frac{\sqrt{Gx}}{\frac{a(a+b)}{2}} = \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$\text{d)} \ldots \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{gx}}{\frac{b(a+b)}{2}} = \frac{g}{b^2}$$

herleiten. Mit Benutzung des in der Erkl. 213 angeführten Summensatzes erhält man aus diesen laufenden Proportionen die Gleichungen:

$$2) \frac{G+\sqrt{Gx}+x}{a^2+\frac{a(a+b)}{2}+\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$3) \frac{x+\sqrt{gx}+g}{\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{b(a+b)}{2}+b^2} = \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}}$$

Aus den Gleichungen 2) und 3) ergibt sich:

$$\frac{G+\sqrt{Gx}+x}{a^2+\frac{a(a+b)}{2}+\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{x+\sqrt{gx}+g}{\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{b(a+b)}{2}+b^2}$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{G+\sqrt{Gx}+x}{x+\sqrt{gx}+g} = \frac{a^2+\frac{a(a+b)}{2}+\frac{(a+b)^2}{4}}{\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{b(a+b)}{2}+b^2}$$

$$= \frac{4a^2+2a(a+b)+(a+b)^2}{(a+b)^2+2b(a+b)+4b^2}$$

$$= \frac{4a^2+2a^2+2ab+a^2+2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2+2ab+2b^2+4b^2}$$

oder:

$$4) \ldots \frac{G+\sqrt{Gx}+x}{x+\sqrt{gx}+g} = \frac{7a^2+4ab^2+b^2}{a^2+4ab+7b^2}$$

Aus den Gleichungen 1) und 4) erhält man hiernach für das gesuchte Verhältnis:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{7a^2+4ab+b^2}{a^2+4ab+7b^2}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für die gegebenen Zahlenwerte ergibt sich somit:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{7 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2}{2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1^2}$$

$$= \frac{28 + 8 + 1}{4 + 8 + 7} = \frac{37}{19}$$

(**ungefähr** wie 2 : 1).

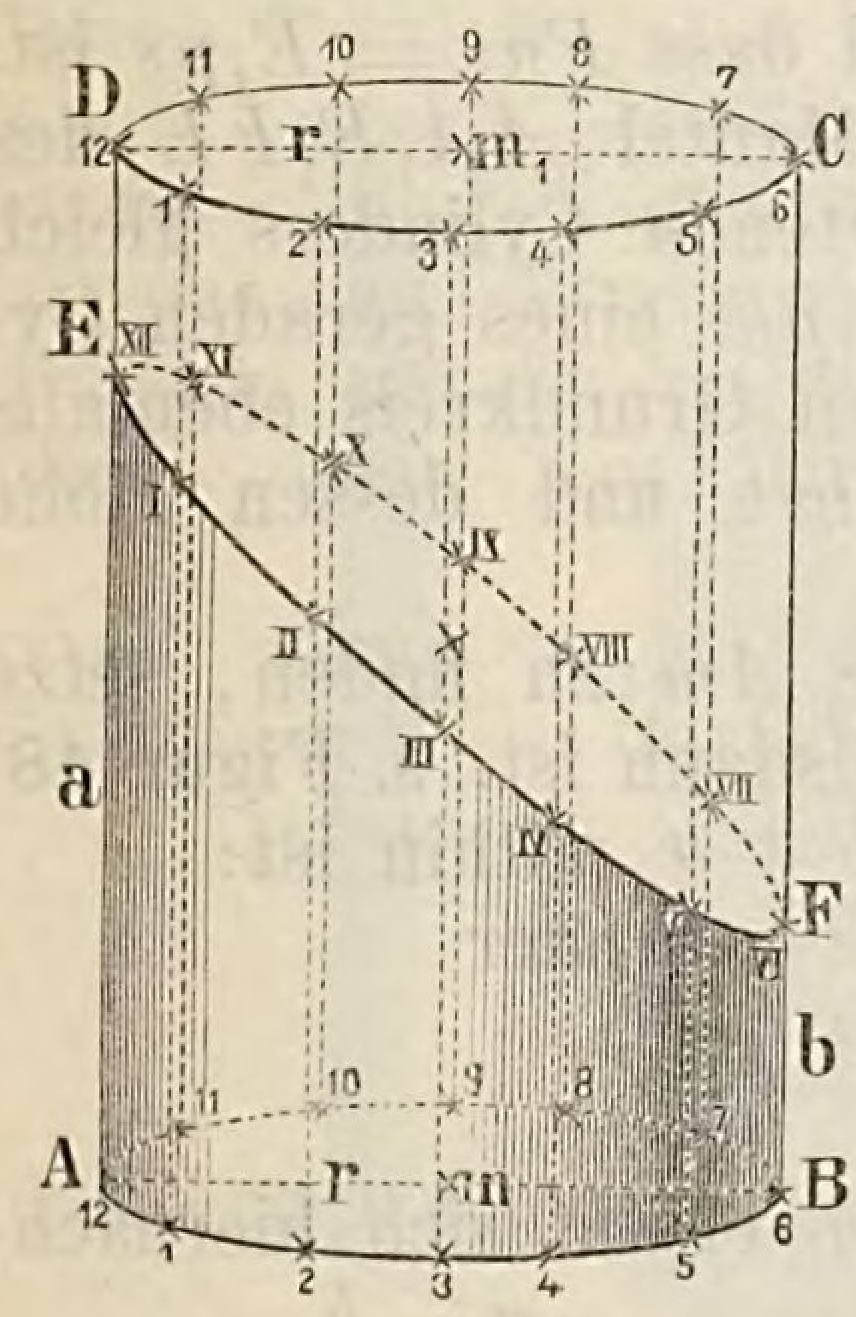
---

**Aufgabe 228.** Ein senkrechter Cylinder, dessen Radius $= r$ gegeben ist, wird durch eine gegen seine Achse geneigte Ebene so geschnitten, dass die längste Seitenlinie des schief abgeschnittenen Cylinders $= a$, die kürzeste Seitenlinie $= b$ ist. Man soll den Mantel des schief abgeschnittenen Cylinders in einer Ebene entrollen und diesen Mantel, sowie das Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders berechnen.

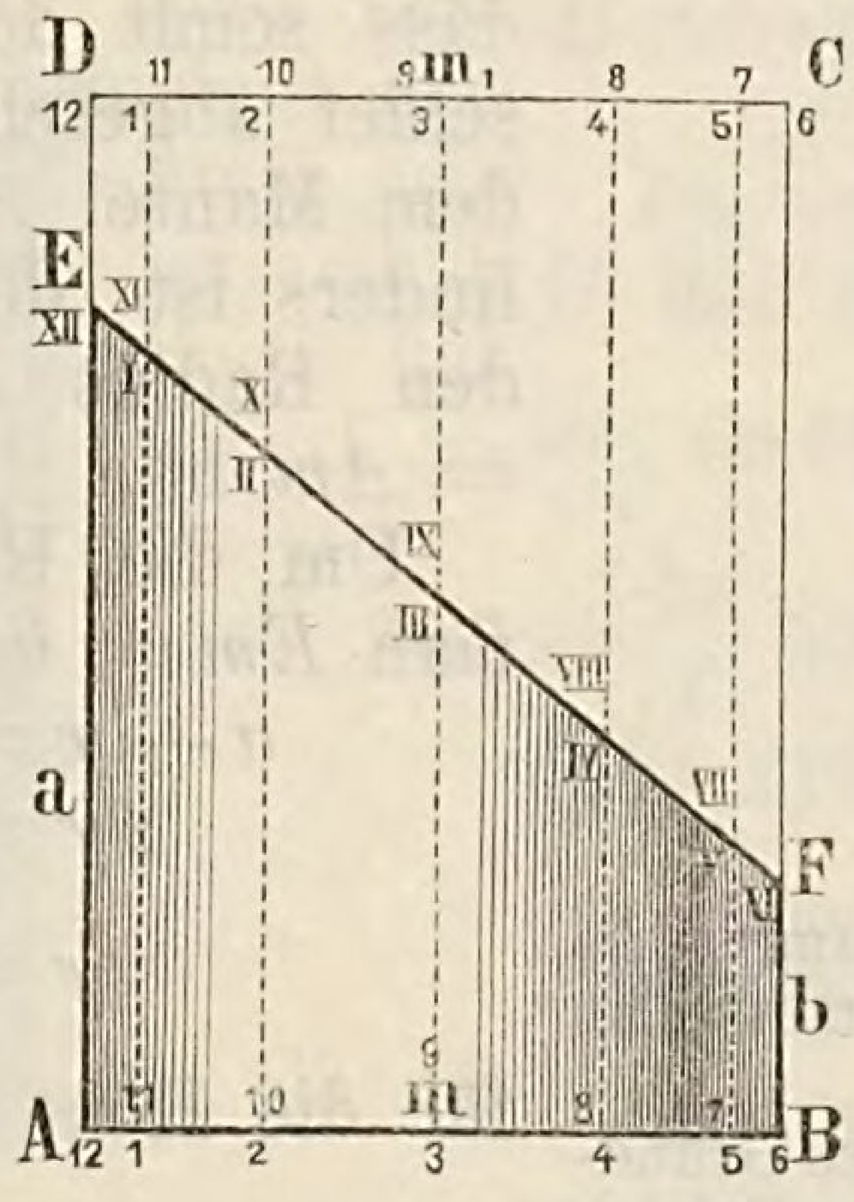
**Formeln:**

I. $M = 2 R\pi \cdot H$ (s. Erkl. 47, S. 20)
II. $V = R^2 \pi \cdot H$ (s. Erkl. 33, S. 14).

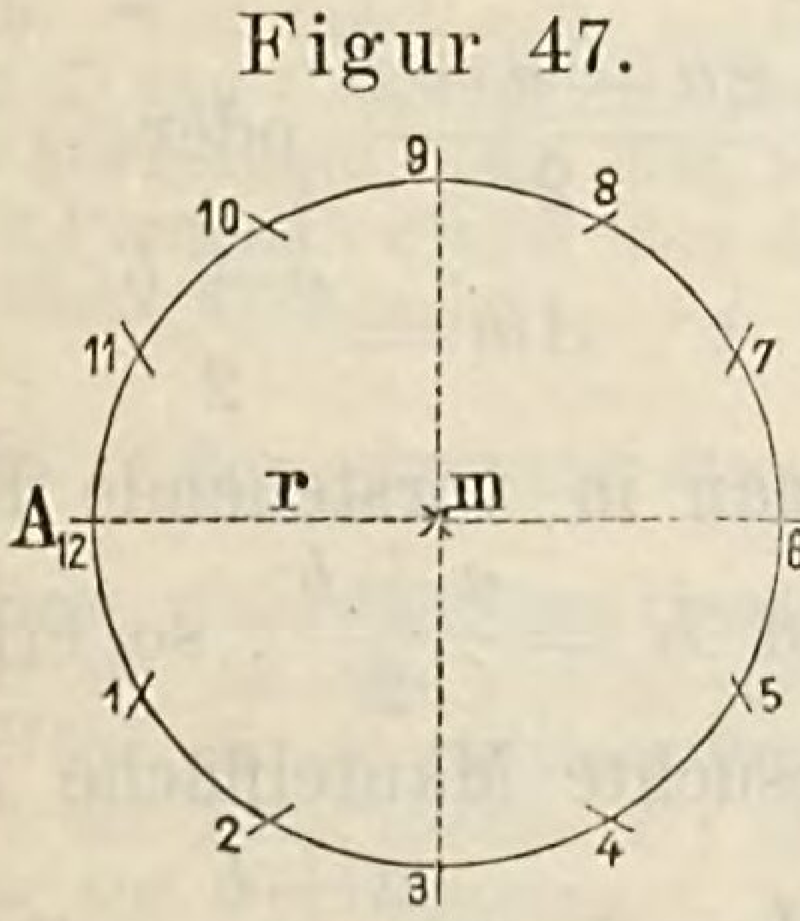
Figur 45.




Figur 46.




Figur 47.



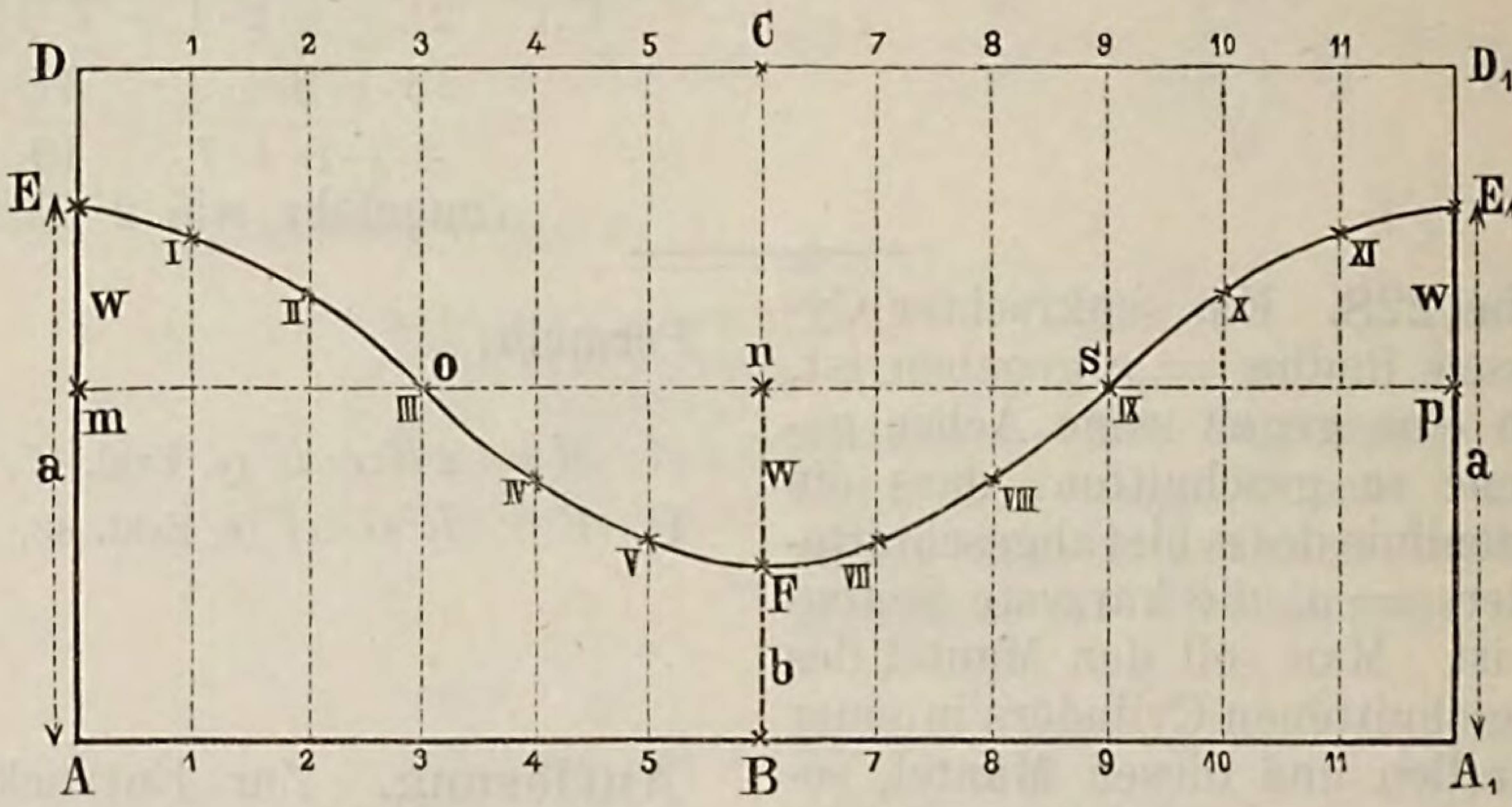

**Auflösung.** Zur Entwicklung der Mantelfläche des schief abgeschnittenen Cylinders verfahre man folgendermassen: Stellt Figur 45 die parallelperspektivische Projektion des gegeb. Cylinders, Figur 46 die rechtwinklige Projektion desselben und Figur 47 die wahre Grösse seines Grundkreises dar, und man nimmt in diesen 3 Figuren verschiedene Lagen der Erzeugenden der Cylindermantelfläche, welche z. B. durch die Punkte 1, 2, 3, 4, ·· der Grundkreise gehen, an, so ist aus diesen 3 Figuren ersichtlich, dass wenn man die ganze Cylindermantelfläche in einer Ebene entrollt, siehe Figur 48, die Lagen der Erzeugenden, welche durch die Punkte 1, 2, 3, ·· gehen in der Figur 48, mittelst der Figur 47 bestimmt werden können, dass ferner die **wahren Längen** der Stücke $AE$, 1 I, 2 II ··· (s. Fig. 48) der Erzeugenden, welche durch die schiefe Ebene $EF$ abgeschnitten werden, der Figur 46 entnommen und in die Fig. 48 eingetragen werden können.

Dementsprechend erhält man in Fig. 48, den in einer Ebene entrollten Mantel des durch die Fig. 45 und 46 dargestellten, schief abgeschnittenen Cylinders.

---

Zur Berechnung des Mantels des schief abgeschnittenen Cylinders $ABFE$, siehe Figur 45, benutzt man die Netz-Entwicklung in Figur 48. Zieht man nämlich

Figur 48.




die Linie $mp$ parallel zu $AA_1$ so, dass $Em = Fn = E_1p$ wird, so ersieht man aus der Figur 48, dass das Flächenstück $Fno = Emo$ und dass $Fns = E_1ps$ ist, dass somit der Mantel $AA_1E_1FE$ des schief abgeschnittenen Cylinders gleich dem Mantel $AA_1pm$ eines geraden Cylinders ist, dessen Grundkreis ebenfalls den Radius $r$ hat und dessen Höhe $= Am$ ist.

Um die Höhe $Am$ zu finden, setze man $Em = w$, alsdann ist, s. Figur 48:

$$a - w = b + w \text{ mithin ist:}$$
$$2w = a - b \text{ oder}$$
$$w = \frac{a-b}{2}$$

für die Höhe $Am$ ergibt sich hiernach:

$$Am = a - w = a - \frac{a-b}{2}$$
$$= \frac{2a - a + b}{2} \text{ oder:}$$
$$\text{a) } \ldots Am = \frac{a+b}{2}$$

Setzt man in vorstehende Formel I. $R = r$ und $H = \frac{a+b}{2}$, so erhält man für die gesuchte Mantelfläche $M$:

$$\text{A) } \ldots M = 2r\pi \cdot \frac{a+b}{2} \quad \text{(s. Erkl. 214)}$$

---

Aus vorstehender Betrachtung ergibt sich ferner, dass das Volumen $V$ des schief abgeschnittenen Cylinders gleich dem Volumen eines geraden Cylinders ist, dessen Mantel $= AA_1pm$ ist.

**Erkl. 214.** Nebenstehende Gleichungen A) und B) kann man sich als weitere stereometrische Formeln besonders merken.

Bezeichnet hiernach $r$ den Radius des Grundkreises, $a$ die längste und $b$ die kürzeste Seitenlinie eines schief abgeschnittenen Cylinders, so hat man zur Berechnung des Mantels $M$ desselben, die Formel:

$$1) \ldots M = 2r\pi \cdot \frac{a+b}{2}$$

und zur Berechnung des Volumens $V$ desselben die Formel:

$$2) \ldots V = r^2\pi \cdot \frac{a+b}{2}$$

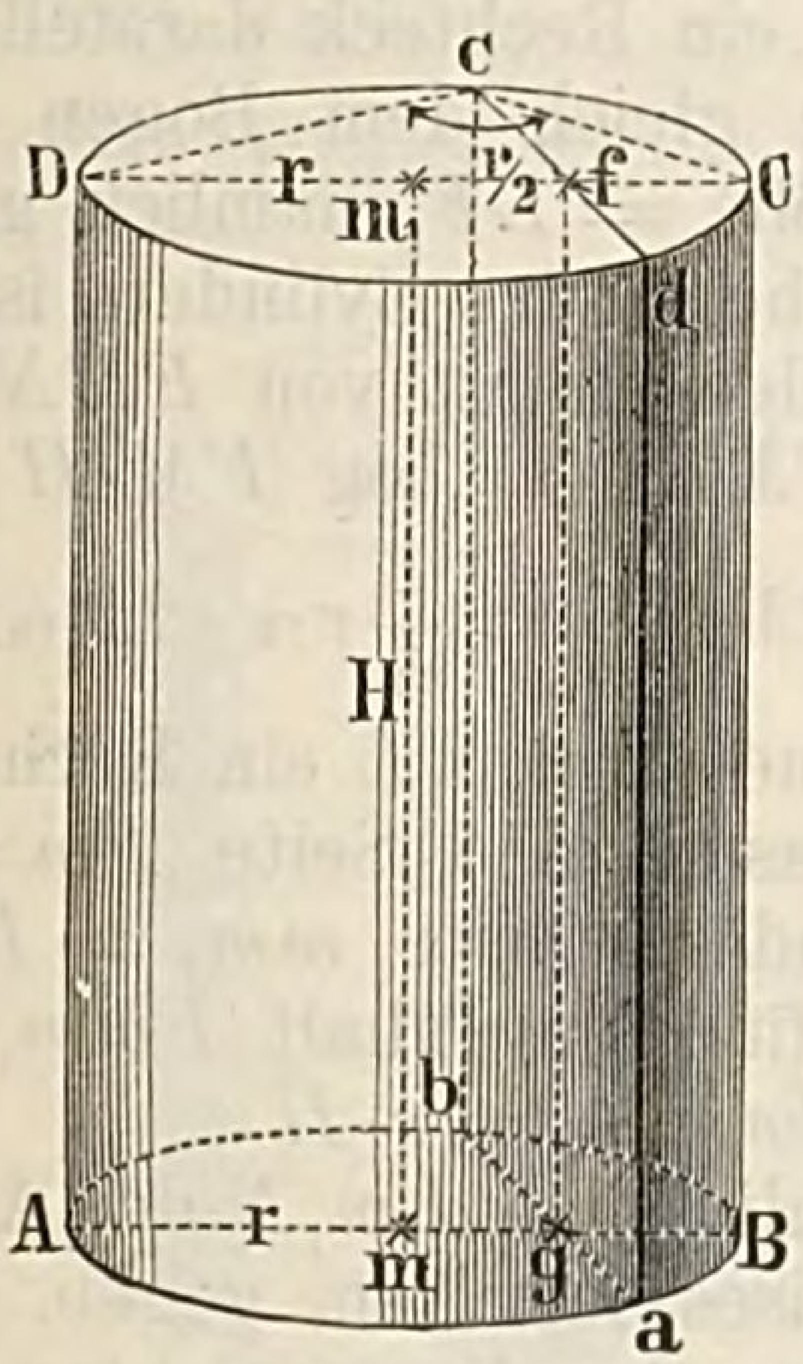
Setzt man daher in vorstehende Formel II. $R = r$ und $H = Am = \frac{a+b}{2}$ siehe Gleichung a), so erhält man für das gesuchte Volumen $V$:

B) . . $V = r^2 \pi \cdot \frac{a+b}{2}$ (s. Erkl. 214).

---

**Aufgabe 229.** Von einem geraden Cylinder kennt man den Radius $r = 8$ cm des Grundkreises u. die Höhe $H = 50$ cm. Durch den Cylinder wird eine den Grundflächen desselben senkrechte Ebene so gelegt, dass sie den Radius des Grundkreises halbiert; welches ist der Inhalt der entstehenden Schnittfigur?

Figur 49.




**Erkl. 215.** Verbindet man in Fig. 49 den Punkt $c$ mit $D$ und $C$, so ist das Dreieck $DcC$ ein bei $c$ rechtwinkliges, nach dem Satze:

„Jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises ist $= 1\,R$ (90°)".

**Erkl. 216.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

In jedem rechtwinkligen Dreieck, $DcC$ in Figur 49, ist die zur Hypotenuse gehörige Höhe $fc$ die mittlere Proportionale zwischen den Projektionen $Df$ und $fC$ der Katheten auf die Hypotenuse, in Zeichen:

$$Df : fc = fc : fC$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 49, $abcd$ die zu den Grundflächen des Cylinders senkrecht stehende Ebene, welche den Radius $r = m_1C$ $(mB)$ in $f$ $(g)$ halbiert, so hat man zur Berechnung des gesuchten Inhalts $x$ der Schnittfigur $abcd$, da dieselbe ein Rechteck ist, die Relation:

1) . . . $x = ab \cdot ad$

Da nun $ad$ gleich der gegeb. Höhe $H$ des Cylinders und $ab = dc = 2fc$ ist; da ferner $Df = Dm + mf = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$ und $fc = \frac{r}{2}$ ist und nach den Erkl. 215 und 216, die Relation:

$$Df : fc = fc : fC$$

bezw. die Relation:

2) . . . $\frac{3}{2} r : fc = fc = \frac{r}{2}$

besteht, und man aus letzterer:

$$\overline{fc}^2 = \frac{3}{4} r^2 \text{ oder:}$$

3) . . . $fc = \frac{r}{2} \sqrt{3}$

erhält, so geht die Gleichung 1) über in:

$$x = 2 \cdot \frac{r}{2} \sqrt{3} \cdot H$$

und hieraus ergibt sich für den gesuchten Inhalt $x$:

$$x = r \cdot H \cdot \sqrt{3}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

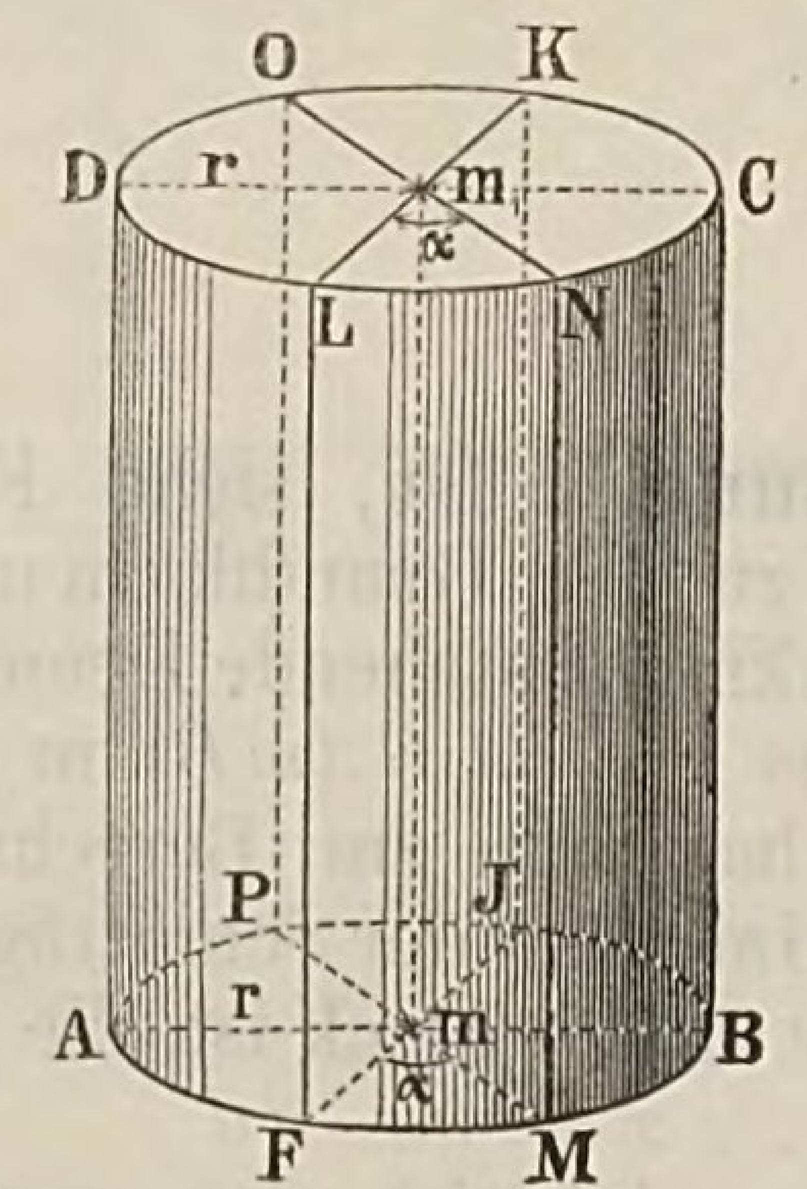
In Rücksicht der für $r$ und $H$ gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

$x = 8 \cdot 50 \cdot \sqrt{3}$ oder:
$x = 8 \cdot 50 \cdot 1{,}732$
$x = 400 \cdot 1{,}732$ mithin:
$x = 692{,}8$ qcm

---

**Aufgabe 230.** Wie gross ist die Gesamtoberfläche eines Cylinderausschnitts, welcher durch zwei sich in der Cylinderaxe unter einem Winkel von $36^0$ schneidenden Ebenen entsteht, wenn der Radius des Cylinders $r = 3$ dm und die Höhe $H$ desselben $= 7$ dm gegeben sind?

Figur 50.




**Erkl. 217.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Länge eines Kreisbogens (bog) verhält sich zum Umfange ($2r\pi$) des zugehörigen Kreises, wie der zu jenem Bogen gehörige Centriwinkel ($\alpha^0$) zu dem zu dem ganzen Umfang gehörigen Centriwinkel ($360^0$), in Zeichen:

$$\text{bog} : 2r\pi = \alpha^0 : 360^0\text{“}$$

Nach diesem Lehrsatz erhält man für die Länge des Bogens $FM$, wenn man berücksichtigt, dass $\alpha = 36^0$ ist:

$$\text{bog } FM : 2r\pi = 36^0 : 360^0$$

$$\text{bog } FM = 2r\pi \cdot \frac{36^0}{360^0} \text{ oder:}$$

$$\text{bog } FM = 2r\pi \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5} r\pi$$

**Erkl. 218.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Inhalt $J$ eines Sektors verhält sich zum Inhalt ($r^2\pi$) des zugehörigen Kreises, wie der zu dem Sektor zugehörige Centriwinkel $\alpha$ zu dem zu dem ganzen Kreise zugehörigen Centriwinkel $360^0$, in Zeichen:

$$\text{J. d. Sekt.} : r^2\pi = \alpha^0 : 360^0\text{“}$$

Nach diesem Lehrsatz erhält man für den Inhalt des Sektors $Lm_1N$, wenn man berücksichtigt, dass $\alpha = 36^0$ ist:

$$\text{Sekt. } Lm_1N : r^2\pi = 36^0 : 360^0$$

$$\text{Sekt. } Lm_1N = r^2\pi \cdot \frac{36^0}{360^0} \text{ oder:}$$

$$\text{Sekt. } Lm_1N = r^2\pi \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} r^2\pi$$

**Auflösung.** Sind, siehe Fig. 50, $FJKL$ und $MNOP$ die sich unter dem Winkel $\alpha = 36^0$ in der Cylinderaxe $mm_1$ schneidenden Ebenen, so ist $FMNLm_1m$ (oder $PJKOm_1m$) der Cylinderausschnitt, dessen Oberfläche $x$ berechnet werden soll.

Die gesuchte Oberfläche besteht aus dem Stücke $FMNL$ des Cylindermantels, den kongruenten Rechtecken $Fmm_1L$ und $Mmm_1N$ und den kongruenten Sektoren $FmM$ und $Lm_1N$; man hat somit die Gleichung:

1) $x = FMNL + 2 \cdot (Fmm_1L + Lm_1N)$

Da nun $FMNL$, in einer Ebene ausgebreitet, ein Rechteck darstellt, dessen eine Seite gleich dem Bogen $FM$ und dessen Höhe $= LF$, nämlich gleich der gegeb. Höhe $H$ des Cylinders ist, so hat man für den Inhalt von $FMNL$:

$$FMNL = \text{bog } FM \cdot H \text{ oder:}$$

a) . . . $FMNL = \frac{1}{5} r\pi \cdot H$ (s. Erkl. 217)

Da ferner $Fmm_1L$ ein Rechteck darstellt, dessen eine Seite $Fm = r$ und dessen andere Seite $mm_1 = H$ ist, so hat man für den Inhalt $Fmm_1L$:

b) . . . $Fmm_1L = r \cdot H$

und da schliesslich $Lm_1N$ der Ausschnitt eines Kreises mit dem gegeb. Radius $r$ ist und man den diesem Sektor zugehörigen Centriwinkel kennt, so hat man nach der Erkl. 218 für den Inhalt des Sektors $Lm_1N$:

c) . . . Sekt. $Lm_1N = \frac{1}{10} r^2\pi$

Aus den Gleichungen 1), a), b), und c) erhält man für die gesuchte Gesamtoberfläche des gedachten Cylinderausschnitts:

$$x = \frac{1}{5} r\pi \cdot H + 2\left(rH + \frac{1}{10} r^2\pi\right) \text{ oder}$$

$$x = \frac{1}{5} r\pi H + 2rH + \frac{1}{5} r^2\pi \text{ mithin:}$$

$$x = \frac{1}{5} r\pi (H + r) + 2rH$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $H$ und $r$ gegeb. Zahlenwerte erhält man hiernach:

$$x = \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot 3{,}141(7 + 3) + 2 \cdot 3 \cdot 7 \text{ oder:}$$

$$x = \frac{1}{5} \cdot 9{,}423 \cdot 10 + 42 = \frac{94{,}23}{5} + 42$$

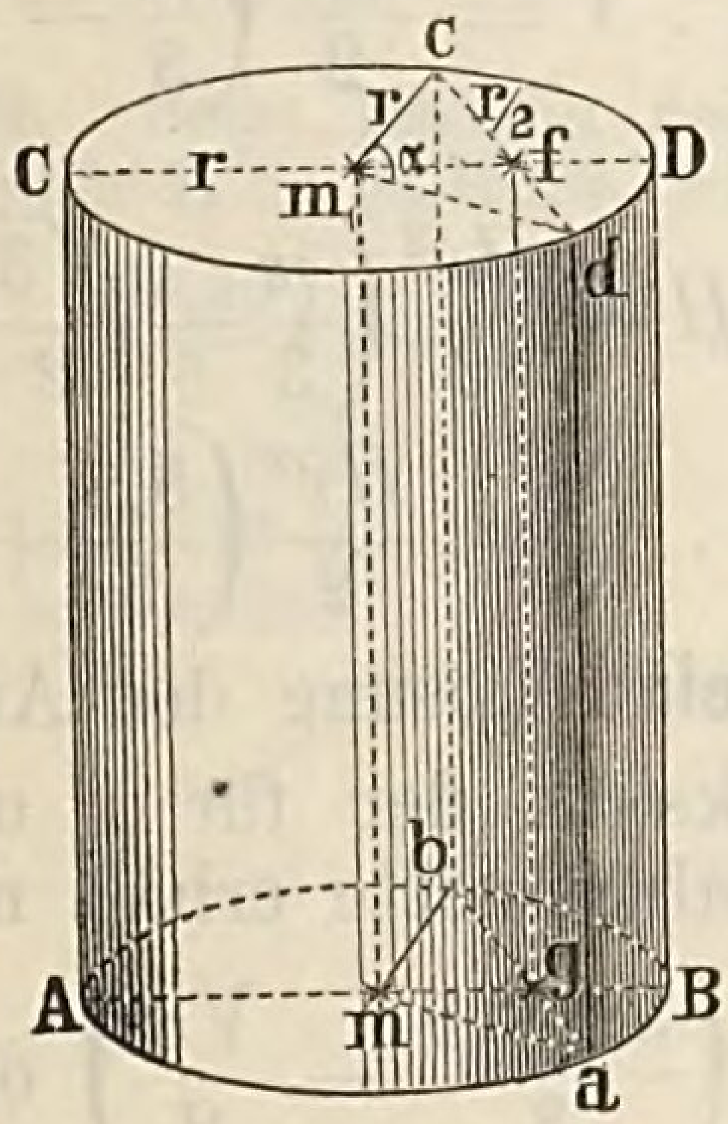
$$x = 18{,}846 + 42 = 60{,}846 \text{ qdm}$$

---

**Aufgabe 231.** Durch einen geraden Cylinder, dessen Radius $r = 2$ m und dessen Höhe $H = 5$ m gegeben ist, wird eine Ebene parallel zur Axe des Cylinders so gelegt, dass sie die Grundflächen in solchen geraden Linien schneidet, die gleich dem Radius dieser Grundflächen sind.

Wie gross ist der Kubikinhalt der Teile, in welche der Cylinder durch jene Ebene gelegt wird?

Figur 51.




**Erkl. 219.** Denkt man sich in Fig. 51, z. B. die krumme Linie $dDc$ (und $aBb$) aus lauter unendlich kleinen g e r a d e n Linienteilchen bestehend, so kann man den Körperteil $abcdDB$ als ein gerades Prisma betrachten und dessen Volumen mittelst der Formel:

$$V = G \cdot H \text{ (s. Erkl. 1, S. 1)}$$

berechnen.

**Formeln:**

Für ein Prisma:

I. $V = G \cdot H$ (s. Erkl. 219)

Für einen Cylinder:

II. $V = R^2 \pi \cdot H$ (s. Erkl. 33, S. 14).

**Auflösung.** Jeder der beiden Teile, in welche der Cylinder durch die Ebene $abcd$, siehe Figur 51, zerlegt wird, kann man als ein Prisma betrachten, mithin kann man die Volumina dieser Teile nach vorstehender Formel (s. Erkl. 219) berechnen. Bezeichnet man das gesuchte Volumen des einen Körperteils $abcdDB$ mit $V$, die unbekannte Grundfläche $dDc$ ($= aBb$) mit $x$ und beachtet man, dass die Höhe $ad$ desselben gleich der gegeb. Höhe des Cylinders ist, so hat man hiernach die Relation:

1) . . . $V = x \cdot H$

Für das gesuchte Volumen $V_1$ des andern Körperteils hat man demnach und mit Benutzung der vorstehenden Formel II.:

2) . . . $V_1 = r^2 \pi H - x \cdot H$

Den noch unbekannten Inhalt $x$ der Grundfläche $dDc$ ($= aBb$) findet man nun folgendermassen. Verbindet man $m_1$ mit $c$ und $d$, so ist:

3) . $x =$ Sektor $m_1 dDc$ — Dreieck $m_1 cd$

Zur Bestimmung des Inhalts des Sektors $m_1 dDc$ muss man (s. Erkl. 218) den zugehörigen Centriwinkel $\alpha$ berechnen und diesen findet man auf planimetrischem Wege mittelst der in der Aufgabe gegebenen Bedingung, dass die Schnittlinie $cd$ gleich dem Radius $r$ der Grundfläche des Cylinders, also z. B. $= m_1 c$ sein soll, indem hiernach das Dreieck $m_1 cd$ ein g l e i c h s e i t i g e s, folglich:

4) . . . $\alpha = 60^0$ ist.

Nach der Erkl. 218 ergibt sich hiernach für den Inhalt des Sektors $m_1 dDc$:

$$\text{Sekt. } m_1 dDc = r^2\pi \cdot \frac{60^0}{360^0} \text{ oder:}$$

$$5) \ldots \text{Sekt. } m_1 dDc = \frac{1}{6} r^2\pi$$

Den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks $m_1 cd$ findet man nach der Erklärung 11, S. 5, mittelst der Relation:

$$6) \ldots \triangle m_1 cd = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$$

Aus den Gleich. 3) bis 6) folgt:

$$x = \frac{1}{6} r^2\pi - \frac{r^2}{4}\sqrt{3} \text{ oder:}$$

$$7) \ldots x = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Substituiert man diesen Wert für $x$ in vorsteh. Gleich. 1) und 2), so erhält man für die gesuchten Volumina:

$$A) \ldots V = \frac{Hr^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

und

$$V_1 = r^2\pi H - \frac{Hr^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ oder:}$$

$$B) \ldots V_1 = \frac{Hr^2}{2}\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $r$ und $H$ gegebenen Zahlenwerte erhält man:

$$V = \frac{5 \cdot 2^2}{2}\left(\frac{3{,}1415}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ oder:}$$

$$V = 10\left(1{,}0472 - \frac{1{,}732}{2}\right)$$

$$= 10\,(1{,}0472 - 0{,}866) \text{ mithin:}$$

$$V = 1{,}812 \text{ qm und}$$

$$V_1 = \frac{5 \cdot 2^2}{2}\left(\frac{5 \cdot 3{,}1415}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ oder:}$$

$$V = 10\,(5{,}2358 + 0{,}866) = 10 \cdot 6{,}1018$$

mithin:

$$V_1 = 61{,}018 \text{ qm}$$

---

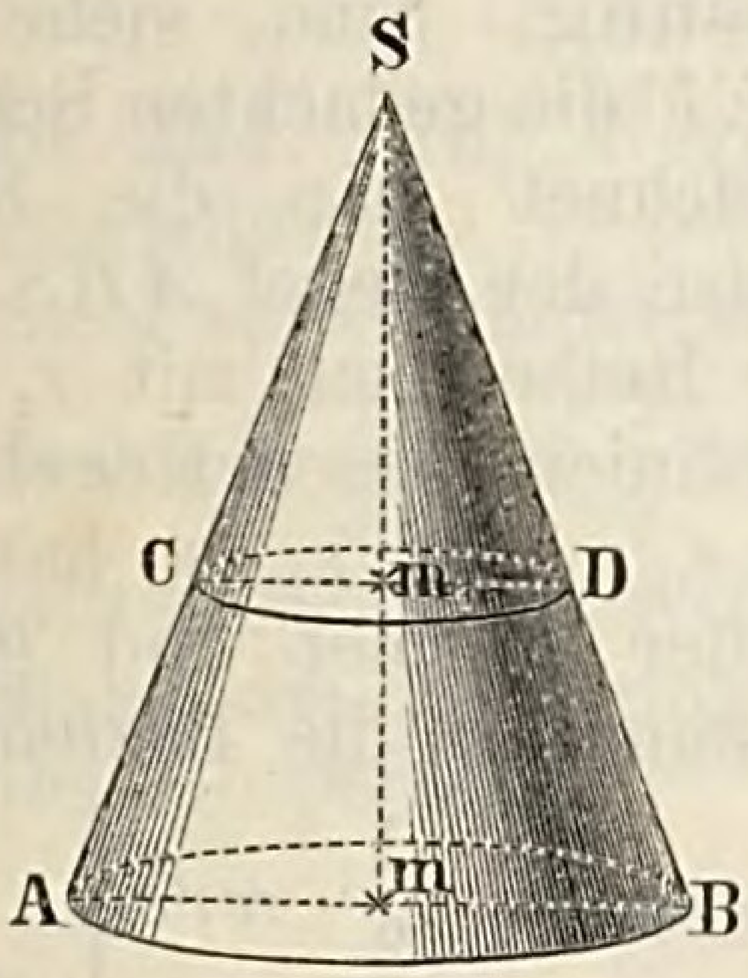
**Aufgabe 232.** Der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels ist $r = 10{,}284$ m, die Höhe dieses Kegels ist $H = 32{,}36$ m. In welchem Abstand von der Grundfläche muss eine zu letzterer parallele Schnittebene gelegt werden, damit durch diese Ebene der Kegel hal-

**Formel:**

$$V = \frac{R^2\pi H}{3} \text{ (s. Erk. 50, S. 23).}$$

biert wird, und welches ist der Radius der entstandenen Schnittfigur?

Figur 52.




**Erkl. 220.** Setzt man in nebenstehender Gleichung A) für $r = 10{,}284$ dm, so erhält man:

$$y = \frac{10{,}284}{2}\sqrt[3]{4} \text{ oder:}$$
$$y = 5{,}142 \cdot 1{,}587$$
$$y = 8{,}160354.$$

**Erkl. 221.** Setzt man in nebenstehender Gleichung B) für $H = 32{,}36$ dm, so erhält man:

$$x = \frac{32{,}36}{2}\left(2 - \sqrt[3]{4}\right) \text{ oder:}$$
$$x = 16{,}18\,(2 - 1{,}587)$$
$$x = 16{,}18 \cdot 0{,}413$$
$$x = 6{,}68234$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 52, $CD$ die gedachte Schnittebene und bezeichnet man den gesuchten Abstand $mm_1$ mit $x$, also die Höhe $Sm_1$ der oberen Pyramide mit: $(H - x)$, so hat man, wenn der noch unbekannte Radius $m_1C$ des Schnittkreises mit $y$ bezeichnet wird, nach vorstehender Formel und gemäss der Aufgabe, nach welcher nämlich die Schnittebene $CD$ den Kegel halbieren soll, die Gleichung:

$$\frac{y^2\pi(H - x)}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2\pi \cdot H}{3}$$

oder:

$$1) \ldots y^2(H - x) = \frac{r^2 H}{2}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AmS$ und $Cm_1S$ erhält man ferner:

$$2) \ldots (H - x) : y = H : r$$

Substituiert man den sich aus Gleichung 2) für $(H - x)$ ergebenden Wert:

$$3) \ldots H - x = y \cdot \frac{H}{r}$$

in Gleich. 1), so ergibt sich:

$$y^2 \cdot y \cdot \frac{H}{r} = \frac{r^2 H}{2} \text{ oder:}$$

$$y^3 = \frac{r^3}{2}, \text{ mithin ist:}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{r^3}{2}} = r\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 4}{8}} \text{ oder:}$$

$$\text{A)} \ldots y = \frac{r}{2}\sqrt[3]{4}$$

Setzt man diesen Wert für $y$ in vorstehende Gleich. 3), so wird:

$$H - x = \frac{r}{2} \cdot \frac{H}{r} \cdot \sqrt[3]{4} \text{ oder:}$$

$$H - x = \frac{H}{2}\sqrt[3]{4} \text{ und hieraus erhält}$$

man:

$$x = H - \frac{H}{2}\sqrt[3]{4} \text{ oder:}$$

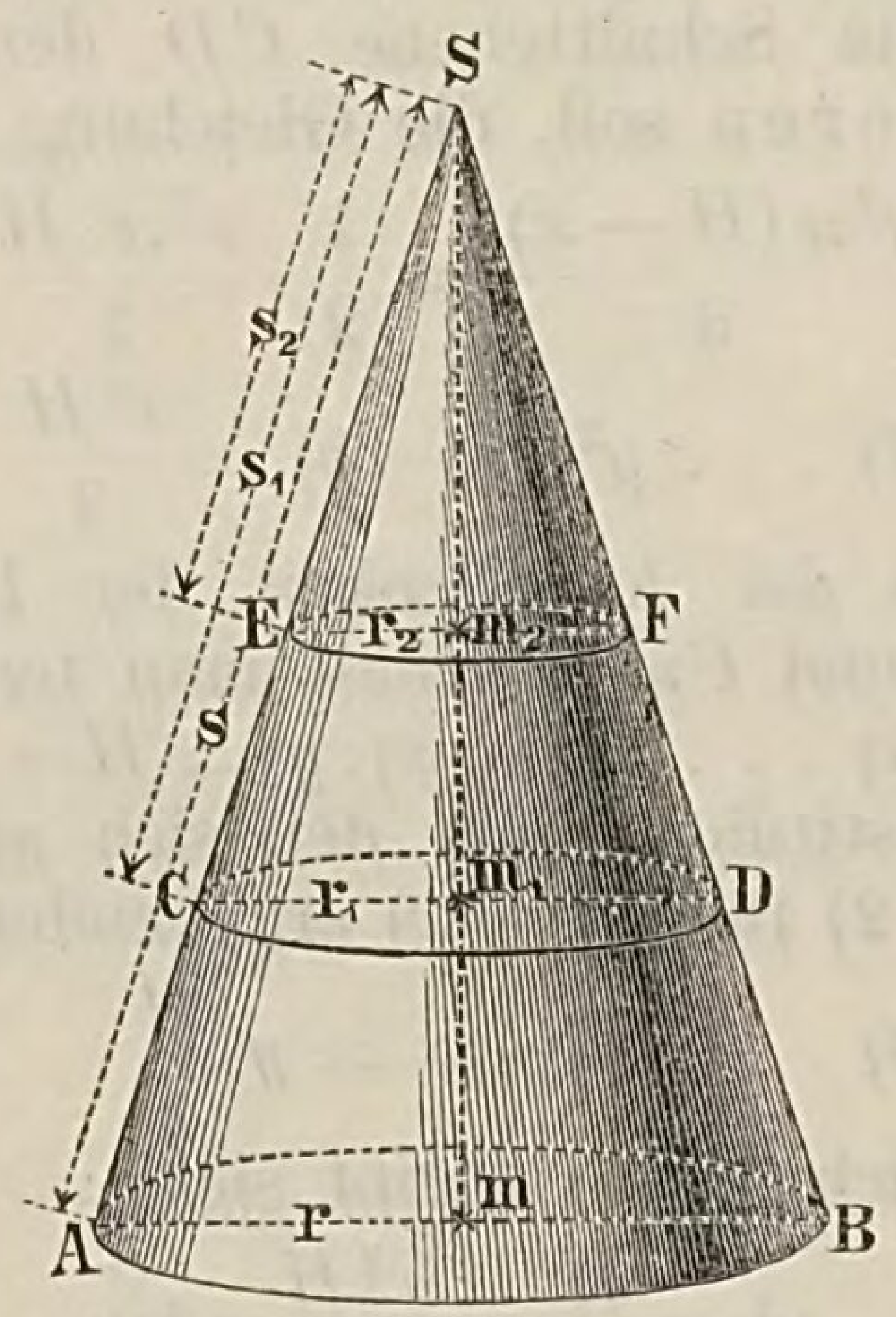
$$\text{B)} \ldots x = \frac{H}{2}\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$$

In Rücksicht der für $r$ und $H$ gegebenen Zahlenwerte erhält man nach den Erkl. 220 und 221 aus den Gleich. A) u. B) für $y$ u. $x$ die speziellen Werte:

$$y = 8{,}16 \text{ dm und}$$
$$x = 6{,}68 \text{ dm}$$

**Aufgabe 233.** Der Mantel eines geraden Kegels, dessen Höhe $= H$ gegeben ist, soll durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen in drei gleiche Teile geteilt werden. In welcher Entfernung von der Spitze sind diese Ebenen zu legen?

Figur 53.




**Formel:**

$M = \pi R \cdot s$ (s. Erkl. 49, S. 22).

**Auflösung.** Sind, siehe Figur 53, $CD$ und $EF$ die gedachten Schnittebenen und bezeichnet man die Radien der Grundkreise der Kegel $ABS$, $CDS$ und $EFS$ der Reihe nach mit $r$, $r_1$ und $r_2$, die Seitenlinien dieser Kegel der Reihe nach mit $s$, $s_1$ und $s_2$, so hat man nach vorstehender Formel und gemäss der Aufgabe zunächst die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \pi r_2 s_2 &= \frac{1}{3} \cdot \pi r s \\ \pi r_1 s_1 &= \frac{2}{3} \cdot \pi r s \end{aligned}\right\} \text{oder:}$$

$$1) \ldots \frac{r}{r_2} \cdot \frac{s}{s_2} = 3$$

$$2) \ldots \frac{r}{r_1} \cdot \frac{s}{s_1} = \frac{3}{2}$$

Bezeichnet man ferner die gesuchten Entfernungen $Sm_2$ und $Sm_1$ bezw. mit $x$ und $y$ und berücksichtigt, dass die Dreiecke $Sm_2E$, $Sm_1C$ und $SmA$ ähnlich sind, so hat man die Proportionen:

$$3) \ldots \frac{r}{r_2} = \frac{s}{s_2} = \frac{H}{x}$$

$$4) \ldots \frac{r}{r_1} = \frac{s}{s_1} = \frac{H}{y}$$

Aus den Gleichungen 1) und 3) folgt:

$\frac{H^2}{x^2} = 3$ und hieraus ergibt sich:

$$3x^2 = H^2$$

$$x^2 = \frac{H^2}{3}$$

$$x^2 = \frac{H^2 \cdot 3}{9} \text{ oder:}$$

$$\text{A)} \ldots x = \frac{H}{3}\sqrt{3}$$

Aus den Gleichungen 2) und 4) folgt:

$$\frac{H^2}{y^2} = \frac{3}{2}$$

und hieraus ergibt sich:

$$3y^2 = 2H^2$$

$$y^2 = \frac{2H^2}{3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot H^2}{9} \text{ oder:}$$

B) . . . $y = \frac{H}{3}\sqrt{6}$

und dies sind die **allgemeinen** Lösungen der Aufgabe.

---

**Aufgabe 234.** Ein Kegel, dessen Grundflächenradius $= r$ gegeben ist, soll durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen, die durch $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ seiner Höhe gehen, geteilt werden; in welchem Verhältnis stehen die Volumina der drei entstandenen Körperteile?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. $V = \frac{R^2\pi \cdot H}{3}$ (s. Erkl. 50, S. 23)

Für einen Kegelstumpf:

II. $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

(s. Erkl. 53, S. 25).

**Auflösung.** Sind, siehe Figur 53, $CD$ und $EF$ die gedachten Schnittebenen, sind also die Höhen $m\,m_1$, $m_1\,m_2$ und $m_2S$ der entstandenen Körperteile, bezw. $= \frac{1}{3}H$ und bezeichnet man das Volumen des Kegels $SEF$ mit $V$, das des Kegelstumpfs $EFCD$ mit $V_1$ und des Kegelstumpfs $CDAB$ mit $V_2$, so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formeln für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{r_2{}^2\pi \cdot \frac{H}{3}}{3} : \frac{\pi \cdot \frac{H}{3}}{3}(r_1{}^2 + r_1 \cdot r_2 + r^2{}_2) : \frac{\pi \cdot \frac{H}{3}}{3}(r^2 + r \cdot r_1 + r_1{}^2)$$

oder:

$$1) \;\ldots\; V : V_1 : V_2 = r_2{}^2 : (r_1{}^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2{}^2) : (r^2 + r \cdot r_1 + r_1{}^2)$$

Die noch unbekannten Radien $r_1$ und $r_2$ der Schnittkreise müssen nunmehr in das gegebene Bestimmungsstück $r$ ausgedrückt werden. Aus den ähnlichen Dreiecken $AmS$, $Cm_1S$ und $Em_2S$ erhält man:

$$r_2 : r = \frac{H}{3} : H \text{ oder:}$$

$$2) \;\ldots\; r_2 = \frac{r}{3}$$

und

$$r_1 : r = \frac{2H}{3} : H \text{ oder:}$$

$$3) \;\ldots\; r_1 = \frac{2r}{3}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) ergibt sich nunmehr:

$$V : V_1\,V_2 = \frac{r^2}{9} : \left(\frac{4r^2}{9} + \frac{2}{9}r^2 + \frac{r^2}{9}\right) : \left(r^2 + \frac{2\,r^2}{3} + \frac{4\,r^2}{9}\right)$$

oder:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{r^2}{9} : \frac{7r^2}{9} : \frac{19r^2}{9}$$

Das gesuchte Verhältnis ist hiernach:

$$V : V_1 : V_2 = 1 : 7 : 19$$

---

**Aufgabe 235.** Ein gerader Kegel, dessen Grundflächenradius $= r$ und dessen Seitenlinie $s = 2r$ gegeben ist, soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so zerlegt werden, dass beide entstehenden Körperteile gleiche Oberflächen haben. Wie gross ist die Seite des abgeschnittenen Kegels?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. $M = \pi R \cdot s$ (s. Erkl. 49, S. 22)

Für einen Kegelstumpf:

II. $M = \pi s (R + r)$ (s. Erkl. 56, S. 26).

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 52, $CD$ die gedachte Schnittebene und bezeichnet man die gesuchte Seitenlinie $SC$ des abgeschnittenen Kegels $SCD$ mit $x$, also die Seite $AC$ des Kegelstumpfs $ABCD$ mit $s - x$, bezw. mit $2r - x$, den unbekannten Radius $Cm_1$ des Schnittkreises mit $y$ und berücksichtigt man, dass die Schnittfläche $CD$ den beiden entstandenen Körperteilen als Begrenzungsfläche angehört, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln, die Gleichung:

1) . . . $\pi \cdot y \cdot x = \pi(2r - x)(r + y) + r^2\pi$

Ferner ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken $Sm_1C$ und $SmA$, siehe Fig. 52, die Proportion:

$$Cm_1 : CS = Am : AS,$$

bezw. die weitere Gleichung:

2) . . . $y : x = r : s$

Die Gleich. 1) geht durch Reduktion, siehe Erkl. 222, über in:

3) . . . $2xy + rx - 2ry = 3r^2$

Aus Gleichung 2) erhält man, wenn $s = 2r$ gesetzt wird:

4) . . . $y = \frac{x}{2}$

Aus den Gleich. 4) und 3) erhält man:

$$2x \cdot \frac{x}{2} + rx - 2r \cdot \frac{x}{2} = 3r^2$$

oder:

$$x^2 + rx - rx = 3r^2$$

$$x^2 = 3r^2, \text{ mithin:}$$

$$x = r\sqrt{3} \; *)$$

und dies ist die **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

**Erkl. 222.** Nebenstehende Gleichung:

1) . . . $\pi y x = \pi(2r - x)(r + y) + r^2\pi$

reduziert gibt der Reihe nach:

$$yx = (2r - x)(r + y) + r^2$$

$$yx = 2r^2 - rx + 2ry - xy + r^2$$

$$2xy + rx - 2ry = 3r^2$$

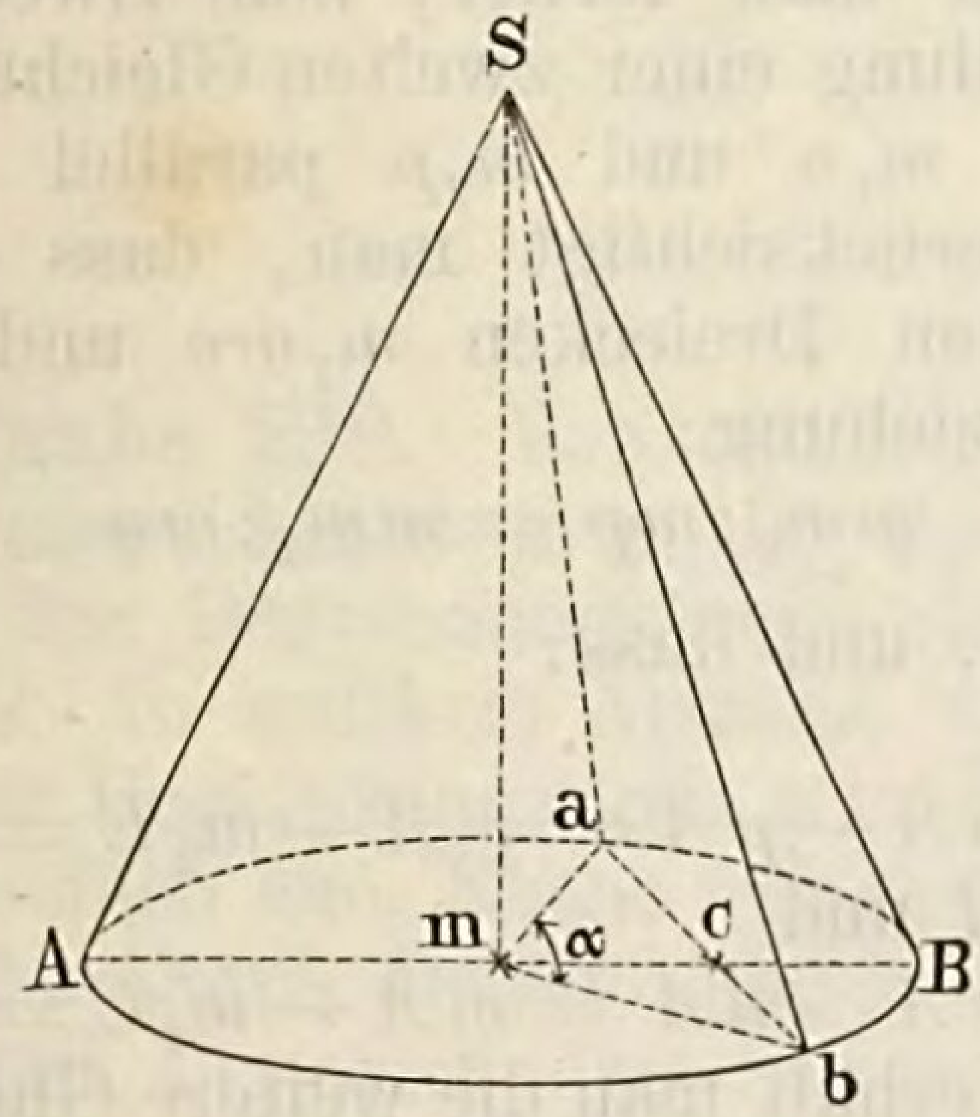
---

*) Da die Höhe $H$ des Kegels in die Seitenlinie $s = 2r$ und den Radius $r$ des Grundkreises ausgedrückt $= \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2}$ also auch gleich $r\sqrt{3}$ ist, so kann man auch sagen: **Die gesuchte Seitenlinie $x$ des gedachten abgeschnittenen Kegels ist gleich der Höhe des ganzen Kegels.**

---

**Aufgabe 236.** Durch die Spitze eines Kegels und eine dem Radius gleiche Sehne der Grundfläche sei eine Ebene gelegt; in welchem Verhältnis stehen die krummen Begrenzungsflächen der entstandenen Körperteile?

Figur 54.




**Erkl. 223.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Inhalt $J$ eines Kreissektors ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich der Länge (bog) des den Sektor begrenzenden Bogens und dessen Höhe gleich dem Radius $r$ des zugehörigen Kreises ist, in Zeichen:

$$J = \frac{\text{bog} \cdot r}{2}$$

**Erkl. 224.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Längen der Kreisbogen, welche einem und demselben Kreise (oder Kreisen mit gleichen Radien) angehören, sind proportional den zu denselben gehörigen Centriwinkel.“

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 54, $Sab$ die gedachte Schnittebene und bezeichnet man die krumme Begrenzungsfläche $SaAb$ des grösseren Körperteils mit $M$, die krumme Begrenzungsfläche $SaBb$ des kleineren Körperteils mit $M_1$, so besteht unter Berücksichtigung, dass diese in eine Ebene entrollten krummen Begrenzungsflächen Kreissektoren bilden, deren Radien $= Sa = Sb$, nämlich gleich der Seitenlinie $s$ des Kegels und deren Bogen bezw. gleich den Längen der Kreisbogen $aAb$ und $aBb$ sind, nach der Erkl. 223, die Beziehung:

$$M : M_1 = \frac{\text{bog}\, aAb \cdot s}{2} : \frac{\text{bog}\, aBb \cdot s}{2}$$

oder:

$$1) \ldots M : M_1 = \text{bog}\, aAb : \text{bog}\, aBb$$

Da nun die Längen der Bogen $aAb$ und $aBb$ proportional den zu diesen Bogen zugehörigen Centriwinkel: $(4R - \alpha)$ und $\alpha$ sind (s. Erkl. 224), und analog wie in der Aufgabe 231, Seite 123, gefunden werden kann, dass

$$\alpha = 60^0$$

also: $4R - \alpha = 360^0 - 60^0 = 300^0$ ist, so erhält man aus vorst. Gleich. 1) für das gesuchte Verhältnis:

$$M : M_1 = 300 : 60 \text{ oder:}$$
$$M : M_1 = 5 : 1.$$

---

**Aufgabe 237.** Von einem geraden Kegelstumpf kennt man den Halbmesser $R = 4$ m der Grundfläche, den Halbmesser $r = 2$ m der Deckfläche und die Höhe $H = 6$ m. Dieser Kegelstumpf soll nun durch eine zur Grundfläche parallele Schnittebene halbiert werden; in welchem Abstand von der Grundfläche ist diese Ebene zu legen, und welches ist der Radius der entstehenden Schnittfigur?

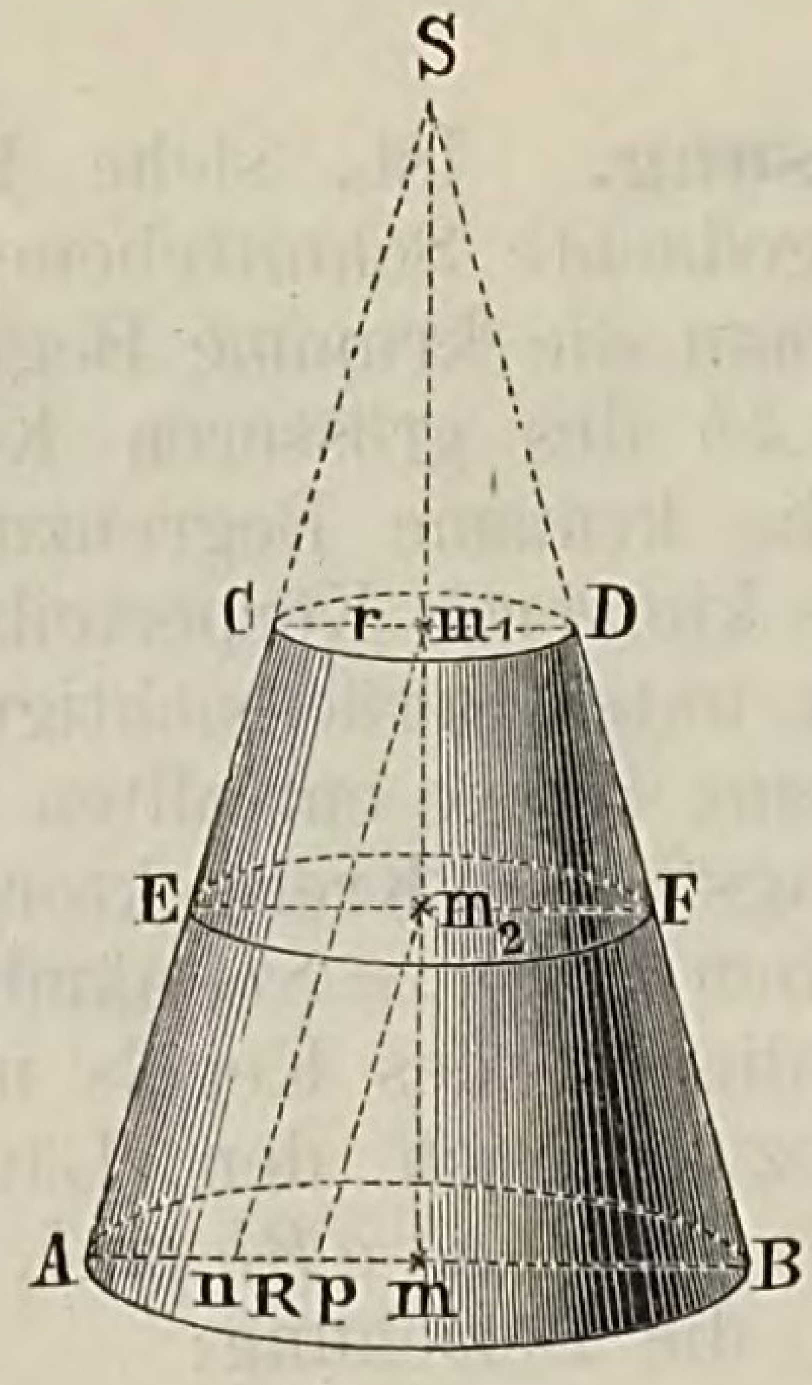
**Formel:**

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(siehe Erkl. 53, S. 25).

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 55, $EF$ die gedachte Schnittebene, welche den Kegelstumpf $ABDC$ halbiert, und bezeichnet man den gesuchten Abstand $mm_2$, in welcher die Schnittebene $EF$ zu legen ist, mit $x$, den gesuchten Radius $Em_2$ der entstehenden Schnittfigur $EF$ mit $y$, so hat man gemäss der Auf-

Figur 55.




**Erkl. 225.** In Erkl. 205, Seite 115, ist bereits schon erwähnt, dass:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

dass auch somit:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \text{ ist.}$$

Nach dieser Formel, oder durch einfache Multiplikation erhält man:

$$(R - y)(R^2 + Ry + y^2) = R^3 - y^3 \text{ und}$$
$$(R - r)(R^2 + Rr + r^2) = R^3 - r^3$$

gabe und mit Benutzung der vorsteh. Formel:

$$\frac{\pi x}{3}(R^2 + Ry + y^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

oder:

$$1) \ldots x(R^2 + Ry + y^2) = \frac{H}{2}(R^2 + Rr + r^2)$$

Zieht man ferner, zum Zwecke der Aufstellung einer zweiten Gleichung, die Linien $m_1 n$ und $m_2 p$ parallel zu $AC$ und berücksichtigt man, dass in den ähnlichen Dreiecken $m_1 mn$ und $m_2 mp$ die Beziehung:

$$mm_2 : mp = mm_1 : mn$$

besteht, und dass:

$$mm_2 = x$$
$$mp = mA - pA = mA - m_2E = R - y$$
$$mm_1 = H \text{ und}$$
$$mn = mA - nA = mA - m_1C = R - r$$

ist, so erhält man die weitere Gleichung:

$$2) \ldots \frac{x}{R - y} = \frac{H}{R - r}$$

Substituiert man den sich für $x$ aus Gleich. 2) ergebenden Wert:

$$3) \ldots x = \frac{H}{R - r}(R - y)$$

in Gleich. 1), so ist:

$$\frac{H\cdot(R - y)}{R - r}\cdot(R^2 + Ry + y^2) = \frac{H}{2}(R^2 + Rr + r^2)$$

oder:

$$(R - y)(R^2 + Ry + y^2) = \frac{1}{2}(R - r)(R^2 + Rr + r^2)$$

mithin nach der Erkl. 225:

$$R^3 - y^3 = \frac{1}{2}\cdot(R^3 - r^3)$$

und hieraus erhält man für den gesuchten Radius $y$ der Schnittfigur:

$$y^3 = R^3 - \frac{1}{2}R^3 + \frac{1}{2}r^3 = \frac{1}{2}R^3 + \frac{1}{2}r^3$$

oder:

$$A) \ldots y = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$$

Substituiert man diesen Wert für $y$ in vorsteh. Gleichung 3), so erhält man für den gesuchten Abstand $x$:

$$B) \ldots x = \frac{H}{R - r}\left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}\right)$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $R$, $r$ und $H$ gegebenen Zahlenwerte findet man hiernach:

$$y = \sqrt[3]{\frac{4^3 + 2^3}{2}} = \sqrt[3]{36} \text{ oder:}$$

$$y = 3{,}302 \text{ m}$$

und:

$$x = \frac{6}{4-2}\left(4 - \sqrt[3]{\frac{4^3+2^3}{2}}\right) = 3\,(4 - 3{,}302)$$

$$x = 3 \cdot 0{,}698 \text{ oder:}$$

$$x = 2{,}094 \text{ m}$$

---

**Aufgabe 238.** Von einem geraden Kegelstumpf kennt man die Radien $R$ und $r$ der Begrenzungskreise und die Höhe $H$. In welchem Abstand von dem kleineren Begrenzungskreis muss parallel zu demselben eine Ebene gelegt werden, damit der durch dieselbe abgeschnittene Körperteil, der nach dem kleineren Begrenzungskreis zu liegt, den gegebenen Kubikinhalt $v$ habe?

**Formel:**

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(siehe Erkl. 53, Seite 25).

**Auflösung.** Ist, siehe Fig. 55, $EF$ die gedachte Schnittebene, welche von dem Kegelstumpf $ABDC$ das Stück $EFDC$ abschneidet, dessen Volumen $= v$ gegeben ist, und bezeichnet $x$ den gesuchten Abstand $m_1 m_2$, also $(H - x)$ die Höhe $mm_2$ des untern Stumpfs $ABFE$ und $y$ den unbekannten Radius $Em_2$ des Schnittkreises $EF$, so hat man, gemäss der Aufgabe und mit Benutzung der vorstehenden Formel, die Gleichung:

$$\frac{\pi(H-x)}{3}(R^2 + Ry + y^2) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) - v$$

oder:

$$1) \ldots (H-x)(R^2 + Ry + y^2) = H(R^2 + Rr + r^2) - \frac{3v}{\pi}$$

Ferner ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken $m_2 mp$ und $m_1 mn$, analog wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Gleichung:

$$2) \ldots \frac{H-x}{R-y} = \frac{H}{R-r}$$

Substituiert man den sich für $(H - x)$ aus Gleich. 2) ergebenden Wert:

$$3) \ldots H - x = \frac{H}{R-r} \cdot (R-y)$$

in Gleich. 1), so ist:

$$4) \ldots \frac{H \cdot (R-y)}{R-r}(R^2 + Ry + y^2) = H(R^2 + Rr + r^2) - \frac{3v}{\pi}$$

**Erkl. 226.** Nebenstehende Gleich. 4) reduziert und nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$H(R-y)(R^2+Ry+y^2) = H(R-r)(R^2+Rr+r^2) - \frac{3v}{\pi}(R-r)$$

$$H(R^3-y^3) = H(R^3-r^3) - \frac{3v}{\pi}(R-r)$$

$$R^3 - y^3 = R^3 - r^3 - \frac{3v}{\pi H}(R-r)$$

$$y^3 = R^3 - R^3 + r^3 + \frac{3v}{\pi H}(R-r)$$

mithin:

$$y = \sqrt[3]{r^3 + \frac{3v}{\pi H}(R-r)}$$

und hieraus findet man nach der Erklärung 226:

$$5) \ldots y = \sqrt[3]{r^3 + \frac{3v}{\pi H}(R-r)}$$

Setzt man endlich diesen Wert für $y$ in Gleich. 3) ein, so erhält man für den gesuchten Abstand $x$:

$$H - x = \frac{H}{R-r}\left(R - \sqrt[3]{r^3 + \frac{3v}{\pi H}(R-r)}\right)$$

oder:

$$x = H - \frac{H}{R-r}\left(R - \sqrt[3]{r^3 + \frac{3v}{\pi H}(R-r)}\right)$$

$$x = \frac{H}{R-r}\left(R - r - R + \sqrt[3]{r^3 + \frac{3v}{\pi H}(R-r)}\right)$$

mithin:

$$x = \frac{H}{R-r}\left(\sqrt[3]{r^3 + \frac{3v}{\pi H}(R-r)} - r\right)$$

---

**Aufgabe 239.** Von einem geraden Kegelstumpf kennt man das Volumen $V = 1960{,}354$ ccm, die Höhe $H = 12$ cm und die Differenz $d$ der Radien der beiden Begrenzungskreise $= 6$ cm. Parallel zur Grundfläche soll eine Ebene so gelegt werden, dass der Mantel des geraden Cylinders, welcher den kleineren Begrenzungskreis des Stumpfs zur Grundfläche und zur Höhe die Höhe $H$ des Stumpfs hat, gleich dem Mantel desjenigen geraden Cylinders ist, welcher die entstehende Schnittfigur zur Grundfläche und zur Höhe die Entfernung der Schnittebene vom grösseren Begrenzungskreis des Stumpfes hat. In welcher Entfernung vom grösseren Begrenzungskreis ist jene Schnittebene zu legen.

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{I. } V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(siehe Erkl. 53, S. 25)

Für einen Cylinder:

$$\text{II. } M = 2\pi R \cdot H$$

(siehe Erkl. 47, S. 20).

**Erkl. 227.** Setzt man in nebenstehender Gleichung:

$$1) \ldots V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

für $R = d + r$

und löst die somit erhaltene Gleichung nach $r$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$V = \frac{\pi H}{3}\left((d+r)^2 + (d+r)r + r^2\right)$$

$$\frac{3V}{\pi H} = d^2 + 2dr + r^2 + dr + r^2 + r^2$$

$$3r^2 + 3dr = \frac{3V}{\pi H} - d^2$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 55, $EF$ die gedachte Schnittebene und bezeichnet man den gesuchten Abstand $mm_2$ mit $x$, den unbekannten Radius $Em_2$ des Schnittkreises mit $y$ und die unbekannten Radien $Am$ und $Cm_1$ der Begrenzungskreise des Stumpfes mit $R$ und $r$, so hat man der Aufgabe gemäss, und mit Benutzung der vorstehenden Formeln, die Bestimmungsgleichungen:

$$1) \ldots V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

$$2) \ldots R - r = d$$

$$3) \ldots 2\pi r \cdot H = 2\pi y \cdot x$$

$$r^2 + dr = \frac{V}{\pi H} - \frac{d^2}{3}$$

$$r^2 + dr + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{V}{\pi H} - \frac{d^2}{3} + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\left(r + \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{V}{\pi H} - \frac{d^2}{3} + \frac{d^2}{4}$$

$$r + \frac{d}{2} = \pm\sqrt{\frac{V}{\pi H} - \frac{d^2}{12}} \text{ oder:}$$

$$r = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{V}{\pi H} - \frac{d^2}{12}}$$

**Erkl. 228.** Wollte man den mittelst nebenstehender Gleich. b) gefundenen allgemeinen Wert zur weiteren Berechnung der gesuchten Grösse $x$ benutzen, so würden in der hierzu nötigen Entwicklung immer grössere algebraische Ausdrücke entstehen, welche sich auf keine einfachere Form bringen lassen. Man betrachtet daher $r$, da es mittelst der Gleichung b) in lauter gegeb. Stücke ausgedrückt ist und für sich berechnet werden kann, nunmehr ebenfalls als eine gegebene Grösse, desgleichen $R$ (siehe Gleich. a).

**Hülfsrechnungen:**

1) $r = -\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{1960{,}354}{3{,}141 \cdot 12} - \frac{6^2}{12}}$

$r = -3 + \sqrt{52 - 3}$ (s. Hülfsrechn. 2)

$r = -3 + \sqrt{49} = -3 + 7$

$r = 4$

2) $log \frac{1960{,}354}{3{,}141 \cdot 12} = log\, 1960{,}354 - (log\, 3{,}141 + log\, 12)$

$log\, 1960{,}354 = 3{,}292\,3225$
$+ 110$
$+ 89$
$3{,}292\,3425$

$-(log\, 3{,}141 + log\, 12)$
$= -(0{,}4971499 + 1{,}0791812) = -1{,}5763311$
$1{,}7160114$
$0033$
$81$

mithin:

$$\frac{1960{,}354}{3{,}141 \cdot 12} = 52, \text{ abgerundet.}$$

**Erkl. 229.** Umstehende Gleichung:

4) . . . $x : (R - y) = H : (R - r)$

nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x(R - r) = H(R - y)$$

oder, da $R - r = d$ gegeben ist:

$$x \cdot d = H(R - y)$$
$$xd = HR - Hy$$
$$Hy = HR - xd \text{ mithin:}$$
$$y = \frac{HR - xd}{H}$$

Ferner erhält man noch aus den ähnlichen Dreiecken $nmm_1$ und $pmm_2$ die Proportion: $mm_2 : mp = mm_1 : mn$, beziehungsweise die weitere Gleichung:

4) . . . $x : (R - y) = H : (R - r)$

Um aus diesen 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten die Grösse $x$ zu finden, verfahre man, wie folgt.

Substituiert man den für $R$ sich aus Gleich. 2) ergebenden Wert:

a) . . . $R = d + r$

in Gleich. 1), so erhält man nach der Erkl. 227:

b) . . . $r = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{V}{\pi H} - \frac{d^2}{12}}$

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergeben sich somit **zunächst** (s. Erkl. 228), für $R$ und $r$ die Werte:

$$r = -\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{1960{,}354}{3{,}141 \cdot 12} - \frac{6^2}{12}} \text{ oder:}$$

α) $r = 4$ cm (s. Hülfsrechnung 1) und

β) $R = 6 + 4 = 10$ cm

Reduziert man jetzt die Gleich. 3) und substituiert in die somit neu erhaltene Gleichung: $rH = yx$ den sich aus der Gleich. 4) für $y$ ergebenden Wert:

$$y = \frac{HR - xd}{H} \text{ (s. Erkl. 229),}$$

so erhält man schliesslich zur Berechnung von $x$ die Gleichung:

$$rH = \frac{HR - xd}{H} \cdot x$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Reihe nach:

$$rH^2 = HRx - dx^2$$
$$dx^2 - HRx = -rH^2$$
$$x^2 - \frac{HR}{d}x = -\frac{rH^2}{d} = -\frac{rH}{d} \cdot H$$

Setzt man nunmehr in den Ausdrücken $\frac{RH}{d}$ und $\frac{rH^2}{d}$ die für $H$ und $d$ gegebenen und für $R$ und $r$ berechneten Werte, setzt man also für:

$$\frac{RH}{d} = \frac{10 \cdot 12}{6} = 20$$

und für:

$$\frac{rH^2}{d} = \frac{4 \cdot 12^2}{6} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 12}{6} = 4 \cdot 12 \cdot 2 = 96$$

so geht die letztere Gleichung über, in:

$$x^2 - 20x = -96$$

und diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x^2 - 20x + \left(\frac{20}{2}\right)^2 = -96 + \left(\frac{20}{2}\right)^2$$

$$(x-10)^2 = -96 + 10^2$$

$$x - 10 = \pm\sqrt{4}$$

$$x = 10 \pm 2$$

Für die gesuchte Entfernung erhält man hiernach:

$$x_1 = 12 \text{ cm}$$

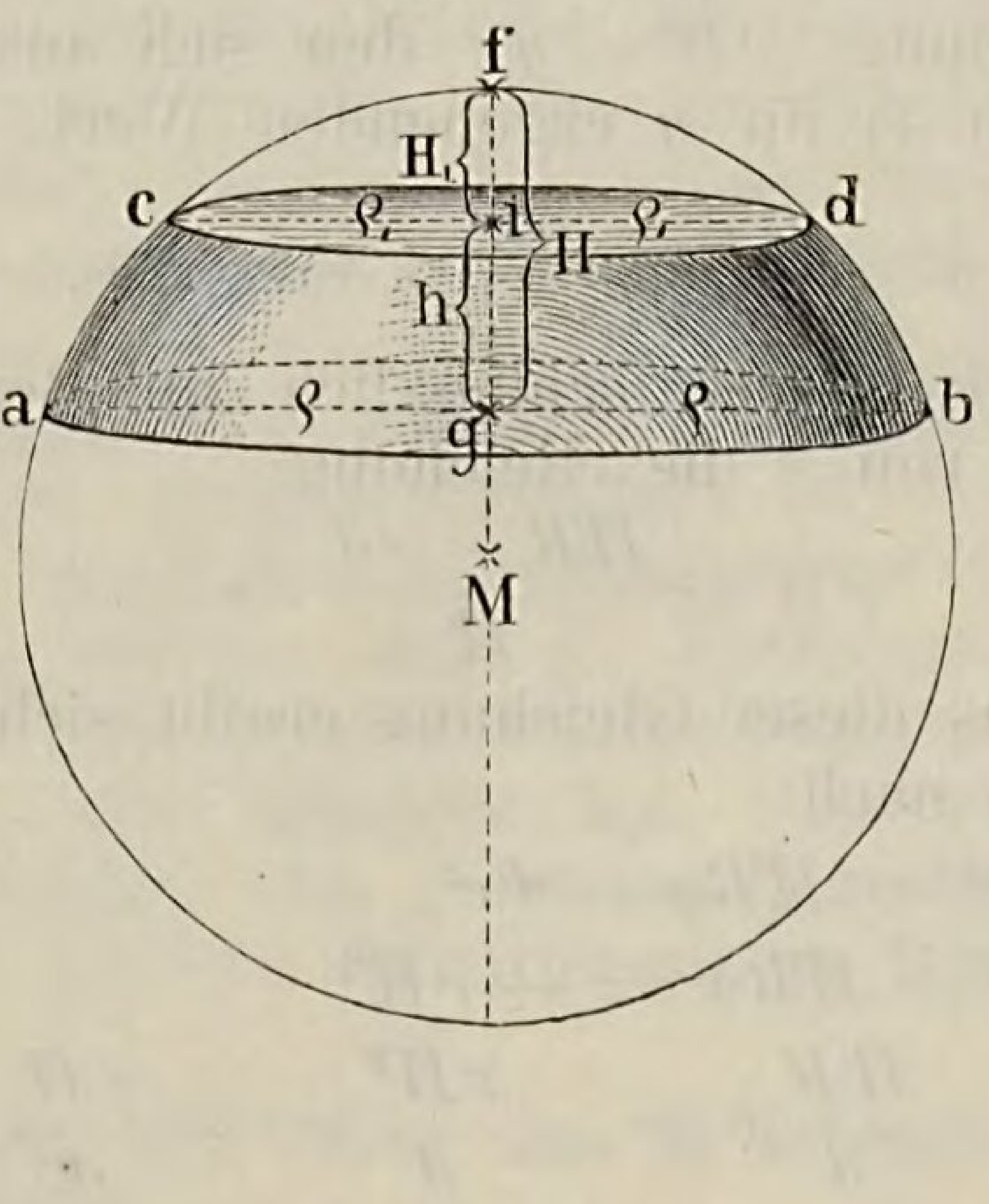
welcher Wert für die Aufgabe unzulässig ist, indem die ganze Höhe des Stumpfs $= 12$ cm beträgt, und

$$x_2 = 8 \text{ cm}$$

---

**Aufgabe 240.** Der Halbmesser $r$ einer Kugel ist $= 2,4$ dm lang; die Kugel wird in den Entfernungen 0,8 u. 1,8 dm von einem beliebigen Punkte der Oberfläche durchschnitten. Wie gross ist das Volumen desjenigen Teils der Kugel, der zwischen den beiden Schnittebenen liegt?

Figur 56.




**Formel:**

$$V = \pi\left[(H^2 - H_1{}^2)\,r - \frac{1}{3}(H^3 - H_1{}^3)\right]$$

(s. Erkl. 158, S. 84).

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 56, der Punkt $f$ ein beliebiger Punkt der Kugeloberfläche und sind $cd$ und $ab$ die in den Abständen $fi = H_1 = 0,8$ und $fg = H = 1,8$ dm gelegten Schnittebenen, so hat man zur Berechnung des Volumens $V$ der Kugelschicht $abdc$, nach vorstehender Formel, die Relation:

1) $V = 3,141\left[(1,8^2 - 0,8^2)\,2,4 - \frac{1}{3}(1,8^2 - 0,8^3)\right]$

und hieraus erhält man der Reihe nach:

$$V = 3,141\left[(3,22 - 0,64)\,2,4 - \frac{1}{3}(5,796 - 0,512)\right]$$

$$V = 3,141\left[2,58 \cdot 2,4 - \frac{1}{3} \cdot 5,284\right]$$

$$V = 3,141\,(6,192 - 1,7613)$$

$$V = 3,141 \cdot 4,431$$

Das gesuchte Volumen $V$ ist somit, abgerundet $= 14$ cdm

---

**Aufgabe 241.** Der Radius $r$ einer Kugel ist gegeben; zwei zu einem beliebigen Durchmesser der Kugel senkrecht gelegte Ebenen teilen diesen Durchmesser in 3 gleiche Teile. Welches sind die Inhalte der dadurch entstandenen Calotten und Zonen, und welches sind die Volumina der Kugelsegmente und der Kugelschicht?

**Formeln:**

Für eine Calotte:

I. $J = 2\pi r h$ (s. Erkl. 63, S. 29)

Für eine Zone:

II. $J = 2\pi r h$ (s. Erkl. 63, S. 29)

Für ein Kugelsegment:

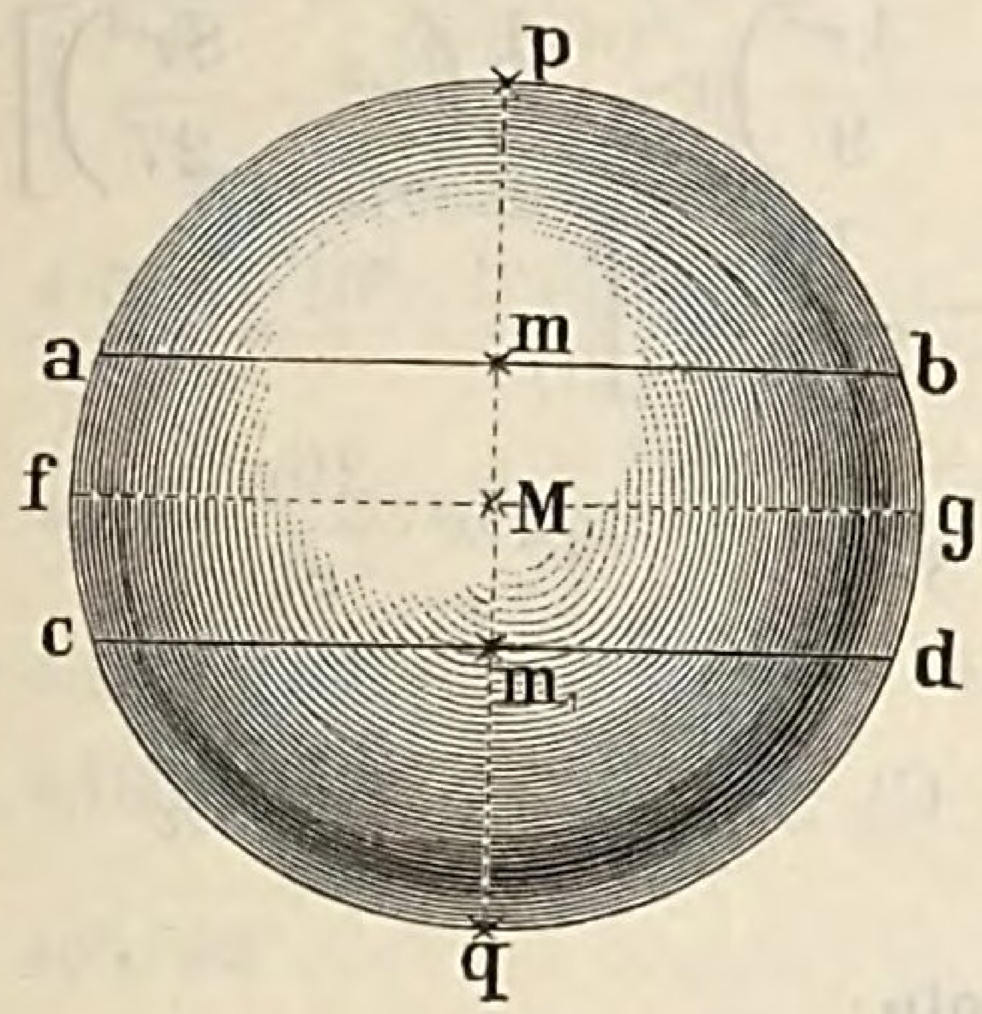
III. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ (s. Erkl. 151, S. 78)

Für eine Kugelschicht:

$$\text{IV.}\quad V = \pi\left[(H^2 - H_1^2)r - \frac{1}{3}(H^3 - H_1^3)\right]$$

(s. Erkl. 158, S. 84).

Figur 57.




**Auflösung.** Die zwei gedachten Schnittebenen $ab$ und $cd$, siehe Fig. 57, teilen die Oberfläche der Kugel in drei Teile, nämlich in zwei Calotten, jede mit der Höhe $h = \frac{2r}{3}$ und in eine Zone mit der Höhe $h_1 = \frac{2r}{3}$. Für den gesuchten Inhalt $J$ einer dieser Calotten, oder für den Inhalt $J$ der gedachten Zone hat man somit, mit Benutzung der vorsteh. Formeln I. und II.:

$$J = 2\pi r \cdot \frac{2r}{3} \text{ oder:}$$

$$\text{A)} \ldots J = \frac{4}{3}\pi r^2$$

Ferner zerlegen die gedachten Ebenen die Kugel in drei Körperteile, nämlich in 2 Kugelsegmente, jedes mit der Höhe $h = \frac{2r}{3}$ und in eine Kugelschicht mit der Höhe $h_1 = \frac{2r}{3}$.

Für das gesuchte Volumen $V$ einer jeden der beiden Kugelsegmente hat man hiernach mit Benutzung der vorsteh. Formel III.:

$$V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{2r}{3}\right)^2}{3}\left(3r - \frac{2r}{3}\right) \text{ oder:}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4r^2}{3 \cdot 9} \cdot \frac{9r - 2r}{3}$$

$$V = \frac{4\pi r^2}{27} \cdot \frac{7r}{3} \text{ mithin:}$$

$$\text{B)} \ldots V = \frac{28}{81}\pi r^3$$

Für das gesuchte Volumen $V_1$ der Kugelschicht erhält man nach vorsteh. Formel IV., wenn man berücksichtigt, dass die Schicht $abdc$ durch einen grössten Kreis $fg$ der Kugel halbiert wird, dass somit 2 gleiche Schichten entstehen, in welchen je $H = r$ und $H_1 = \frac{2r}{3}$ ist, die Gleichung:

$$V_1 = 2\cdot\pi\left(\left[r^2-\left(\frac{2r}{3}\right)^2\right]r-\frac{1}{3}\left[r^3-\left(\frac{2r}{3}\right)^3\right]\right)$$

oder:

$$V_1 = 2\pi\left[\left(r^2-\frac{4r^2}{9}\right)r-\frac{1}{3}\left(r^3-\frac{8r^3}{27}\right)\right]$$

$$V_1 = 2\pi\left[\frac{5r^3}{9}-\frac{19}{3\cdot 27}r^3\right]$$

$$V_1 = 2\pi\cdot\frac{45r^3-19r^3}{81} = 2\pi\cdot\frac{26r^3}{81}$$

mithin:

$$\text{C)} \ldots V_1 = \frac{52}{81}r^3\pi$$

---

**Aufgabe 242.** Eine Kugel, deren Radius $r = 10$ dm gegeben ist, wird durch eine Ebene so geschnitten, dass sich die auf der Kugeloberfläche hierdurch entstehenden 2 Flächenstücke wie $m:n = 1:4$ verhalten. Welches sind die Volumina der Segmente, in welche durch jene Ebene die Kugel zerlegt wird?

**Formeln:**

Für eine Calotte:

I. $J = 2\pi r h$ (s. Erkl. 63, S. 29)

II. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$ (s. Erkl. 151, S. 78).

**Auflösung.** Die gedachte Schnittebene zerlegt die Oberfläche der Kugel in zwei Calotten; bezeichnet man die unbekannte Höhe der einen mit $x$, so ist die Höhe der anderen $= 2r - x$ und mit Benutzung der vorstehend. Formel I. hat man der Aufgabe gemäss, die Proportion.

1) ... $2\pi r x : 2\pi r(2r-x) = m:n$

Ferner hat man mit Benutzung der vorstehenden Formel II. für das gesuchte Volumen $V$ des einen Kugelsegments:

2) ... $V = \frac{\pi x^2}{3}(3r-x)$

und für das gesuchte Volumen $V_1$ des anderen Segments:

3) . $V_1 = \frac{\pi(2r-x)^2}{3}[3r-(2r-x)]$

Aus Gleich. 1) erhält man nach der Erkl. 230:

4) ... $x = \frac{2mr}{m+n}$ und

5) ... $2r - x = \frac{2nr}{m+n}$

Substituiert man diese Werte in die Gleich. 2) und 3), so erhält man für die gesuchten Volumina $V$ und $V_1$:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2mr}{m+n}\right)^2\cdot\left(3r-\frac{2mr}{m+n}\right) \text{ und}$$

**Erkl. 230.** Nebenstehende Gleichung:
$2\pi r x : 2\pi r(2r-x) = m:n$
reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x}{2r-x} = \frac{m}{n}$$
$$nx = 2mr - mx$$
$$mx + nx = 2mr$$
$$x(m+n) = 2mr \text{ oder:}$$
$$x = \frac{2mr}{m+n}$$

mithin ist:

$$2r - x = 2r - \frac{2nr}{m+n} = \frac{2mr+2nr-2mr}{m+n}$$

oder:

$$2r - x = \frac{2nr}{m+n}$$

**Erkl. 231.** Nebenstehende Gleichung:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2mr}{m+n}\right)^2\cdot\left(3r-\frac{2mr}{m+n}\right)$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{4m^2r^2}{(m+n)^2}\cdot\frac{3mr+3nr-2mr}{m+n}$$

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{4m^2r^2(mr+3nr)}{(m+n)^3}$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}\cdot\frac{m^2(m+3n)}{(m+n)^3}$$

In analoger Weise erhält man aus:

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2nr}{m+n}\right)^2 \cdot \left(3r - \frac{2nr}{m+n}\right)$$

$$V_1 = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{n^2(n+3m)}{(m+n)^3}$$

**Hülfsrechnungen:**

1) $V = \frac{4 \cdot 3{,}141 \cdot 10^3}{3} \cdot \frac{1^2(1+3\cdot 4)}{(1+4)^3}$

$= 4 \cdot 1{,}047 \cdot 1000 \cdot \frac{1+12}{5^3}$

$= 4{,}188 \cdot 1000 \cdot \frac{13}{125} = 4{,}188 \cdot 8 \cdot 13$

$= 4{,}188 \cdot 104$

oder:

$V = 435{,}552$

2) $V_1 = \frac{4 \cdot 3{,}141 \cdot 10^3}{3} \cdot \frac{4^2(4+3\cdot 1)}{(1+4)^3}$

$= 4 \cdot 1{,}047 \cdot 1000 \cdot \frac{16 \cdot 7}{5^3}$

$= 4{,}188 \cdot 1000 \cdot \frac{112}{125} = 4{,}188 \cdot 8 \cdot 112$

$= 4{,}188 \cdot 896$

oder:

$V_1 = 3752{,}448$

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2nr}{m+n}\right)^2 \cdot \left(3r - \frac{2nr}{m+n}\right)$$

oder nach der Erkl. 231:

A) . . . $V = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{m^2(m+3n)}{(m+n)^3}$ und

B) . . . $V_1 = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{n^2(n+3m)}{(m+n)^3}$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$V = \frac{4 \cdot 3{,}142 \cdot 10^3}{3} \cdot \frac{1^2(1+3\cdot 4)}{(1+4)^3}$$

oder nach Hülfsrechnung 1:

$V = 435{,}552$ cdm und

$$V_1 = \frac{4 \cdot 3{,}142 \cdot 10^3}{3} \cdot \frac{4^2(4+3\cdot 1)}{(1+4)^3}$$

oder nach Hülfsrechnung 2:

$V_1 = 3752{,}448$ cdm

---

**Aufgabe 243.** Der Durchmesser $d$ einer Kugel ist gegeben; senkrecht zu einem Durchmesser der Kugel wird in einer Entfernung von dem einen Endpunkte desselben, die gleich $\frac{1}{m}$ des gegebenen Durchmessers ist, eine Ebene gelegt. Man soll die Durchmesser der Kugeln berechnen, die gleich den aus jener Kugel gebildeten Segmenten sind.

**Erkl. 232.** Nebenstehende Gleichung:

1) $\frac{\pi x^3}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{m}d\right)^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{d}{2} - \frac{1}{m}d\right)$

reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$x^3 = 2 \cdot \frac{1}{m^2} d^2 \cdot \left(\frac{3d}{2} - \frac{d}{m}\right)$

$x^3 = \frac{2d^2}{m^2} \cdot \frac{3md - 2d}{2m}$

$x^3 = \frac{2d^2}{m^2} \cdot \frac{d(3m-2)}{2m}$

$x^3 = \frac{2d^3}{2m^3}(3m-2)$

$x = \frac{d}{m}\sqrt[3]{3m-2} = \frac{1}{m}d\sqrt[3]{3m-2}$

**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. $V = \frac{\pi d^3}{6}$ (s. Erkl. 67, S. 29)

Für ein Segment:

II. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$

(s. Erkl. 151, S. 78).

**Auflösung.** Die gedachte Ebene zerlegt die Kugel, deren Radius $= \frac{d}{2}$ gegeb. ist, in 2 Kugelsegmente, von denen das eine die Höhe $h = \frac{1}{m}d$, das andere die Höhe $h_1 = \frac{m-1}{m}d$ hat. Bezeichnet man die gesuchten Durchmesser der Kugeln, welche an Volumen gleich jenen Segmenten sind, mit $x$ und $y$, so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formeln, die Bestimmungsgleichungen:

1) $\frac{\pi \cdot x^3}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{m}d\right)^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{d}{2} - \frac{1}{m}d\right)$

2) $\frac{\pi y^3}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{m-1}{m}d\right)^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{d}{2} - \frac{m-1}{m}d\right)$

**Erkl. 233.** Nebenstehende Gleichung:

$$2)\quad \frac{\pi y^3}{6} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{m-1}{m}d\right)^2\left(3\cdot\frac{d}{2} - \frac{m-1}{m}d\right)$$

reduziert und nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$y^3 = 2\cdot\frac{(m-1)^2\cdot d^2}{m^2}\left(\frac{3d}{2} - \frac{(m-1)d}{m}\right)$$

$$y^3 = \frac{2(m^2-2m+1)d^2}{m^2}\cdot\frac{3md-2(m-1)d}{2m}$$

$$y^3 = \frac{2(m^2-2m+1)d^2}{m^2}\cdot\frac{3md-2md+2d}{2m}$$

$$y^3 = \frac{2(m^2-2m+1)d^2}{m^2}\cdot\frac{md+2d}{2m}$$

$$y^3 = \frac{2(m^2-2m+1)d^2}{m^2}\cdot\frac{d(m+2)}{2m}$$

$$y^2 = \frac{2d^3}{2m^3}\cdot(m^2-2m+1)(m+2)$$

$$y = \frac{d}{m}\sqrt[3]{m^3-2m^2+m+2m^2-4m+2}$$

$$y = \frac{d}{m}\sqrt[3]{m^3-3m+2}$$

$$y = \frac{1}{m}d\sqrt[3]{m^3-(3m-2)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach den Erkl. 232 und 233 für die gesuchten Durchmesser $x$ und $y$:

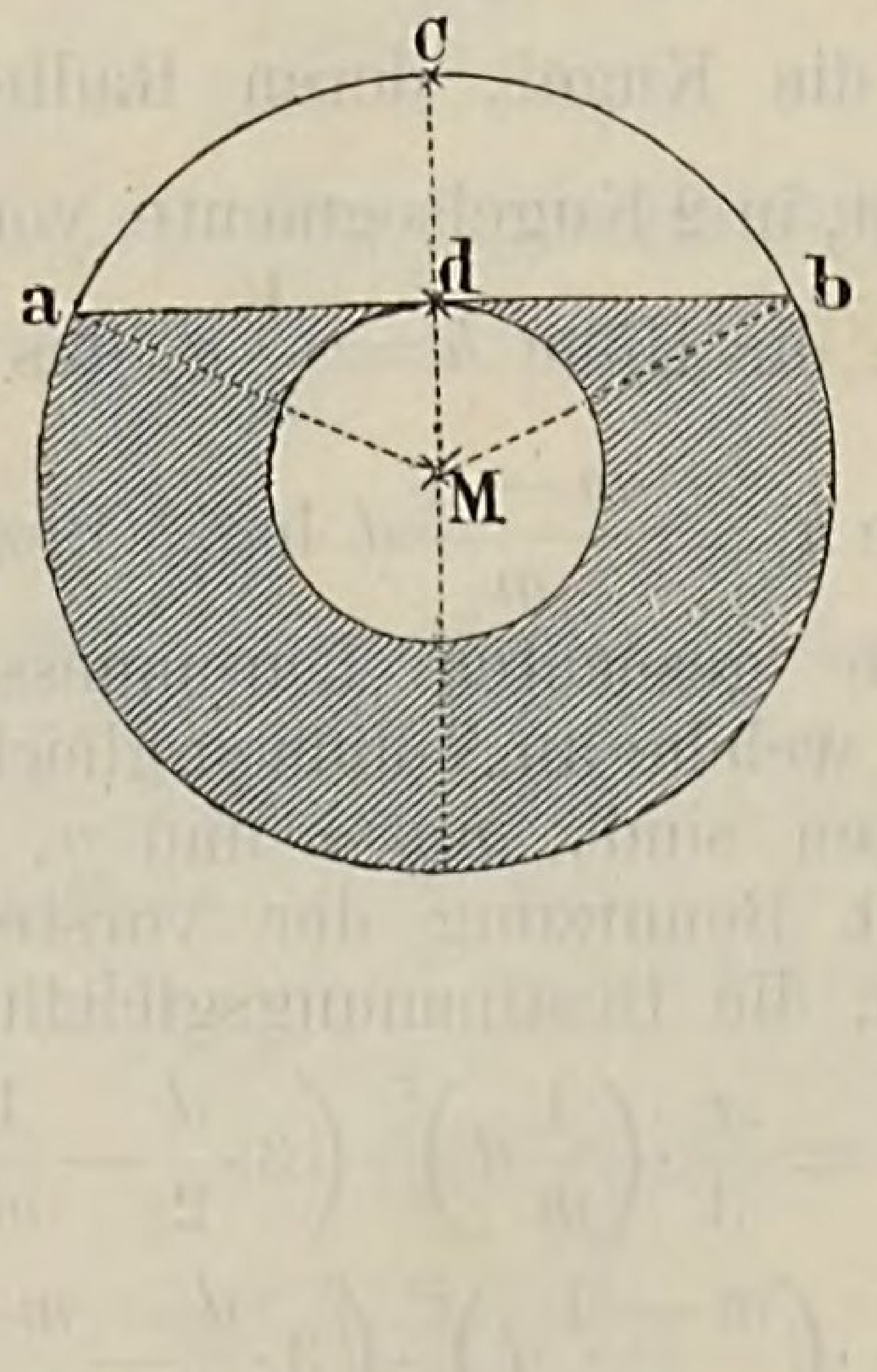
$$\text{A)}\ \ldots\ x = \frac{1}{m}d\sqrt[3]{3m-2}$$

$$\text{B)}\ \ldots\ y = \frac{1}{m}d\sqrt[3]{m^3-(3m-2)}$$

---

**Aufgabe 244.** Durch zwei konzentrische Kugeln, deren Volumina sich wie $m:n = 2:3$ verhalten, wird eine Ebene gelegt, welche die innere (die kleinere) der beiden Kugeln berührt. In welchem Verhältnis steht das Volumen des hierdurch von der grösseren Kugel abgeschnittenen Segments zu dem Volumen der kleineren Kugel?

Figur 58.




**Formeln:**

Für eine Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29)}$$

Für ein Segment:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h) \quad \text{(s. Erkl. 151, S. 78).}$$

**Auflösung.** Ist $ab$, siehe Figur 58, (welche den Durchschnitt einer Hohlkugel, bezw. den Durchschnitt zweier konzentrischen Kugeln darstellt), die gedachte Ebene, welche die innere der beiden konzentrischen Kugeln in $d$ berührt, und bezeichnet man den Radius $Mc$ der grösseren Kugel mit $R$, den Radius $Md$ der kleineren Kugel mit $r$, also die Höhe $cd$ des durch die Ebene $ab$ abgeschnittenen Segments $abc$ mit $R-r$ und das Volumen dieses Segments mit $V$, das der kleineren Kugel mit $V_1$, also das gesuchte Verhältnis mit $V:V_1$, so hat man mit Benutzung der vorsteh. Formeln und gemäss der Aufgabe, die Proportionen:

$$1)\quad \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = m:n$$

$$2)\quad V:V_1 = \frac{\pi(R-r)^2}{3}[3R-(R-r)] : \frac{4}{3}\pi r^3$$

**Erkl. 233a.** Nebenstehende Gleichung:

$$1)\ \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = m : n$$

reduziert, gibt:

$$R^3 : r^3 = m : n$$

$$\sqrt[3]{R^3 : r^3} = \sqrt[3]{m : n} \text{ oder:}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}}$$

**Ekrl. 234.** Nebenstehende Gleichung:

$$2)\ V : V_1 = \frac{\pi(R-r)^2}{3}\Big(3R-(R-r)\Big) : \frac{4}{3}\pi r^3$$

reduziert, gibt:

$$V : V_1 = (R-r)^2(3R - R + r) : 4r^3$$

$$V : V_1 = (R^2 - 2Rr + r^2)(2R + r) : 4r^3$$

$$V : V_1 = (2R^3 - 4R^2r + 2Rr^2 + R^2r - 2Rr^2 + r^3) : 4r^3$$

$$V : V_1 = (2R^3 - 3R^2r + r^3) : 4r^3$$

Werden diese Proportionen reduziert, so erhält man:

$$3) \ldots \frac{R}{r} = \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}} \text{ (s. Erkl. 233a)}$$

$$4 \ldots V : V_1 = (2R^3 - 3R^2r + r^3) : 4r^3$$

(s. Erkl. 234).

Substituiert man nunmehr den sich für $R$ aus Gleich. 3) ergebenden Wert:

$$R = r\cdot\frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}} = r\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$$

in die Gleichung 4), so erhält man:

$$V : V_1 = \left[2\cdot\left(r\sqrt[3]{\frac{m}{n}}\right)^3 - 3\cdot\left(r\sqrt[3]{\frac{m}{n}}\right)^2\cdot r + r^3\right] : 4r^3$$

oder:

$$V : V_1 = \left[2\cdot r^3\cdot\frac{m}{n} - 3r^3\cdot\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}} + r^3\right] : 4r^3$$

und hieraus ergibt sich für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 = \left[\frac{2m}{n} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{m}{n}\right)^2} + 1\right] : 4$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$V : V_1 = \left[\frac{2\cdot 2}{3} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + 1\right] : 4$$

oder:

$$V : V_1 = \left(\frac{4}{3} - 3\sqrt[3]{\frac{4}{9}} + 1\right) : 4$$

$$V : V_1 = 0{,}069 : 4 \text{ oder abgerundet:}$$

$$V : V_1 = 1 : 58.$$

---

**Aufgabe 245.** Durch eine Halbkugel, deren Radius $r$ gegeben, wird parallel ihrer Grundfläche eine Ebene so gelegt, dass sich die hierdurch entstandene Zone zu der entstandenen Calotte wie $m : n$ verhält. Wie gross muss der Radius einer Kugel sein, die mit der von jener Halbkugel abgeschnittenen Kugelschicht (körperlichen Zone) gleiches Volumen hat?

**Formeln:**

Für eine Kugelschicht:

$$\text{I. } V = \pi\left[(H^2 - H_1^2)\cdot r - \frac{1}{3}(H^3 - H_1^3)\right]$$

(s. Erkl. 158, S. 84)

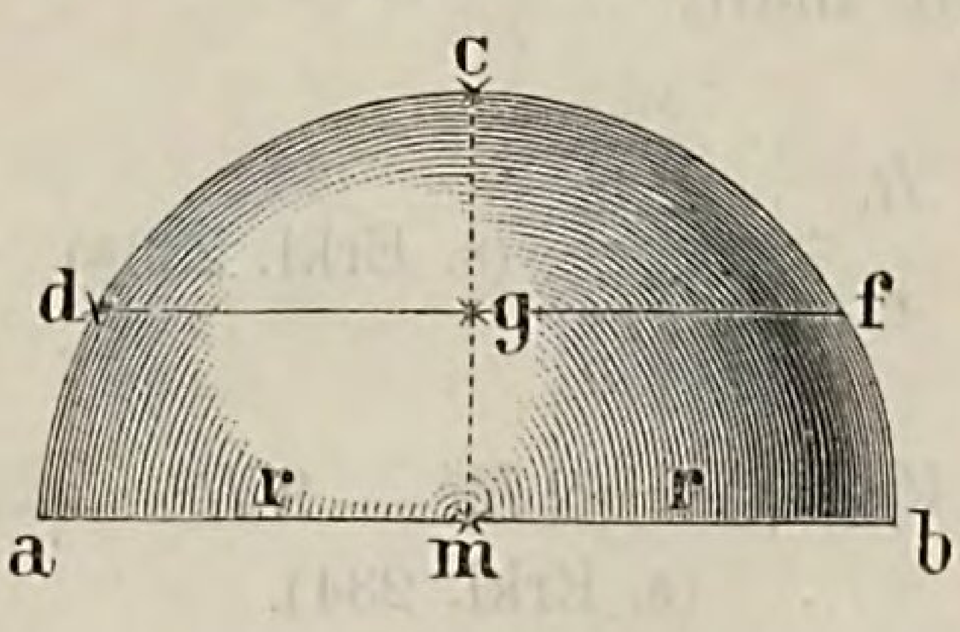
Für eine Kugel:

$$\text{II. } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (s. Erkl. 67, S. 29)}$$

Für eine Zone oder Calotte:

$$\text{III. } J = 2\pi r\cdot h \text{ (s. Erkl. 63, S. 29).}$$

Figur 59.




**Erkl. 235.** Aus nebenstehender Gleichung:

$$2)\ (r-y):y = m:n$$

erhält man:

$$nr - ny = my \text{ oder:}$$
$$my + ny = nr$$
$$y(m+n) = nr, \text{ mithin:}$$
$$y = \frac{nr}{m+n}$$

**Erkl. 236.** Nebenstehende Gleichung 4) reduziert und nach $x$ aufgelöst, erhält man der Reihe nach:

$$\frac{4}{3}x^3 = \left(r^2 - \frac{n^2r^2}{(m+n)^2}\right)r - \frac{1}{3}\left(r^3 - \frac{n^3r^3}{(m+n)^3}\right)$$

$$\frac{4}{3}x^3 = r^3 - \frac{n^2r^3}{(m+n)^2} - \frac{r^3}{3} + \frac{n^3r^3}{3(m+n)^3}$$

$$\frac{4}{3}x^3 = r^3\left(1 - \frac{n^2}{(m+n)^2} - \frac{1}{3} + \frac{n^3}{3(m+n)^3}\right)$$

$$\frac{4}{3}x^3 = r^3\left(\frac{2}{3} - \frac{3n^2(m+n)}{3(m+n)^2} + \frac{n^3}{3(m+n)^3}\right)$$

$$\frac{4}{3}x^3 = r^3\left(\frac{2(m+n)^3 - 3n^2(m+n) + n^3}{3(m+n)^3}\right)$$

$$\frac{4}{3}x^3 = \frac{r^3}{3} \cdot \frac{2(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3) - 3mn^2 - 3n^3 + n^3}{(m+n)^3}$$

$$4x^3 = r^3 \cdot \frac{2m^3 + 6m^2n + 6mn^2 + 2n^3 - 3mn^2 - 2n^3}{(m+n)^3}$$

$$x^3 = \frac{r^3}{4} \cdot \frac{2m^3 + 6m^2n + 3mn^2}{(m+n)^3}$$

$$x^3 = \frac{r^3}{(m+n)^3} \cdot \frac{2m^3 + 3mn(2m+n)}{4} \text{ mithin:}$$

$$x = \frac{r}{m+n}\sqrt[3]{\frac{2m^3 + 3mn(2m+n)}{4}}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Kugelradius mit $x$ und ist $df$, siehe Figur 59, die gedachte Schnittebene, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln I und II, wenn man berücksichtigt, dass in der Formel I für $H = mc = r$ und für $H_1 = gc = y$ (da der Abschnitt $y$ noch unbekannt ist) gesetzt werden muss, die Gleichung:

$$1)\ \ldots\ \frac{4}{3}\pi x^3 = \pi\left[(r^2 - y^2)r - \frac{1}{3}(r^3 - y^3)\right]$$

Da ferner die Höhe $gc$ der Calotte $abc$ mit $y$ bezeichnet wurde, so ist die Höhe $mg$ der Zone $abfd = r - y$ und mit Benutzung der vorsteh. Formel III hat man gemäss der Aufgabe die weitere Gleichung:

$$2\pi r(r-y) : 2\pi ry = m:n \text{ oder:}$$

$$2)\ \ldots\ (r-y):y = m:n$$

Substituiert man den sich für $y$ aus Gleich. 2) ergebenden Wert:

$$3)\ \ldots\ y = \frac{nr}{m+n} \text{ (s. Erkl. 235)}$$

in Gleich. 1), so wird:

$$4)\ \ldots\ \frac{4}{3}\pi x^3 = \pi\left[\left(r^2 - \left(\frac{nr}{m+n}\right)^2\right)r - \frac{1}{3}\left(r^3 - \left(\frac{nr}{m+n}\right)^3\right)\right]$$

und aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 236 für den gesuchten Kugelradius:

$$x = \frac{r}{m+n}\sqrt[3]{\frac{2m^3 + 3mn(2m+n)}{4}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = \frac{r}{3+2}\sqrt[3]{\frac{2\cdot 27 + 3\cdot 3\cdot 2(6+2)}{4}} \text{ od.:}$$

$$x = \frac{r}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{54 + 18\cdot 8}{4}}$$

$$x = \frac{r}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{198}{4}} = \frac{r}{5}\cdot\sqrt[3]{49{,}5}$$

$$x = r\cdot\frac{3{,}6717}{5}, \text{ mithin:}$$

$$x = 0{,}7343\cdot r$$

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 246.** Wird von einem Würfel jede Ecke durch eine Ebene weggeschnitten, welche durch die 3 Mittelpunkte der in den Ecken zusammenstossenden Würfelkanten geht, so bleibt ein von 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper übrig. Wie gross ist die Oberfläche und der Inhalt des entstandenen Körpers, wenn die Kante des Würfels = 1 dm beträgt?

Anmerkung. Weitere Aufgaben über den Würfel (das Hexaeder) findet man in dem folgenden, dem V. Abschnitt.

**Aufgabe 247.** Durch die Mitte einer Seitenkante und die Mitten zweier nicht parallelen aber mit jener zusammenstossenden Grundkanten eines geraden dreiseitigen Prismas, dessen Kanten alle gleich lang, nämlich $= a = 2{,}5$ m sind, wird eine Ebene gelegt. Man gebe die Form der entstandenen Schnittfiguren an und bestimme den Inhalt des durch die Mittelpunkte jener 3 Kanten bestimmten Dreiecks.

**Aufgabe 248.** Durch ein gerades 4-seitiges Prisma mit quadratischer Basis, dessen Grundkante $a = 4$ m und dessen Höhe $H = 9$ m gegeben ist, wird eine Ebene gelegt, welche durch eine Grundkante geht und mit der Grundfläche einen Winkel von $45^0$ bildet. Wie gross sind die Oberflächen der hierdurch entstehenden beiden Prismenstumpfe und in welchem Verhältnis stehen dieselben?

**Aufgabe 249.** Von einer Pyramide, welche durch eine zur Grundfläche parallele Ebene durchschnitten wird, kennt man die Höhe $H$. Welches ist der Inhalt der entstandenen Schnittfigur und welches ist der Inhalt der Grundfläche, wenn man weiss, dass der Inhalt jener Schnittfigur gleich dem Rechteck aus den beiden Höhenabschnitten und der Inhalt der Grundfläche gleich dem Rechteck aus der ganzen Höhe und dem oberen Höhenabschnitt ist?

**Aufgabe 250.** Eine gerade, zehnseitige Pyramide, deren Grundkante $a = 5{,}4$ dm gegeben ist, wird parallel zur Grundfläche so durchschnitten, dass die Schnittebene durch die Mitte der Höhe geht. Welches ist der Inhalt der entstandenen Schnittfigur?

**Aufgabe 251.** Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man den Inhalt $J = 16$ qm einer durch 2 gegenüberstehenden Seitenkanten gelegten Schnittfigur und den Inhalt $J_1 = 24$ qm der Grundfläche. Welches ist die Mantelfläche der Pyramide?

**Aufgabe 252.** Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man den Umfang $U$ der Schnittfigur, welche entsteht, wenn durch die Spitze der Pyramide und eine Diagonale der Grundfläche eine Ebene gelegt wird, und

den Umfang $u$ der Grundfläche. Wie gross ist das Volumen der Pyramide?

**Aufgabe 253.** Das Volumen $V$ einer Pyramide, deren Höhe $H = 0{,}2$ m gegeben ist, beträgt 12 cbm. Welches ist der Inhalt derjenigen Schnittfigur, welche entsteht, wenn durch $^1/_3$ der Höhe eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt wird?

**Aufgabe 254.** Eine Pyramide soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten werden, dass der Inhalt der entstandenen Schnittfigur zum Inhalt der Grundfläche sich wie $m^2 : n^2$ verhält. In welchem Verhältnis stehen alsdann die Volumina der beiden entstandenen Körperteile?

**Aufgabe 255.** Wenn eine durch eine Pyramide parallel zur Grundfläche gelegte Ebene dieselbe im Verhältnis von 1 : 2 teilt, in welchem Verhältnis wird alsdann durch diese Ebene die Höhe geteilt?

**Aufgabe 256.** Man soll eine gerade Pyramide, deren Höhe $H = 5{,}5$ dm misst, durch 2 zur Grundfläche parallele Ebenen in 3 gleiche Teile teilen; in welchem Abstand von der Grundfläche müssen jene 2 Ebenen gelegt werden?

**Aufgabe 257.** Man soll in einer geraden Pyramide, deren Höhe $H = 45$ m und deren Grundfläche $G = 500$ qm misst, durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen ein Stück herausschneiden. dessen Höhe $h = 10$ m und dessen Volumen $V = 230$ qm beträgt. In welchem Abstand von der Grundfläche sind jene Ebenen zu legen?

**Aufgabe 258.** Eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis, deren Höhe $H = 231$ cm misst, wird in der Entfernung $h = 154$ cm von der Spitze mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene durchschnitten. Welches ist die Oberfläche des hierdurch entstandenen Pyramidenstumpfs, wenn der Inhalt der Schnittfigur gleich 56,259 cm beträgt?

**Aufgabe 259.** Von einem geraden Pyramidenstumpf kennt man die Inhalte $G$ und $g$ der Grund- und Deckfläche, sowie die Höhe $H$; in welcher Entfernung von der Grundfläche muss eine zu derselben parallele Ebene gelegt werden, damit die erhaltene Schnittfigur gleich dem geometrischen Mittel jener Flächen $G$ und $g$ ist?

**Aufgabe 260.** Die Höhe eines geraden Pyramidenstumpfs, dessen Grund- und Deckfläche bezw. $= G$ ($= 16$ qm) und $g$ ($= 9$ qm) gegeben sind, soll durch zwei zu diesen Flächen parallele Ebenen in 3 Teile geteilt werden, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3. Wie gross sind diese Teile?

**Aufgabe 261.** Die Endflächen eines geraden Pyramidenstumpfs sind Quadrate mit den Seiten $a$ und $b$. Dieser Stumpf soll durch 3 zur Grundfläche parallelen Schnittebenen in 4 gleiche Teile geteilt werden. In welchem Verhältnis stehen die Höhen der hierdurch erhaltenen Pyramidenstumpfe?

**Aufgabe 262.** Man soll die Dimensionen eines Cylinders berechnen, von dem man die Höhe $H = 2$ m und die Breite $b = 1{,}3$ m einer Schnittfigur kennt, die einer Ebene angehört, welche im Abstande $a = 0{,}8$ m parallel zur Cylinderaxe gelegt wurde?

**Aufgabe 263.** Durch einen geraden Cylinder, dessen Grundflächenradius $r$ und dessen Höhe $H$ gegeben ist, soll im Abstande $\frac{r}{2}$ von der Cylinderaxe und parallel zu dieser eine Ebene gelegt und die Oberflächen der hierdurch entstehenden Körperteile berechnet werden.

**Aufgabe 264.** Von einem geraden Cylinder kennt man den Radius $r$ der Grundfläche und die Höhe $H$. Konstruiert man in einem der Grundkreise dieses Cylinders einen Centriwinkel, z. B. $\alpha = 45^0$ und legt durch die zu diesem Centriwinkel gehörige Sehne eine zu dem betreffenden Grundkreise senkrechte Ebene, so wird gefragt, in welchem Verhältnis stehen alsdann die Teile der Cylindermantelfläche, in welche dieselbe von jener Ebene zerlegt wird?

**Aufgabe 265.** Durch zwei sich unter einem Winkel von $36^0$ schneidenden Durchmesser des Grundkreises eines geraden Cylinders, dessen Grundflächenradius $r$ und Höhe $H$ gegeben sind, sind zwei zur Cylinderachse parallele Ebenen gelegt. Welches sind die Volumina der hierdurch entstandenen Cylindersektoren?

**Andeutung:**
Analog der gelösten Aufgabe 230, S. 122.

**Aufgabe 266.** Ein senkrechter Cylinder, dessen Grundflächenradius $r = 5$ m gegeben ist, wird durch eine zur Grundfläche geneigte Ebene so abgeschnitten, dass die längste Seitenlinie $a$ des abgeschnittenen Cylinders $= 20$ m und die kürzeste Seitenlinie $b$ desselben $= 7$ m ist. Welches ist die Oberfläche und das Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders?

**Andeutung:**
Analog der gelösten Aufgabe 228, S. 119.

**Aufgabe 267.** Ein senkrechter Cylinder, dessen Grundflächenradius $r$ gegeben ist, wird durch 2 parallele, zur Grundfläche geneigte Ebenen so geschnitten, dass die Seitenlinie des zwischen diesen parallelen Ebenen liegenden Cylinderstücks $= a$ wird. Man soll den Teil der Cylindermantelfläche berechnen, welcher zwischen jenen Ebenen liegt.

**Aufgabe 268.** Der Radius der Basis eines geraden Kegels ist $r = 5$ m, die Höhe $H = 9$ m. In der Entfernung $e = 3{,}5$ m von der Spitze wird parallel zur Basis eine Ebene gelegt; wie gross ist der Mantel des erhaltenen Kegelstumpfs?

**Aufgabe 269.** Die Seite eines geraden Kegels ist $s = 36$ dm, der Inhalt seiner Grundfläche beträgt 12 qdm. Wie gross ist der Inhalt der Schnittfigur, welche einer Ebene angehört, die 3 m von der Grundfläche entfernt, durch den Kegel gelegt wird?

**Aufgabe 270.** Die Höhe $H$ eines Kegels ist gegeben, derselbe soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene halbiert werden. In welchem Abstand von der Spitze ist der Schnitt zu führen?

**Aufgabe 271.** Die Höhe $H$ eines Kegels ist gegeben, derselbe soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in 2 Teile geteilt werden, die sich wie $m : n$ verhalten. In welchem Abstand von der Grundfläche ist jener Schnitt zu führen?

**Aufgabe 272.** Die Höhe $H$ eines Kegels und der Radius $r$ dessen Grundkreises ist gegeben. In welchem Abstand von der Spitze muss eine Ebene gelegt werden, damit der an der Spitze liegende Abschnitt des Kegels ein gegebenes Volumen $v$ hat?

**Aufgabe 273.** Die Höhe $H$ eines Kegels und der Radius $r$ dessen Grundkreises ist gegeben. Durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt soll ein Kegel abgeschnitten werden, der $= \frac{m}{n}$ des gegebenen Kegels ist. Welches ist die Grundfläche und die Höhe des abgeschnittenen Kegels?

**Aufgabe 274.** Das Volumen $V$ eines geraden Kegels und der Radius seiner Grundfläche ist gegeben. In welcher Entfernung von der Grundfläche muss eine zu dieser parallele Ebene gelegt werden, damit die erhaltene Schnittfigur gleich der Hälfte der Grundfläche wird?

**Aufgabe 275.** Die Oberfläche $O$ eines geraden Kegels und das Verhältnis von dessen Grundfläche zur Mantelfläche sei $= m : n$ gegeben. Wie gross ist das Volumen des Stumpfs, welchen man erhält, wenn eine zur Grundfläche parallele Ebene so durch den Kegel gelegt wird, dass der Inhalt der entstehenden Schnittfigur gleich der Hälfte des Inhalts der Grundfläche ist?

**Aufgabe 276.** In welcher Entfernung von der Spitze muss ein gerader Kegel, dessen Grundflächenradius $r$ und dessen Höhe $H$ gegeben ist, von einer Ebene durchschnitten werden, damit der Mantel des abgeschnittenen Kegels um $m$ qm kleiner wird, als der Mantel des abgestumpften Kegels?

**Aufgabe 277.** Ein gerader Kegel, dessen Dimensionen $r$ und $H$ gegeben sind, soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in zwei solche Körperteile zerlegt werden, deren Ober-

flächen einander gleich sind. In welcher Entfernung von der Spitze ist der betreff. Schnitt zu führen?

**Aufgabe 278.** Die Dimensionen $r$ und $h$ eines geraden Kegels sind gegeben. Wie gross ist der Inhalt derjenigen Schnittfigur, die man erhält, wenn man eine Ebene durch den Kegel legt, welche die Höhe des Kegels nach dem goldenen Schnitt teilt?

**Andeutung:**

Man sagt: Eine Strecke $s$ ist nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn der grössere Abschnitt $m$ derselben die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und den Rest $(s - m)$ ist, in Zeichen:

$$s : m = m : (s - m)$$

**Aufgabe 279.** Die Seitenlinie $s$ und der Radius $r$ des Grundkreises eines geraden Kegels ist gegeben. Zur Grundfläche soll eine parallele Ebene so durch die Kegel gelegt werden, damit der Mantel des an der Spitze abgeschnittenen Kegels gleich der Grundfläche des gegeb. Kegels ist. In welchem Punkt durchschneidet diese Ebene die gegeb. Seitenlinie $s$?

**Aufgabe 280.** In welcher Entfernung von der Spitze eines geraden Kegels, dessen Höhe $H$ gegeben ist, muss eine Ebene gelegt werden, damit durch dieselbe der Kegelmantel in zwei Teile zerlegt wird, die sich wie $m : n$ verhalten?

**Aufgabe 281.** In einem Abstand $= h$ von einer ebenen Fläche befindet sich ein Punkt; man soll einen solchen geraden Kegel konstruieren, dessen Spitze in jenem Punkte, dessen Grundfläche in dieser Ebene liegt und dessen Seitenlinie zu jenem Abstand $h$ in einem gegeb. Verhältnis $m : n$ steht. Welches ist die Grundfläche und das Volumen des gedachten Kegels?

**Aufgabe 282.** Von einem gleichseitigen Kegel kennt man den Radius $r$ der Grundfläche. Dieser Kegel soll durch 2 der Grundfläche parallele Ebenen so durchschnitten werden, dass:

a) der Mantel und
b) das Volumen

des Kegels in drei gleiche Teile geteilt wird. In welcher Entfernung von der Spitze müssen diese Ebenen gelegt werden?

**Aufgabe 283.** Ein gerader Kegelstumpf, dessen Grundflächenradien $R$ und $r$, bezw. $= 4$ m und 3 m lang sind und dessen Höhe $= 18$ m misst, soll durch eine zur Grundfläche parallele und durch die Mitte der Höhe gehende Ebene geschnitten werden. Wie gross sind die Kubikinhalte der entstandenen Körperteile?

**Aufgabe 284.** Die Radien $R$ und $r$ der Grundflächen und die Höhe $H$ eines geraden Kegelstumpfs sind gegeben. Durch welchen Punkt der Höhe muss eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt werden, damit die Kubikinhalte der entstandenen Körperteile im Verhältnis von $m : n$ stehen?

**Aufgabe 285.** Durch einen geraden Kegelstumpf, dessen Begrenzungskreise die Radien $R$ und $r$ haben und dessen Höhe $= H$ ist, soll

parallel zur Grundfläche eine Ebene so gelegt werden, damit die hierdurch erhaltene Schnittfigur gleich dem arithmetischen Mittel jener Begrenzungskreise ist. In welchem Abstand von der Grundfläche muss diese Ebene gelegt werden und wie gross sind die Mantelflächen der beiden entstehenden Körperteile?

**Aufgabe 286.** Die Dimensionen eines geraden Kegelstumpfs sind gegeben. Dieser Kegel soll durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen in 3 Teile geteilt werden, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3. Welches sind die Radien der entstehenden Schnittfiguren und in welchem Abstand von der Grundfläche müssen diese Ebenen gelegt werden?

**Aufgabe 287.** Eine Kugel, deren Radius $r = 5$ m ist, wird auf einerlei Seite vom Mittelpunkt durch zwei parallele Ebenen so geschnitten, dass die hierdurch entstehenden Schnittkreise die Durchmesser 7 m und 6 m haben. Wie gross ist der Inhalt der Zone und welches ist das Volumen der Schicht, welche durch diese Parallelkreise gebildet werden?

**Aufgabe 288.** Eine Kugel, deren Radius $r = 10{,}25$ m ist, soll durch parallele Ebenen in 4 gleiche Teile geteilt werden. In welchen Abständen müssen diese parallelen Ebenen gelegt werden?

**Aufgabe 289.** Der Radius $r$ einer Kugel ist gegeben, man soll diese Kugel mit einer Ebene so durchschneiden, dass das kleinere der Segmente zu dem zugehörigen Sektor sich wie 2 : 3 verhält. In welchem Abstand vom Mittelpunkt ist jene Ebene zu legen?

**Aufgabe 290.** Welches sind die Volumina und die Oberflächen der Kugelsegmente, welche entstehen, wenn man den gegeb. Radius $r$ einer Kugel stetig teilt und zwar so, dass der grössere Abschnitt am Mittelpunkt der Kugel zu liegen kommt, dann durch den betreff. Teilpunkt eine Ebene senkrecht zu jenem Radius legt?

**Aufgabe 291.** Wie gross ist der Radius einer Kugel, von welcher 2 Parallelkreise, deren Abstände vom Mittelpunkte im Verhältnis von 6 : 5 stehen, bezw. die Radien $\varrho$ und $\varrho_1$ haben?

**Aufgabe 292.** In welchem Abstand von einem Punkte der Oberfläche einer Kugel, deren Radius $r$ gegeben ist, muss eine Ebene gelegt werden, damit die ganze Oberfläche des hierdurch abgeschnittenen Segments gleich $\frac{4}{5}$ der Oberfläche der ganzen Kugel wird?

**Aufgabe 293.** Parallel zur Grundfläche einer Halbkugel, deren Radius $r$ gegeben ist, soll eine Ebene gelegt werden, welche die Halbkugel in zwei solche Körperteile zerlegt, die gleiche Oberfläche haben?

**Aufgabe 294.** Das Volumen $V$ einer Kugel ist gegeben. In welchem Verhältnis teilt die Ebene, deren Schnittfigur den gegebenen Inhalt $J$ hat, den zu ihr senkrechten Radius?

**Aufgabe 295.** Man soll durch eine Kugel, deren Radius $r$ gegeben ist, eine Ebene so legen, dass die Oberfläche der Kugel in 2 solche Teile geteilt wird, die sich wie $m:n$ verhalten. Welches sind die Volumina der durch diese Ebene abgeschnittenen Kugelsegmente?

**Aufgabe 296.** Von einer Kugel mit dem gegeb. Radius $r$ soll man mittelst einer Ebene ein Segment so abschneiden, dass der Inhalt der zu diesem Segment gehörigen Haube gleich dem Inhalt eines grössten Kreises der Kugel wird. Welches ist das Volumen jenes Segments?

**Aufgabe 297.** Durch zwei parallele Ebenen, deren Abstand $= a$ gegeben ist, soll eine Kugel mit gegeb. Radius $r$ so geschnitten werden, dass die hierdurch entstehende Kugelschicht $= \frac{1}{m}$ des Volumens der ganzen Kugel enthält. In welchen Abständen vom Mittelpunkt sind diese parallelen Ebenen zu legen?

**Aufgabe 298.** Die Wanddicke $w$ einer Hohlkugel ist gegeben. Durch diese Hohlkugel wird eine Ebene gelegt, welche die innere Fläche der Hohlkugel berührt und deren Schnittfigur ein Kreis mit gegebenem Radius $\varrho$ ist. Welches ist das Volumen des inneren hohlen Raumes der Hohlkugel?

**Aufgabe 299.** Eine Hohlkugel, deren Volumen zu dem Volumen des inneren hohlen Raumes, dessen Radius $r$ gegeben ist, in dem Verhältnis $1:2$ stehen soll, wird durch eine Ebene geschnitten, welche die innere Fläche der Hohlkugel berührt. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Körperteile, in welche hierdurch die Hohlkugel gelegt wird?

**Aufgabe 300.** Teilt man den Durchmesser $D$ einer Kugel in 2 Teile, welche sich wie $1:3$ verhalten und legt durch den Teilpunkt eine Ebene senkrecht zu diesem Durchmesser, so wird hierdurch die Kugel in 2 Segmente zerlegt. In welchem Verhältnis stehen die Mäntel der gleichseitigen Kegel zu einander, die mit jenen zwei Kugelsegmenten gleiche Volumen haben?

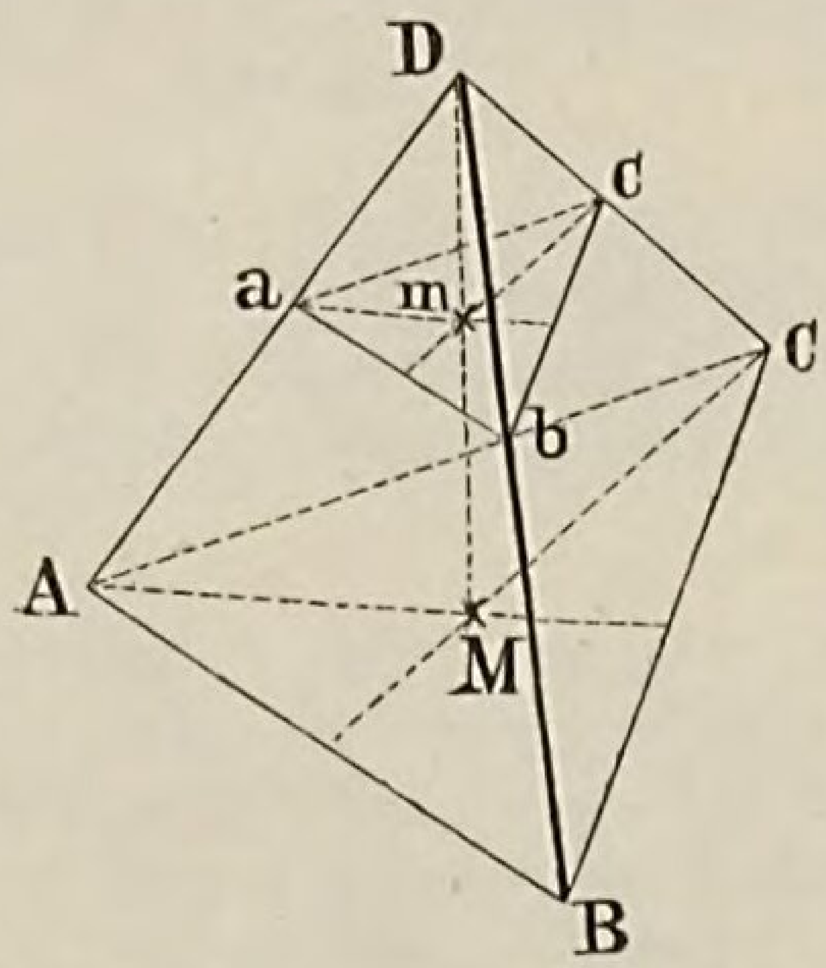
# V.

# Aufgaben über die fünf konvexen regulären Polyeder in ihrer Verbindung mit Schnittebenen.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 301.** Der Radius $R$ des Kreises, welcher um eine Seitenfläche eines regulären Tetraeders beschrieben werden kann, ist gegeben. In welcher Entfernung von der jener Seitenfläche gegenüberliegenden Spitze muss eine zu dieser Seitenfläche parallele Ebene gelegt werden, damit sie den Tetraeder in 2 gleiche Teile zerlegt?

Figur 60.




**Erkl. 237.** Legt man durch ein reguläres Tetraeder, parallel zu einer Seitenfläche desselben, eine beliebige Ebene, so schneidet diese Ebene wiederum ein reguläres Tetraeder ab. (Beweis leicht, siehe das 1. Buch der Stereometrie, speziell den Abschnitt, welcher über die regul. Polyeder handelt).

**Erkl. 238.** Nach der in der Erkl. 92, S. 46 gegebenen Definition ähnlicher Pyramiden, sind alle regulären Tetraeder unter sich ähnlich, mithin verhalten sich nach der Erkl. 98, S. 48, ihre Volumina wie die Kuben ihrer Kanten oder auch wie die Kuben ihrer Höhen.

**Erkl. 239.** Nebenstehende Gleichung:

$$V : \frac{1}{2} V = y^3 : x^3$$

reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2 : 1 = y^3 : x^3$$

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

oder:

$$x = y \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 60, $abc$ die gedachte zur Seitenfläche $ABC$ parallele Ebene, so ist nach der Erklärung 237 der abgeschnittene Körperteil $abcD$ ebenfalls ein reguläres Tetraeder.

Da nun der Aufgabe gemäss das abgeschnittene Tetraeder halb so gross sein soll, als das ganze, so hat man, wenn die Höhe $DM$ des ursprünglichen Tetraeders mit $y$, dessen Volumen mit $V$, die Höhe $Dm$ des abgeschnittenen Tetraeders, d. i. die gesuchte Entfernung, mit $x$ bezeichnet wird, nach der Erkl. 238, die Gleichung:

$$V : \frac{1}{2} V = y^3 : x^3$$

oder:

$$1) \quad . \; . \; x = y \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad \text{(s. Erkl. 239)}$$

Die Höhe $y$ des gegeb. Tetraeders findet man mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes aus dem bei $M$ rechtwinkligen Dreieck $AMD$. Man erhält:

$$a) \quad \overline{MD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AM}^2$$

Da nun: $MD = y$,

$AM = R$, nämlich gleich dem gegebenen Radius des der Seitenfläche $ABC$ umschriebenen Kreises ist, und da ferner:

$$AD = AB = \frac{3R}{\sqrt{3}} \quad \text{(s. Erkl. 240)}$$

gesetzt werden kann, so geht die Gleich. a) über in:

$$y^2 = \left(\frac{3R}{\sqrt{3}}\right)^2 - R^2$$

**Erkl. 240.** Nach der Erkl. 109, S. 53, besteht zwischen der Seite $a$ eines gleichseitigen Dreiecks und dem Radius $R$ des demselben umschriebenen Kreises, die Relation:

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Ist demnach, siehe Figur 60, $k$ die Seite des gleichseitigen Dreiecks $ABC$, bezw. die Kante des regul. Tetraeders, so hat man zwischen der Seite $k$ dieses Dreiecks $ABC$ und dem Radius $R$ des demselben umschriebenen Kreises, die Relation:

$$R = \frac{k}{3}\sqrt{3}$$

und hieraus erhält man:

$$k = \frac{3R}{\sqrt{3}}$$

und hieraus erhält man:

$$y = \sqrt{\frac{9R^2}{3} - R^2} \text{ oder:}$$

$$y = \sqrt{\frac{9R^2 - 3R^2}{3}} = \sqrt{\frac{6R^2}{3}}$$

mithin:

2) . . $y = R\sqrt{2}$

Aus den Gleich. 1) und 2) ergibt sich schliesslich für die gesuchte Entfernung $x$:

$$x = R\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ oder:}$$

$$x = R\sqrt[2.3]{2^3} \cdot \sqrt[3.2]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$x = R\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{4}} = R\sqrt[6]{\frac{8}{4}}$$

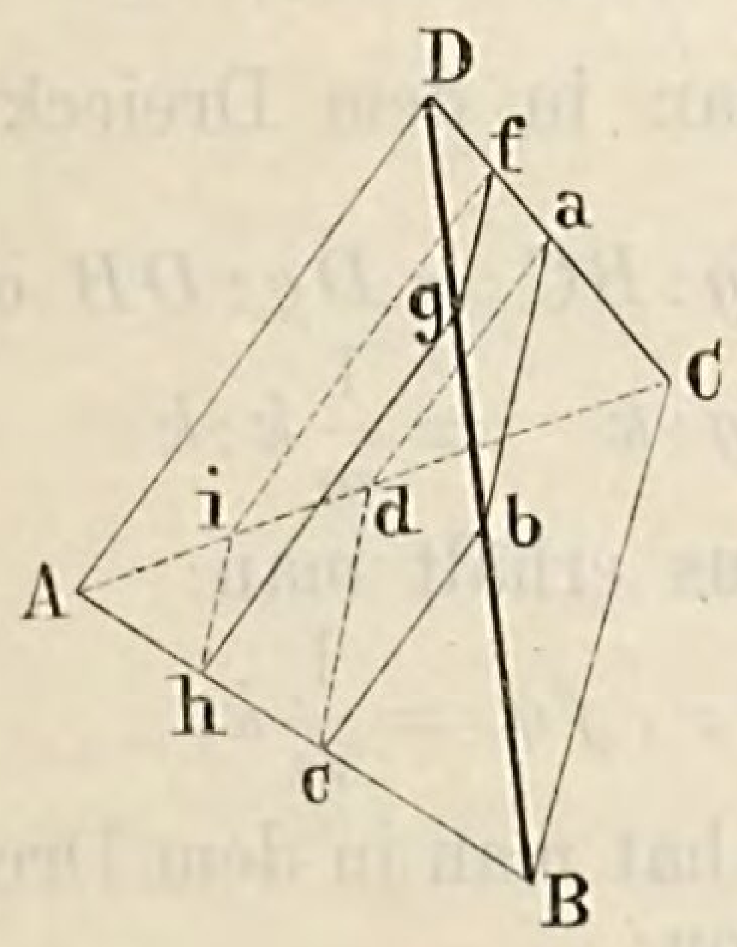
mithin:

$$x = R \cdot \sqrt[6]{2}$$

---

**Aufgabe 302.** Man soll untersuchen, ob durch die Halbierungspunkte von 4 Kanten eines regul. Tetraeders, welche mit den Endpunkten einer fünften Kante zusammenstossen, eine Ebene gelegt werden kann. Ist dies möglich, so soll man parallel zu dieser Ebene eine zweite Ebene beliebig legen und den Umfang der hierdurch entstehenden Schnittfigur bestimmen?

Figur 61.




**Erkl. 241.** Die Lage einer Ebene ist bestimmt:
a) durch drei Punkte,
b) durch zwei sich schneidende Geraden,
c) durch zwei parallele Geraden.

Man siehe die 1. Abteilung des Lehrbuchs der Stereometrie von Dr. Kleyer.

**Auflösung.** Sind, siehe Figur 61, $a$, $b$, $c$ und $d$ die Halbierungspunkte der 4 Kanten $DC$, $DB$, $AB$ und $AC$, welche in den Endpunkten $D$ und $A$ einer 5. Kante $AD$ zusammenstossen und man soll durch diese 4 Punkte eine Ebene legen, so muss zunächst bewiesen werden, dass durch diese 4 Punkte die Lage einer Ebene bestimmt ist (siehe Erkl. 241) und dies geschieht wie folgt.

Bezeichnet man die Kante des Tetraeders mit $k$ und berücksichtigt man den in der Erkl. 242 ausgesprochenen Satz, so findet man, dass z. B. in dem Dreieck $BCD$

$$ab \parallel BC \text{ und } = \frac{BC}{2}\left(= \frac{k}{2}\right)$$

dass ferner in dem Dreieck $BCA$

$$cd \parallel BC \text{ und } = \frac{BC}{2}\left(= \frac{k}{2}\right)$$

und dass hiernach

**Erkl. 242.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man die Mitten $a$ und $b$, (siehe Figur 61) zweier Seiten eines Dreiecks $BCD$, so ist diese Verbindungslinie $(ab)$ parallel und halb so gross als die dritte Dreiecksseite $BC$, in Zeichen:

$$ab \# \frac{BC}{2}$$

**Erkl. 243.** Sind in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist dies Viereck ein Parallelogramm.

$$ab \# cd \left(\text{und} = \frac{k}{2}\right) \text{ ist.}$$

Da nach der Erkl. 241 durch 2 parallele Gerade die Lage einer Ebene bestimmt und $ab \parallel cd$ ist, so müssen die 4 Punkte $a$, $b$, $c$ und $d$ in einer Ebene liegen; da ferner auch noch

$$ab = cd \left(= \frac{k}{2}\right)$$ ist, so muss das Viereck $abcd$ ein Parallelogramm sein (s. Erkl. 243) und da schliesslich ebenso

$$bc = ad \left(= \frac{k}{2}\right)$$ ist, so muss das $\parallel$gr $abcd$ **ein Quadrat** sein, dessen Umfang $U = 4 \cdot \frac{k}{2} = 2k$ beträgt.

---

Ist, siehe Figur 61, $fghi$ die Durchschnittsfigur einer beliebigen zu $abcd$ parallelen Ebene, so ist dieselbe ein Parallelogramm, da

$$fg \parallel ab$$
$$ih \parallel dc, \text{ folglich } fg \parallel ih \text{ u. s. f.}$$

ist. Zur Berechnung des gesuchten Umfangs $x$ dieser Durchschnittsfigur $fghi$, hat man zunächst:

$$1) \ldots x = 2 \cdot (fg + hg)$$

Nimmt man nun an, dass die Ebene $fghi$ z. B. eine solche Lage habe, dass sie eine Kante $k$ des Tetraeders, z. B. die Kante $DB$ so schneide, dass der an der Spitze $D$ liegende Abschnitt $Dg = \frac{1}{m}$ der Kante $DB$, also $= \frac{1}{m} k$ ist, so hat man in dem Dreieck $DBC$ die Relation:

$$fg : BC = Dg : DB \text{ oder:}$$
$$fg : k = \frac{1}{m} k : k$$

und hieraus erhält man:

$$2) \ldots fg = \frac{1}{m} k$$

Ferner hat man in dem Dreieck $BAD$ die Relation:

$$hg : AD = Bg : BD \text{ oder:}$$
$$hg : k = \frac{m-1}{m} k : k$$

und hieraus erhält man:

$$3) \ldots hg = \frac{m-1}{m} k$$

Aus den Gleich. 1), 2) und 3) erhält man für den gesuchten Umfang $x$:

$$x = 2 \cdot \left(\frac{1}{m} k + \frac{m-1}{m} k\right) \text{ oder:}$$

$$x = 2k \cdot \frac{1+m-1}{m} \text{ oder:}$$

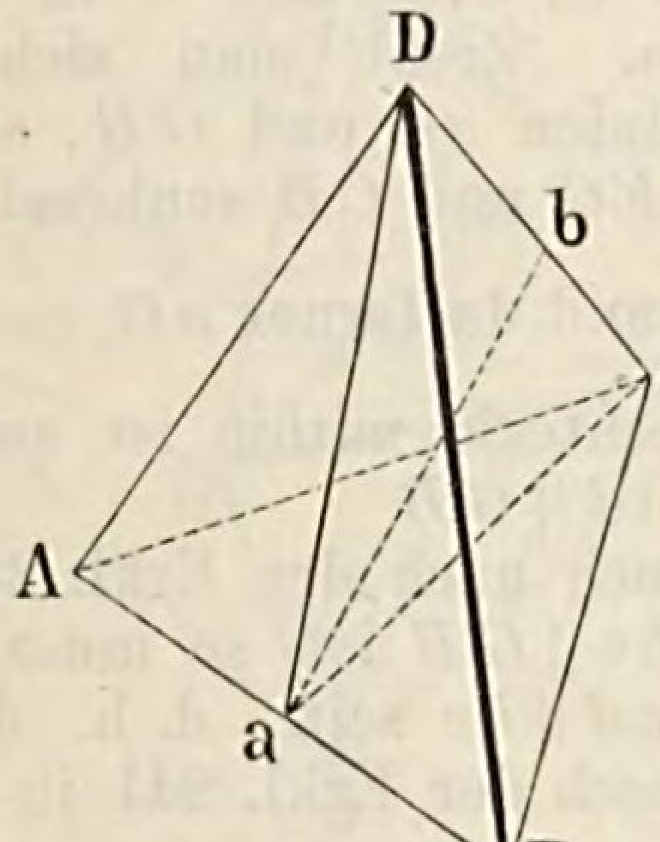
$$x = 2k^{*})$$

*) Es ist also hiernach in Betreff des Umfangs der Schnittfigur ganz gleich, in welchem Verhältnis die zu $abcd$ parallele Ebene die Kanten des Tetraeders schneidet, indem der Umfang einer jeden zu $abcd$ parallelen Schnittfigur $= 2k$ beträgt.

---

**Aufgabe 303.** Durch ein reguläres Tetraeder, dessen Kante $k$ gegeben ist, wird eine Ebene gelegt, die durch eine Kante und den Mittelpunkt der derselben gegenüberliegenden Kante geht. Welches ist der Inhalt der somit erhaltenen Schnittfigur?

Figur 62.




**Auflösung.** Legt man, siehe Fig. 62, z. B. durch die Kante $DC$ und die Mitte $a$ der dieser Kante gegenüberliegenden Kante $AB$ eine Ebene, so ist deren Schnittfigur $DCa$ ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie $DC$ gleich der Kante $k$ des Tetraeders und dessen Schenkel $aD$ (oder $aC$) gleich der Höhe eines der das Tetraeder begrenzenden gleichseitigen Dreiecke, also nach der Erkl. 11, S. 5 $= \frac{k}{2}\sqrt{3}$ ist.

Für den gesuchten Inhalt $x$ der Schnittfigur $DCa$ hat man somit:

$$x = \frac{DC \cdot ab}{2}$$

oder:

$$x = \frac{DC \cdot \sqrt{\overline{aD}^2 - \overline{Db}^2}}{2}$$

$$x = \frac{k \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}}{2}$$

$$x = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{3k^2}{4} - \frac{k^2}{4}} = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{2k^2}{4}}$$

mithin:

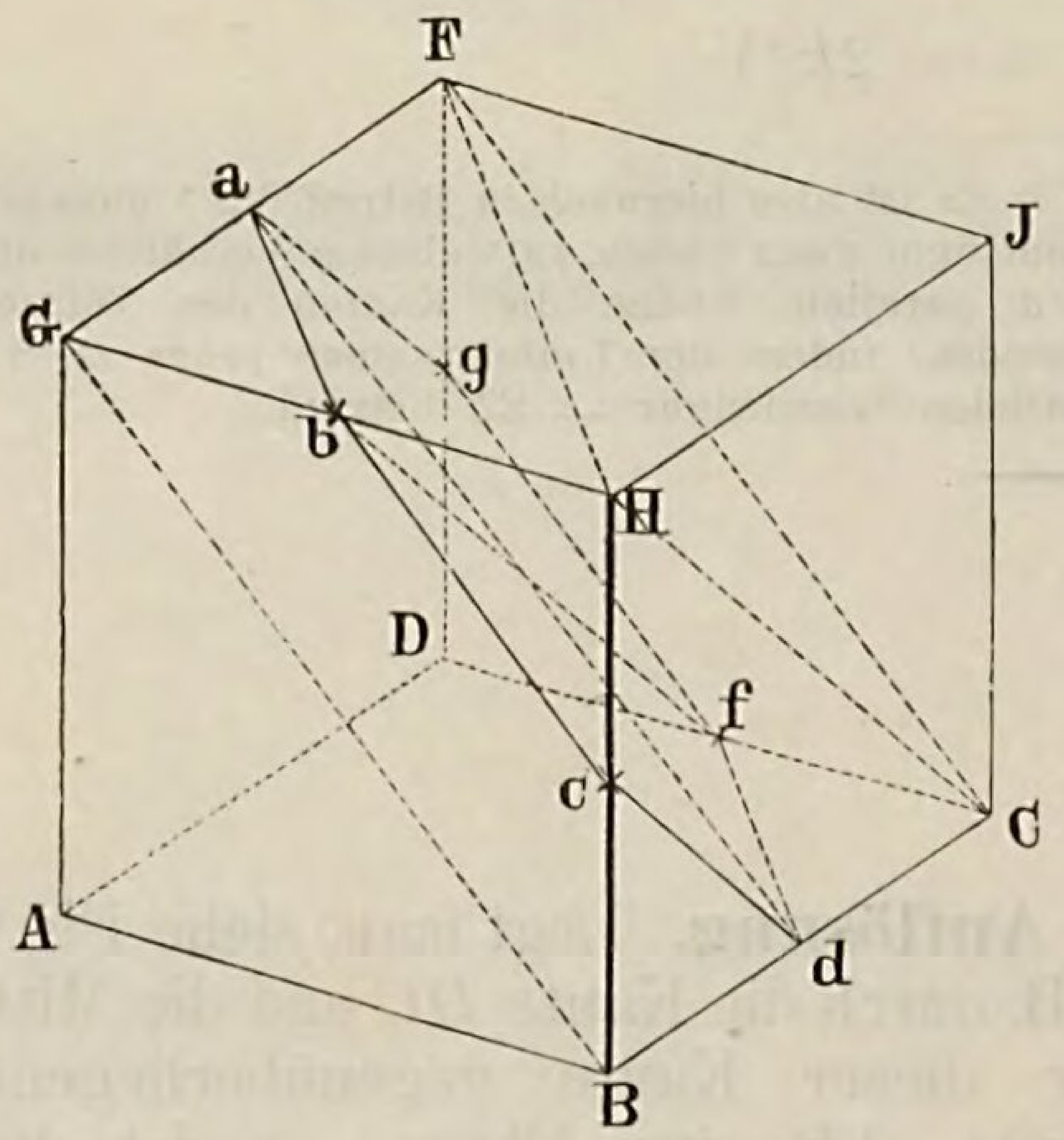
$$x = \frac{k^2}{4}\sqrt{2}$$

---

**Aufgabe 304.** Man bezeichne zwei entgegengesetzte Ecken eines regulären Hexaeders und halbiere diejenigen Kanten,

welche nicht durch die bezeichneten Ecken gehen. Es ist zu beweisen, dass diese Halbierungspunkte die Ecken eines regul. Sechsecks bilden.

Figur 63.




**Erkl. 244.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Antiparallelogramm (d. i. ein ∥tr, in welchem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind) sind die Winkel, welche an einer der parallelen Seiten liegen, bezw. einander gleich.“

**Auflösung.** Wählt man in dem durch die Figur 63 dargestellten regul. Hexaeder die zwei gegenüberstehenden Ecken $A$ und $J$ und verbindet die Mitten $a$, $b$, $c$, $d$, $f$ und $g$ der Kanten, welche nicht an diesen Ecken anstossen, so ist die erhaltene Figur $abcdfg$ ein **reguläres Sechseck**, was wie folgt bewiesen werden kann. Der Beweis zerfällt in drei Teile, es muss nämlich 1) bewiesen werden, dass die 6 Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, $f$ und $g$ überhaupt in einer Ebene liegen, dann muss 2) bewiesen werden, dass die Polygonseiten $ab$, $bc$, $cd$, $df$, $fg$ und $ga$ einander gleich sind und 3) muss bewiesen werden, dass die Polygonwinkel $\sphericalangle abc$, $\sphericalangle bcd$, $\sphericalangle cdf$ u. s. f. ebenfalls einander gleich sind.

**Beweis des 1. Teils.** Um zu beweisen, dass die Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, $f$ und $g$ in einer Ebene liegen, beweise man zunächst, dass 4 dieser Punkte, z. B. $a$, $b$, $c$ und $d$ in einer Ebene liegen müssen. Zieht man sich zu diesem Zwecke die Linien $ad$ und $GB$, so ist, da die Seitenkanten $FG$ und $CB$ senkrecht zur Fläche $ABHG$ sind und da ferner $aG = dB = \frac{k}{2}$ ist, $adBG$ ein Rechteck, mithin ist auch:

$$ad \parallel GB$$

Da aber auch nach der Erkl. 242

$bc \parallel GB$ ist, so muss auch

$ad \parallel bc$ sein, d. h. die 4 Punkte $abcd$ liegen nach der Erkl. 241 in einer Ebene.

Auf dieselbe Weise kann dargethan werden, dass 4 andere jener 6 Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, $f$ und $g$ in einer Ebene liegen und hieraus ergibt sich, da die Lage einer Ebene nur durch 3 Punkte bestimmt ist, dass die 6 in Rede stehenden Punkte in einer Ebene liegen.

**Beweis des 2. Teils.** Um zu beweisen, dass die Strecken $ab$, $bc$, $cd$, ⋯ einander gleich sind, denke man sich die Flächendiagonalen $FH$, $GB$, $HC$, ⋯ gezogen, da nun diese Diagonalen als kongruenten Quadraten angehörend, alle gleich sind und nach der Erkl. 242 jede der Strecken $ab$, $bc$, ⋯ gleich der Hälfte jener Diagonalen sind, so folgt hieraus, dass die Strecken $ab$, $bc$, $cd$, ⋯ einander gleich sein müssen.

**Beweis des 3. Teils.** Um zu beweisen, dass die Polygonwinkel $abc$, $bcd$, $cdf$, ⋯ einander gleich sind, beachte man, dass z. B. in dem Viereck $abcd$ die Seiten $bc$ und $ad$ parallel, die Seiten $ab$ und $cd$ aber gleich sind, dass so-

mit das Viereck $abcd$ (ebenso das Viereck $bcdf$) ein Antiparallelogramm ist und dass folglich nach der Erkl. 244 die Winkel $abc$ und $bcd$ einander gleich sind. Ebenso wird bewiesen, dass die Winkel $bcd$ u. $cdf$ gleich sind, u. s. f.

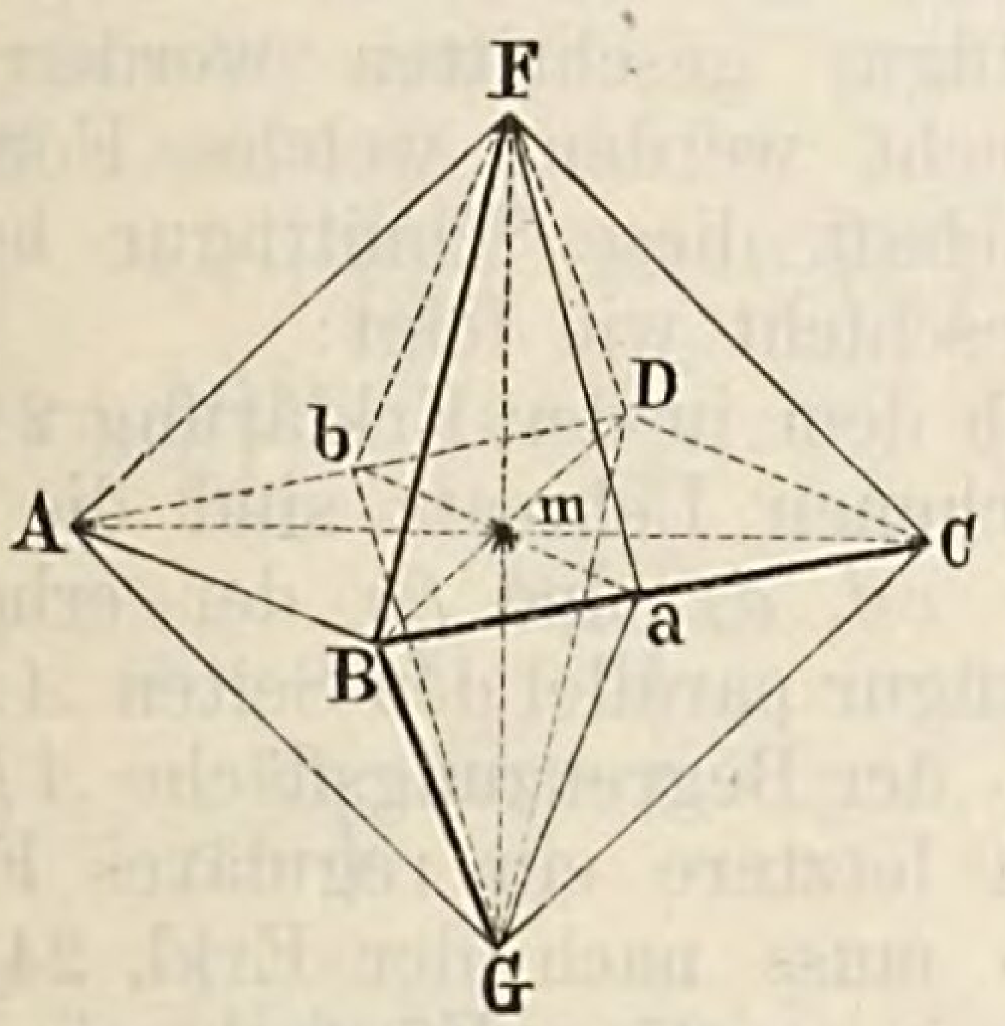
---

**Anmerkung.** Weitere Aufgaben über das reguläre Hexaeder (den Würfel) sind in dem vorhergehenden, dem IV. Abschnitt enthalten.

---

**Aufgabe 305.** Durch die Endpunkte einer Körperdiagonale und die Mitte einer Kante eines regulären Oktaeders soll man eine Ebene legen. Wie gross ist der Inhalt der somit entstandenen Schnittfigur, wenn die Kante $k$ des Oktaeders gegeben ist; und in welchem Verhältnis steht der Inhalt jener Schnittfigur zu dem Inhalt einer Begrenzungsfläche des Oktaeders?

Figur 64.




**Erkl. 245.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Jede durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gezogene Linie wird durch denselben halbiert."

Aus diesem Lehrsatz und weil in Figur 64 $ba \parallel AB$ ist, folgt die Gleichung:

$$mb = \frac{AB}{2} = \frac{k}{2}$$

**Erkl. 246.** Aus dem bei $A$ rechtwinkligen Dreieck $GAF$, siehe Figur 64, ergibt sich:

$$\overline{GF}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AF}^2$$

oder, da $AG$ und $AF$ gleich der Kante $k$ des Oktaeders sind:

$$\overline{GF}^2 = k^2 + k^2$$

und hieraus erhält man:

$$GF = \sqrt{2k^2} \text{ oder:}$$

$$GF = k\sqrt{2}$$

**Auflösung.** Legt man, siehe Fig. 64, durch die Endpunkte $F$ und $G$ der Körperdiagonale $FG$ und z. B. durch die Mitte $a$ der Kante $BC$ die gedachte Ebene, so schneidet diese Ebene die Kante $AD$ ebenfalls in der Mitte derselben und man erhält als Schnittfigur die Raute $GaFb$. Da der gesuchte Inhalt $x$ der Schnittfigur $GaFb$ aus der Summe der Inhalte der zwei kongruenten Dreiecke $GaF$ und $FbG$ besteht, so hat man die Relation:

$$1) \ldots x = 2 \cdot \frac{GF \cdot mb}{2}$$

Da nun nach der Erkl. 245

$$mb = \frac{k}{2}$$

und nach der Erkl. 246:

$$GF = k\sqrt{2}$$

ist, so geht die Gleich. 1) über in:

$$x = 2 \cdot \frac{k\sqrt{2} \cdot \frac{k}{2}}{2}$$

und hieraus erhält man für den gesuchten Inhalt $x$:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{k^2}{2}\sqrt{2}$$

---

Bezeichnet man ferner den Inhalt der Schnittfigur $GaFb$ mit $S$, den einer Begrenzungsfläche mit $B$, so hat man nach vorsteh. Gleich. A) und nach der Erkl. 11, S. 5 für das gesuchte Verhältnis dieser Inhalte, die Proportion:

$$S:B = \frac{k^2}{2}\sqrt{2} : \frac{k^2}{4}\sqrt{3}$$

und hieraus erhält man:

$$S:B = 2\sqrt{2} : \sqrt{3} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} : (\sqrt{3})^2$$

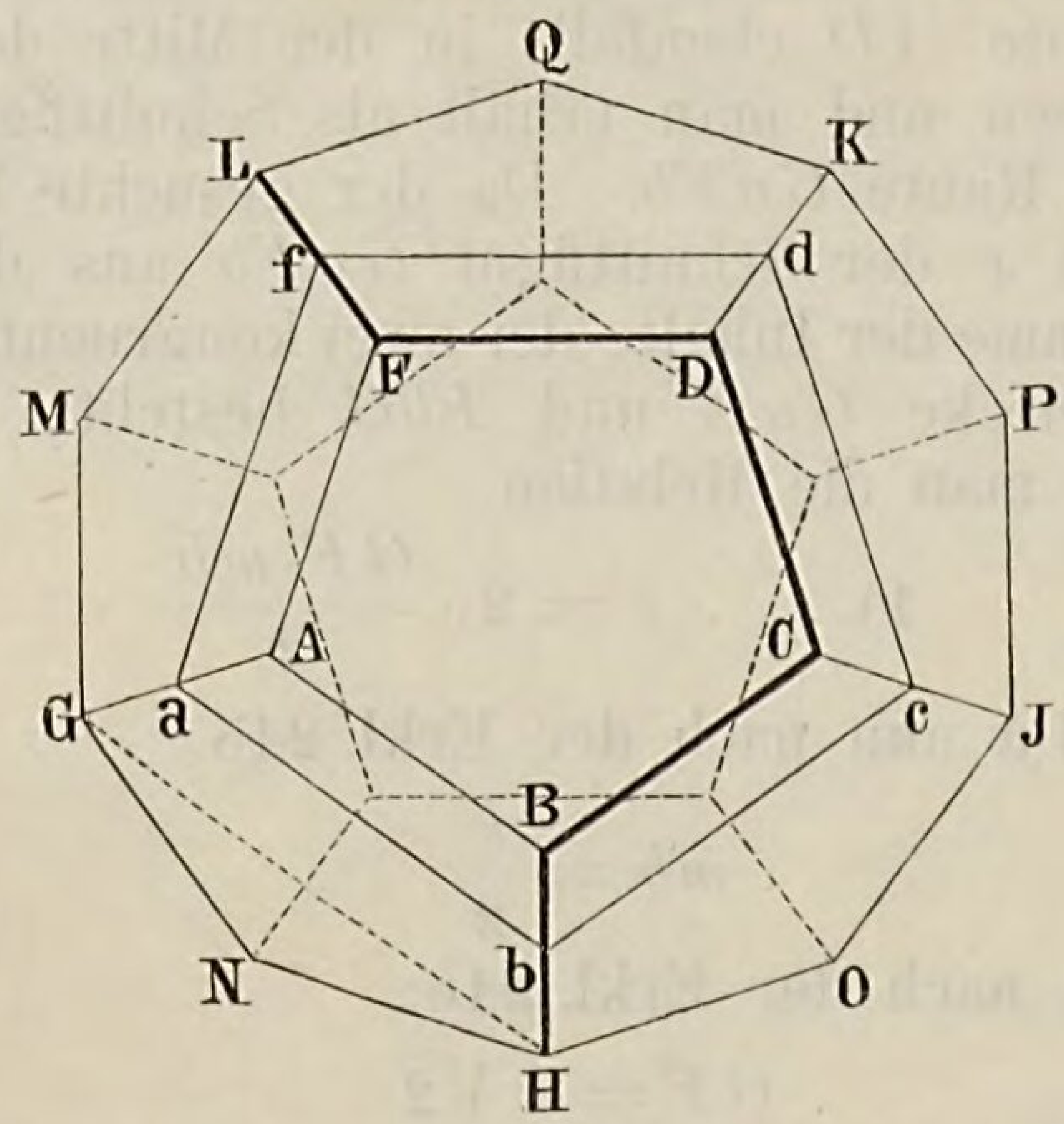
oder:

$$\text{B)} \ldots S:B = 2\sqrt{6} : 3$$

---

**Aufgabe 306.** Legt man durch die Mitte einer Kante eines regulären Dodekaeders eine Ebene parallel zu einer der dieser Kante anstossenden Begrenzungsflächen, so halbiert diese Ebene alle die Kanten, welche von den Ecken jener Begrenzungsflächen ausgehen und ist die erhaltene Schnittfigur ein regul. Fünfeck. Wie gross ist der Inhalt einer solchen Schnittfigur, wenn die Kante $k$ des Dodekaeders gegeben ist?

Figur 65.




**Erkl. 247.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel."

Da in Figur 65 die durch $a$ zu $ABCDF$ parallel gelegte Ebene und auch letztere selbst z. B. von der Seitenfläche $ABHNG$ durchschnitten wird, so sind nach vorsteh. Lehrsatz die Durchschnittslinien $AB$ und $ab$ parallel.

**Erkl. 248.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zwei Figuren sind unter anderm ähnlich, wenn die Seiten der einen parallel sind den Seiten der andern.

**Erkl. 249.** Da z. B. siehe Figur 65, die Winkel $GAB$ und $HBA$ als Polygonwinkel eines regulären Fünfecks einander gleich sind und

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 65, $abcdf$ die Schnittfigur, welche man erhält, indem z. B. durch die Mitte $a$ der Kante $AG$ eine Ebene parallel zur Begrenzungsfläche $ABCDF$ gelegt wird, so muss, ehe zur Berechnung dieser Schnittfigur geschritten werden kann, untersucht werden, welche Form und Eigenschaft diese Schnittfigur hat und dies geschieht wie folgt:

Nach dem in der Erklärung 247 ausgesprochenen Lehrsatz sind die Seiten $ab$, $bc$, $cd$, $df$ und $fa$ der erhaltenen Schnittfigur parallel den Seiten $AB$, $BC$, $CD \cdots$ der Begrenzungsfläche $ABCDF$ und da letztere ein reguläres Fünfeck ist, so muss nach der Erkl. 248 auch erstere ein reguläres Fünfeck sein, dessen Ecken nach der Erkl. 249 in den Mitten der Kanten liegen, die durch die gedachte Ebene durchschnitten werden.

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts $x$ des regulären Fünfecks $abcdf$ muss man zunächst dessen Seite z. B. $ab$ in die gegebene Kante $k$ des Dodekaeders ausdrücken. Verbindet man zu diesem Zwecke $G$ und $H$, so erhält man das $\|$tr $ABHG$, dessen Mittellinie $ab$ ist. Nach der Erkl. 251 ist somit:

$$ab = \frac{AB + GH}{2}$$

oder, da $AB = k$ und $GH$ als Diagonale eines regulären Fünfecks $= \frac{k}{2}\cdot(1+\sqrt{5})$ (s. Erkl. 252) gesetzt werden kann:

da ferner $ab \parallel AB$ ist, so muss nach der Erklärung 250 das Paralleltrapez $ABba$ ein Antiparallelogramm, d. h. es muss $Aa = Bb$ sein, oder da

$$Aa = \frac{k}{2}, \text{ so muss auch}$$

$$Bb = \frac{k}{2} \text{ u. s. f. sein.}$$

**Erkl. 250.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Antiparallelogramm sind die Winkel, die an einer der parallelen Seiten liegen, bezw. einander gleich."

**Erkl. 251.** In jedem ∥tr ist die Verbindungslinie der Mitten der zwei nicht parallelen Seiten, die sogenannte Mittellinie, gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten.

**Erkl. 252.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Seite $s_5$ eines regulären Fünfecks ist gleich dem grösseren Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Diagonale $d$ desselben; in Zeichen:

$$d : s_5 = s_5 : (d - s_5)$$

Hieraus erhält man:

$$d^2 - s_5 d = s_5^2$$

$$d^2 - s_5 d + \left(\frac{s_5}{2}\right)^2 = s_5^2 + \left(\frac{s_5}{2}\right)^2$$

$$\left(d - \frac{s_5}{2}\right)^2 = s_5^2 + \frac{s_5^2}{4}$$

$$d - \frac{s_5}{2} = \pm\sqrt{\frac{4s_5^2 + s_5^2}{4}}$$

$$d = \frac{s_5}{2} \pm \sqrt{\frac{5s_5^2}{4}}$$

$$d = \frac{s_5}{2} + \frac{s_5}{2}\sqrt{5}$$

$$d = \frac{s_5}{2}(1 + \sqrt{5})$$

**Erkl. 253.** Die Formel zur Berechnung des Inhalts $J_5$ eines regulären Fünfecks, dessen Seite mit $s$ bezeichnet wird, ist:

$$J_5 = \frac{s^2}{4}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

Man siehe den Abschnitt der Planimetrie, welcher über die regulären Polygone handelt.

Diese Formel ist auch in dem Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über das reguläre Dodekaeder handelt, entwickelt.

**Erkl. 254.** Nebenstehende Gleichung:

$$x = \frac{\left(\frac{k}{4}(3 + \sqrt{5})\right)^2}{4} \cdot \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

reduziert gibt der Reihe nach:

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{k^2}{16}(9 + 6\sqrt{5} + 5) \cdot \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

$$ab = \frac{k + \frac{k}{2}(1 + \sqrt{5})}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$ab = \frac{k}{2} + \frac{k}{4}(1 + \sqrt{5}) =$$

$$\frac{2k}{4} + \frac{k}{4}(1 + \sqrt{5})$$

$$ab = \frac{k}{4}(2 + 1 + \sqrt{5}) \text{ oder:}$$

$$1) \;.\;.\;.\; ab = \frac{k}{4}(3 + \sqrt{5})$$

Für den gesuchten Inhalt $x$ der Schnittfigur $abcdf$ erhält man somit unter Benutzung der in der Erkl. 253 angeführten Formel: *)

$$x = \frac{\left(\frac{k}{4}(3 + \sqrt{5})\right)^2}{4}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

oder nach der Erkl. 254:

$$x = \frac{k^2}{32}(7 + 3\sqrt{5})\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

*) Auf bequemere Weise kann die Berechnung des gesuchten Inhalts $x$ mittelst Anwendung der Trigonometrie erfolgen, die aber hier noch ausgeschlossen ist.

$$x = \frac{k^2}{64}(14 + 6\sqrt{5})\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

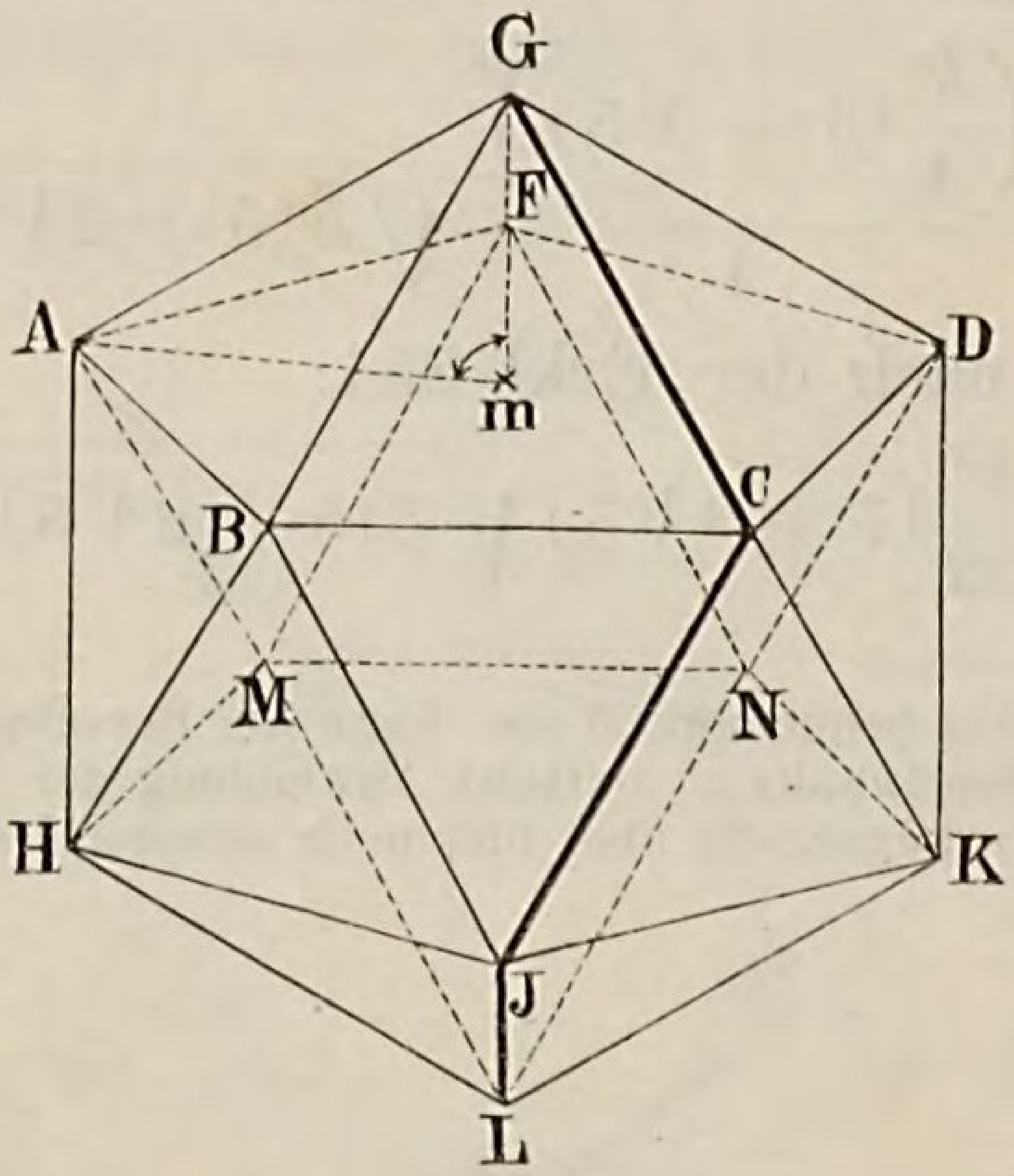
$$x = \frac{k^2}{32}(7 + 3\sqrt{5})\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

Die Reduktion könnte noch weiter ausgeführt werden. Dies Resultat wird jedoch in allen Fällen genügen.

---

**Aufgabe 307.** Jede Ecke eines regulären Ikosaeders bildet die Spitze einer geraden, fünfseitigen Pyramide. Eine solche Pyramide soll mittelst einer Ebene abgeschnitten und das Volumen, sowie die Oberfläche derselben berechnet werden, wenn die Kante $k$ des regul. Ikosaeders gegeben ist.

Figur 66.




**Erkl. 255.** Dass z. B. durch die 5 Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ und $F$ die Lage einer Ebene möglich ist, wurde in dem Abschnitte des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über das reguläre Ikosaeder handelt, bewiesen.

**Erkl. 256.** Die Höhe $H = Gm$ der Pyramide $ABCDF$, siehe Figur 66, findet man aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $GmA$ mittelst der Relation:

$$Gm = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{Am}^2}$$

Da nun $AG$ gleich der Kante $k$ des Ikosaeders und $Am$ gleich dem Radius des um das reguläre Fünfeck $ABCDF$ beschriebenen Kreises, also nach der Erkl. 257 $= \frac{k}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$ ist, so erhält man hiernach:

$$Gm = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\right)^2}$$

oder:

$$Gm = \sqrt{k^2 - \frac{k^2}{4}\cdot\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$$

**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28, S. 11)}$$

**Auflösung.** Angenommen es sei, siehe Fig. 66, $ABCDF$ die Pyramide, welche mittelst einer durch die fünf Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ und $F$ (s. Erkl. 255) gelegte Ebene von dem regul. Ikosaeder abgeschnitten und berechnet werden soll.

Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ der Pyramide dient vorstehende Formel. Setzt man in derselben nach der Erkl. 253:

$$\text{a)} \ldots G = \frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

und nach der Erkl. 256:

$$\text{b)} \ldots H = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

so erhält man:

$$V = \frac{\frac{k^2}{4}\cdot\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\cdot\frac{k}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}{3}$$

oder:

$$V = \frac{k^3}{24}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})\cdot\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

$$V = \frac{k^3}{24}\sqrt{(5+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}$$

$$V = \frac{k^3}{24}\sqrt{50+20\sqrt{5}-10\sqrt{5}-20}$$

$$V = \frac{k^3}{24}\sqrt{30+10\sqrt{5}}$$

mithin ist das gesuchte Volumen $V$:

$$\text{A)} \ldots V = \frac{k^3}{24}\sqrt{10(3+\sqrt{5})}$$

Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$ der Pyramide beachte man, dass dieselbe aus dem Inhalt des regu-

$$Gm = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{20-10-2\sqrt{5}}{5}} \quad \text{mithin:}$$

$$Gm = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

**Erkl. 257.** Zwischen dem Radius $R$ des einem regulären Fünfecks umschriebenen Kreises und der Seite $s_5$ jenes Fünfecks besteht die Relation:

$$R = \frac{s_5}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$$

Man siehe den Abschnitt der Planimetrie, welcher über die regulären Polygone handelt. — Diese Formel ist auch im 1. Buch der Körperberechnungen, Abschnitt: „Das Dodekaeder", entwickelt.

lären Fünfecks $ABCDF$ und aus der Summe der Inhalte von 5 kongruenten gleichseitigen Dreiecken, deren Seiten $= k$ sind, besteht. Man hat somit unter Benutzung der vorstehenden Gleich. a) und der Erkl. 11, S. 5, die Relation:

$$O = \frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} + 5\cdot\frac{k^2}{4}\sqrt{3}$$

Für die gesuchte Oberfläche $O$ erhält man somit:

$$\text{B)}\ .\ O = \frac{k^2}{4}\left(\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} + 5\sqrt{3}\right)$$

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 308.** Man soll durch eine Kante und die Mitte der gegenüberliegenden Kante eines regulären Tetraeders eine Ebene legen und die Volumina der beiden entstandenen Körperteile berechnen, wenn die Kante $k$ des Tetraeders $= 12{,}5$ dm beträgt.

**Aufgabe 309.** Durch eine Ecke eines regulären Tetraeders ist eine Ebene so gelegt, dass sie die gegenüberliegende Begrenzungsfläche in einer Geraden schneidet, welche parallel zu einer Seite dieser Fläche ist und diese Fläche im Verhältnis von $m:n$ teilt. In welchem Verhältnis steht der Inhalt der somit erhaltenen Schnittfigur zum Inhalt einer Seitenfläche des Tetraeders?

**Aufgabe 310.** Ein reguläres Tetraeder soll durch zwei einer seiner Begrenzungsflächen parallelen Ebenen in drei gleiche Teile geteilt werden. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der somit erhaltenen Körperteile?

**Andeutung:** Analog der gelösten Aufgabe 301.

**Aufgabe 311.** Von einem regulären Tetraeder ist der Radius $R$ des einer seiner Begrenzungsflächen umschriebenen Kreises gegeben. In welcher Entfernung von einer Ecke des Tetraeders müssen zwei zur gegenüberliegenden Begrenzungsfläche parallele Ebenen gelegt werden, damit sie das Tetraeder in drei gleiche Teile teilen?

**Aufgabe 312.** Durch die Endpunkte der drei von einer Ecke eines regulären Hexaeders ausgehenden Kanten, soll eine Ebene gelegt werden. Wie gross sind die Kubikinhalte der somit erhaltenen Körperteile, wenn die Kante $k$ des Hexaeders $= 5$ m misst?

**Aufgabe 313.** Durch die Mitten der drei von einer Ecke eines regulären Hexaeders ausgehenden Kanten, soll eine Ebene gelegt werden.

Wie gross sind die Kubikinhalte und die Oberflächen der somit erhaltenen Körperteile, wenn die Kante $k$ des Hexaeders $= 5$ m beträgt?

**Aufgabe 314.** Die Kante $k$ eines regul. Hexaeders ist gegeben. Durch die Mitte einer Körperdiagonale dieses Hexaeders soll senkrecht zu ihr eine Ebene gelegt werden; welches ist die Gestalt der somit erhaltenen Schnittfigur und wie gross ist der Inhalt derselben?

**Andeutung:** Analog der gelösten Aufgabe 304.

**Aufgabe 315.** Von einem regul. Hexaeder ist die Kante $k$ gegeben. Senkrecht zu einer Körperdiagonale desselben sollen zwei Ebenen so gelegt werden, dass sie diese Diagonale in drei gleiche Teile teilen. Welches sind die Umfänge und die Inhalte der somit erhaltenen Schnittfiguren?

**Aufgabe 316.** Senkrecht zur Körperdiagonale eines regul. Hexaeders sollen zwei Ebenen so gelegt werden, dass diese Ebenen zugleich durch eine Ecke und die Mitte einer Kante gehen. Wie gross sind die Umfänge und Inhalte der somit erhaltenen Schnittfiguren und wie wird jene Diagonale durch diese Ebenen geteilt? Die Kante $k$ des Hexaeders soll hierbei als gegeben angenommen werden.

**Aufgabe 317.** Welches Volumen hat ein sogenanntes Kubooktaeder, dessen Kante $= k$ gegeben ist?

**Aufgabe 318.** Man soll ein reguläres Oktaeder, dessen Kante $= k$ gegeben ist, mittelst einer zu einer Begrenzungsfläche parallelen Ebene so durchschneiden, dass diese Ebene durch die Mitte des senkrechten Abstandes jener Begrenzungsfläche und der zu ihr parallelen Begrenzungsfläche geht. Welches ist die Gestalt, der Umfang und der Inhalt der somit erhaltenen Schnittfigur?

**Aufgabe 319.** Zu zwei parallelen Begrenzungsflächen eines regulären Tetraeders, dessen Kante $= k$ gegeben ist, sollen 2 Ebenen parallel so gelegt werden, dass sie den senkrechten Abstand jener Begrenzungsflächen in 3 Stücke teilen, welche sich wie $1:2:3$ verhalten. In welchem Verhältnis stehen die Umfänge und die Inhalte der erhaltenen zwei Schnittfiguren?

**Aufgabe 320.** Legt man durch eine Ecke eines regulären Dodekaeders eine Ebene parallel zu einer Begrenzungsfläche desselben, so geht diese Ebene durch die Endpunkte der von den Ecken jener Begrenzungsfläche ausgehenden Kanten und ist die erhaltene Schnittfigur ein reguläres Fünfeck. Wie gross ist der Inhalt einer solchen Schnittfigur, wenn die Kante $k$ des Dodekaeders gegeben ist?

**Andeutung:** Analog der gelösten Aufgabe 306.

**Aufgabe 321.** Legt man durch die Mitte einer Kante eines regulären Dodekaeders eine Ebene parallel zu einer solchen Begrenzungsfläche desselben, die nicht an jene Kante anstösst, so geht diese Ebene durch die Mitten von zehn Kanten des Dodekaeders und ist die erhaltene Schnittfigur ein reguläres Zehneck. Wie gross ist der Inhalt einer solchen Schnittfigur, wenn die Kante $k$ des Dodekaeders gegeben ist?

---

**Aufgabe 322.** In welchem Verhältnis stehen die Umfänge der Schnittfiguren, welche man erhält, wenn man parallel einer Begrenzungsfläche eines regul. Dodekaeders Ebenen legt, von denen die erste die fünf von jener Fläche ausgehenden Kanten halbiert, die zweite durch die Endpunkte dieser 5 Kanten geht, die dritte durch die Mitten von zehn weiteren Kanten des Dodekaeders geht?

---

**Aufgabe 323.** In welchem Verhältnis stehen die Umfänge der Schnittfiguren, welche man erhält, wenn man durch ein reguläres Ikosaeder drei Ebenen legt, von denen die erste durch die Mitten der 5 von einer Ecke ausgehenden Kanten, die zweite durch die Endpunkte jener Kanten und die dritte durch die Mitten von zehn weiteren Seitenkanten geht?

**Andeutung:**

Bei der Lösung der Aufgabe muss zunächst bewiesen werden, dass diese Ebenen überhaupt möglich sind.

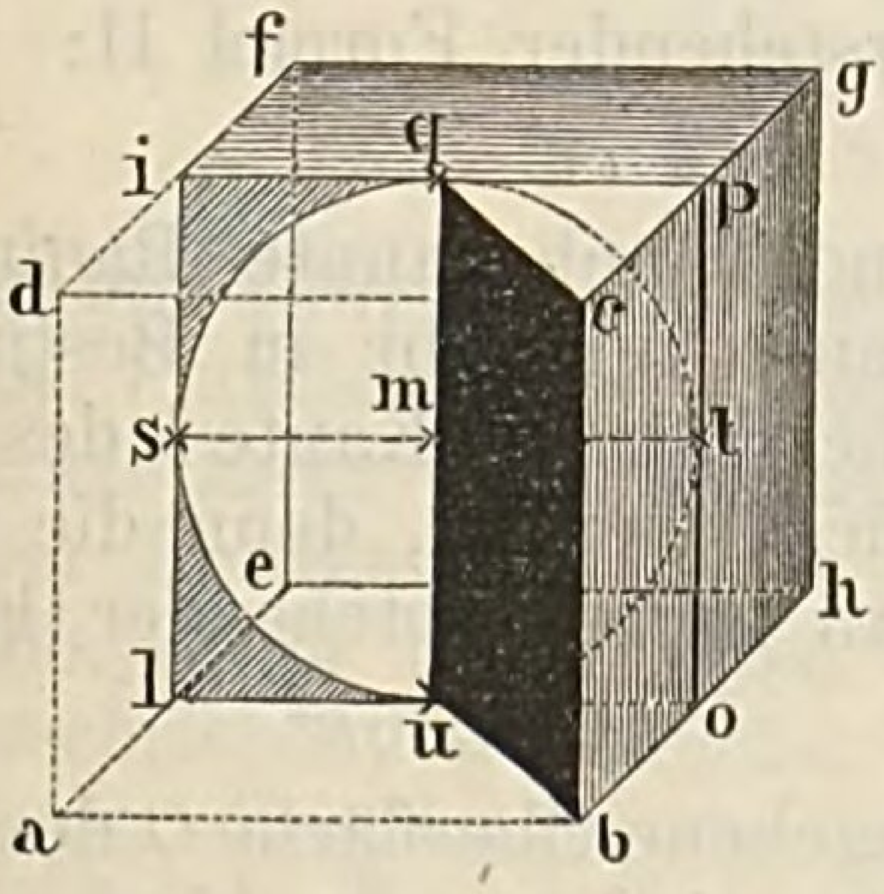
# VI.

# Aufgaben über die einfachen geometr. Körper in Verbindung mit der ein- und umbeschriebenen Kugel.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 324.** In einem würfelförmigen Kasten liegt eine Kugel, welche die sämtlichen Flächen des Kastens samt Deckel desselben berührt. Welches Volumen enthält der nicht ausgefüllte Raum des Kastens, wenn der Durchmesser $2r$ der Kugel $= 6$ dm gegeben ist?

Figur 67.




**Formeln:**

Für einen Würfel:

$$V = k^3 \text{ (s. Erkl. 73, S. 39)}$$

Für eine Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (s. Erkl. 67, S. 29).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man das gesuchte Volumen des durch die Kugel nicht ausgefüllten Raumes mit $x$ und berücksichtigt, dass dieses Volumen gleich der Differenz der Volumina des einen Würfel darstellenden hohlen Raumes des Kastens und der darin liegenden Kugel ist, so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formeln, die Gleichung:

$$1) \ldots x = k^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

Zur Bestimmung der nicht gegebenen Kante $a$ des Würfels, welche den hohlen

**Erkl. 258.** Die sämtlichen Körper-Diagonalen eines Würfels schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt ist gleichweit von allen Flächen und auch gleichweit von allen Ecken des Würfels entfernt. Er ist somit der Mittelpunkt der dem Würfel einbeschriebenen, als auch der Mittelpunkt der dem Würfel umbeschriebenen Kugel.

Den Beweis kann man führen, wie es in dem Abschnitt des 1. Buchs der Körperberechnungen, welcher über das Hexaeder handelt, geschehen ist.

Raum des Kastens bildet, genügt folgende Betrachtung:

Denkt man sich, siehe Fig. 67, durch den Mittelpunkt $m$ der gedachten Kugel eine Ebene parallel zu einer Seitenfläche des Würfels, z. B. parallel zur Fläche $abcd$ gelegt, so schneidet dieselbe den Würfel in dem Quadrate $ilop$ und die Kugel in einen grössten Kreis, welcher diesem Quadrate einbeschrieben ist. Hieraus ergibt sich, dass die Kante $k$ des Würfels gleich dem Durchmesser $2r$ der einbeschriebenen Kugel ist; man hat somit:

$$2) \ldots k = 2r$$

Substituiert man diesen Wert in vorstehende Gleich. 1) so ergibt sich:

$$x = (2r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ und}$$

$$x = 8r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Für das gesuchte Volumen $x$ hat man hiernach allgemein:

$$x = 4r^3\left(2 - \frac{1}{3}\pi\right)$$

In Rücksicht des gegebenen Zahlenbeispiels erhält man:

$$x = 4\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^3\cdot\left(2 - \frac{1}{3}\cdot 3{,}141\right) \text{ oder:}$$

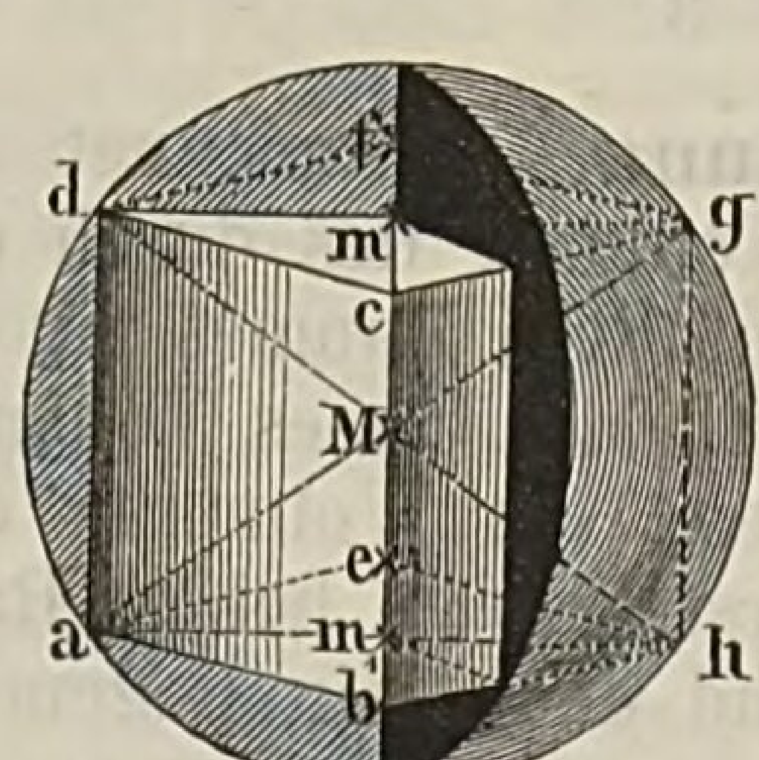
$$x = 4\cdot 3^3\cdot(2 - 1{,}047) = 4\cdot 27\cdot 0{,}953 = 108\cdot 0{,}953$$

$$x = 102{,}924 \text{ ccm}$$

---

**Aufgabe 325.** Um einen Würfel ist eine Kugel beschrieben; wie gross ist deren Oberfläche, wenn die Oberfläche $O$ des Würfels $= 200$ qcm beträgt?

Figur 68.




**Formeln:**

Für einen Würfel:

I. $O = 6k^2$ (s. Erkl. 74. S. 40)

Für eine Kugel:

II. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28).

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $x$ der dem Würfel umbeschriebenen Kugel hat man nach vorstehender Formel II:

$$1) \ldots x = 4\pi r^2$$

Der noch unbekannte Radius $r$ der Kugel muss nunmehr in Bestimmungsstücke, bezw. in die Kante $k$ des Würfels ausgedrückt werden, denn die Kante $k$ kann man nach vorstehender Formel I:

$$O = 6k^2$$

in die gegebene Oberfläche $O$ des Würfels ausdrücken, indem man hieraus:

**Erkl. 259.** Die Seite $dg$ des Rechtecks $adgh$ in Figur 68 ist gleich der Diagonale $dg$ des Quadrats $dcgf$. Bezeichnet man die Seite dieses Quadrats, d. i. die Kante des Würfels, mit $k$, so ist:

$$\overline{dg}^2 = \overline{df}^2 + \overline{fg}^2 \text{ oder}$$
$$\overline{dg}^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$$
$$dg = k\sqrt{2}$$

$$2) \ldots k = \sqrt{\frac{O}{6}}$$

erhält. Zu diesem Zwecke denke man sich, analog wie in der vorhergehenden Aufgabe, eine Ebene durch zwei nicht derselben Seitenfläche angehörigen parallelen Kanten, z. B. durch die Kanten $ad$ und $hg$, siehe Fig. 68, gelegt. Als Durchschnittsfigur erhält man ein Rechteck $adgh$, dessen Seite $ad = hg =$ der Kante $k$ des Würfels und dessen Seite $dg = ah = k\sqrt{2}$ (s. Erkl. 259) nämlich gleich einer Flächendiagonale des Würfels ist. Der Durchschnitt der gedachten Ebene mit der dem Würfel umschriebenen Kugel ist ein grösster Kreis derselben, welcher dem Rechteck $adgh$, siehe Figur 68, umschrieben ist.

Für den gesuchten Radius $r$ der Kugel hat man somit in dem rechtwinkligen Dreieck $adg$:

$$\overline{ag}^2 = \overline{ad}^2 + \overline{dg}^2 \text{ oder}$$
$$(2r)^2 = k^2 + (k\sqrt{2})^2$$
$$4r^2 = k^2 + 2k^2 = 3k^2, \text{ mithin}$$
$$3) \ldots r = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

Setzt man hierin den aus Gleich. 2) für $k$ gefundenen Wert, so ist:

$$4) \ldots r = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{O}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3O}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{2}}$$

Aus den Gleichungen 1) und 4) ergibt sich schliesslich:

$$x = 4\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{2}}\right)^2 = 4\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{O}{2} \text{ oder}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe:

$$x = \frac{\pi\cdot O}{2}$$

Für das gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = 314{,}1 \text{ qm} \quad \text{(s. Erkl. 260.)}$$

**Erkl. 260.** Setzt man in: $x = \frac{\pi\cdot O}{2}$ für $O$ den gegebenen Wert 200 qcm, so erhält man:

$$x = \frac{3{,}141\cdot 200}{2} = 3{,}141\cdot 100$$

oder: $x = 314{,}1$ qcm

---

**Aufgabe 326.** Von einem rechtwinkligen Parallelopipedon kennt man die an einer Ecke desselben zusammenstossenden Kanten $a = 3$, $b = 4$ und $c = 12$ dm. Um dieses ∥ppd ist eine Kugel beschrieben, von welcher man die Volumen der Kugelsegmente berechnen soll, die durch Erweiterung einer die

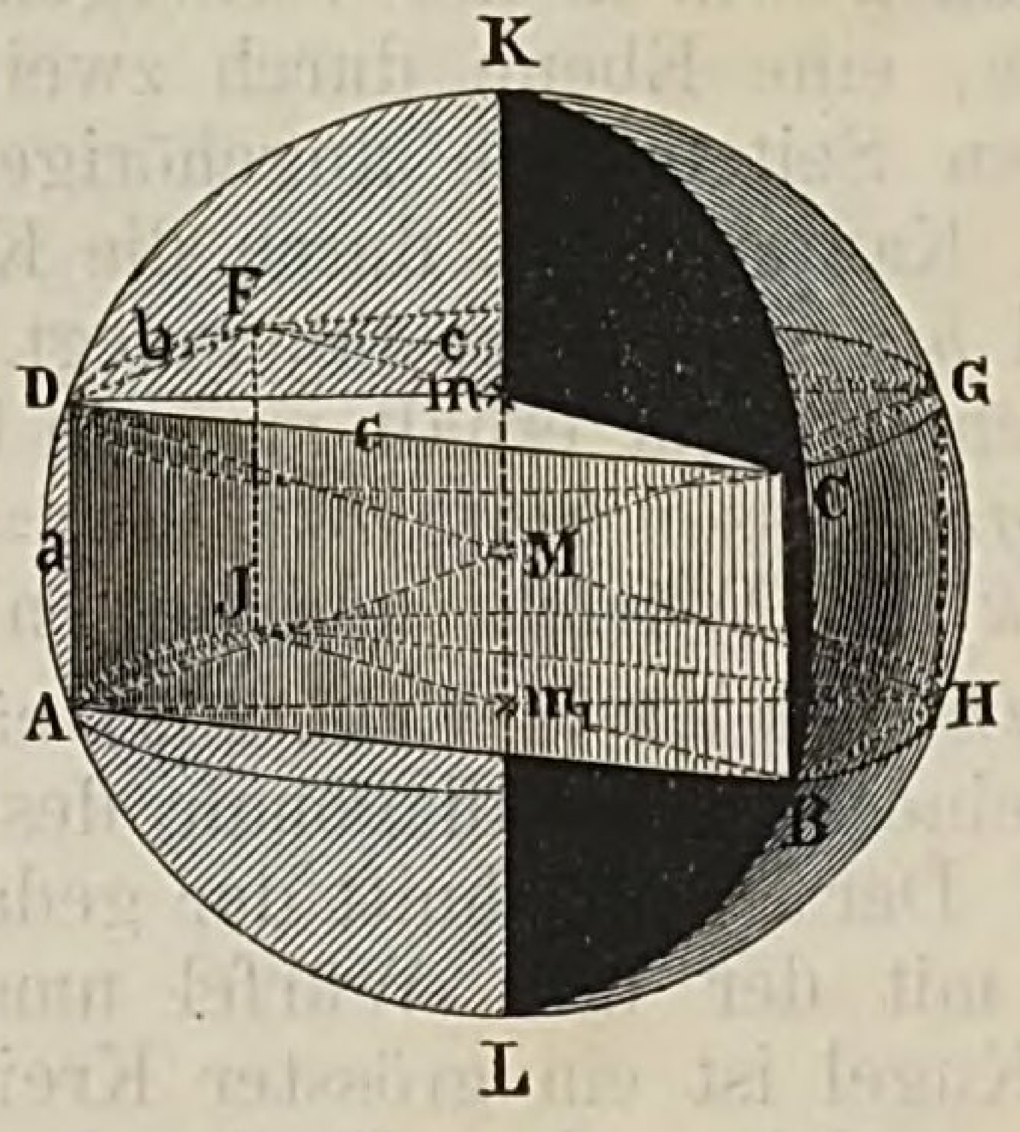
**Formel:**

Für ein Kugelsegment:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \quad \text{(s. Erkl. 151, S. 78)}$$

Kanten $b$ und $c$ enthaltenen Seitenfläche gebildet werden.

Figur 69.




**Erkl. 261.** Die Körperdiagonalen eines rechteckigen Parallelopipedons schneiden sich alle in einem Punkte, sind gleich lang und halbieren sich. Hieraus ergibt sich, dass der Schnittpunkt zweier Körperdiagonalen eines rechteckigen ‖ ppds gleichweit von allen Ecken entfernt ist, mithin der Mittelpunkt einer durch die 8 Ecken des ‖ ppds gehenden Kugelfläche ist.

Der Beweis hierzu kann analog geführt werden, wie es für den Würfel (Hexaeder) im 1. Buch der Körperberechnungen in dem Abschnitt: „Das Hexaeder" geschehen ist.

**Erkl. 262.** In dem bei $F$ rechtwinkligen Dreieck $DFG$, siehe Figur 69, ist:

$$\overline{DG}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FG}^2 \text{ oder}$$
$$\overline{DG}^2 = b^2 + c^2, \text{ mithin}$$
$$DG = \sqrt{b^2 + c^2}$$

**Hülfsrechnungen.**

$$1)\ R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 16 + 144}$$
$$R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{169} = \frac{1}{2} \cdot 13$$
mithin:
$$R = 6{,}5$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 69, $ABCDFGHJ$ das gegebene rechtwinklige Parallelopipedon und man denkt sich durch zwei parallele, nicht derselben Seitenfläche angehörige Kanten desselben, z. B. durch die Kante $AD$ und $GH$ eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe das ‖ ppd in der Diagonalebene $ADGH$ und (siehe Erkl. 261) die gedachte Kugel in einem grössten Kreis derselben, welcher ein dem Rechteck $ADGH$ umschriebener Kreis ist. Aus dieser somit erhaltenen Schnittfigur kann man zunächst den Radius $R$ der umschriebenen gedachten Kugel bestimmen und zwar wie folgt. In dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $ADG$ ist: $AG = 2R$, $AD = a$ und $DG = \sqrt{b^2 + c^2}$ (s. Erkl. 262), somit hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2 \text{ oder}$$
$$(2R)^2 = a^2 + \left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2$$
woraus man:
$$4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ oder}$$
$$1) \ldots R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
erhält.

Die Kugel, deren Radius nunmehr nach der soeben aufgestellten Gleich. 1) berechnet werden kann, wird durch Erweiterung der durch die Kanten $DF$ ($= b$) und $DC$ ($= c$) gehenden Seitenfläche $DCGF$ in die zwei Kugelsegmente $DCGFK$ und $DCGFL$ zerlegt, deren Volumina der Aufgabe gemäss berechnet werden sollen. Zur Berechnung dieser gesuchten Volumen dient vorstehende Formel:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

Setzt man in dieser Formel $r = R$, bezw. gleich dem in Gleich. 1) gefundenen Wert und berücksichtigt, dass für das obere Segment:

$$h = Km = KM - mM = R - \frac{mm_1}{2}$$
$$= R - \frac{DA}{2} \text{ oder}$$
$$a) \ldots h = R - \frac{a}{2}$$

2) $V = \frac{3{,}141}{3}\left(6{,}5 \mp \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(2 \cdot 6{,}5 \pm \frac{3}{2}\right)$

$V = 1{,}047\,(6{,}5 \mp 1{,}5)^2 \cdot (13{,}0 \pm 1{,}5)$

Berücksichtigt man nunmehr nur die oberen der doppelten Vorzeichen, so erhält man:

$V_1 = 1{,}047 \cdot 5^2 \cdot 14{,}5$ oder:

$V_1 = 1{,}047 \cdot 25 \cdot 14{,}5 = 1{,}047 \cdot 362{,}5$

mithin:

$V_1 = 379{,}61$ cdm

Berücksichtigt man hingegen die unteren der doppelten Vorzeichen, so erhält man:

$V_2 = 1{,}047 \cdot 8^2 \cdot 11{,}5$ oder

$V_2 = 1{,}047 \cdot 64 \cdot 11{,}5 = 1{,}047 \cdot 736$

mithin:

$V_2 = 770{,}74$ cdm

und dass für das untere Segment:

$$h = Lm = LM + Mm = R + \frac{m_1 m}{2}$$

$$= R + \frac{AD}{2} \text{ oder}$$

b) . . . $h = R + \frac{a}{2}$ ist, so erhält man:

$$V = \frac{\pi\left(R \mp \frac{a}{2}\right)^2}{3} \cdot \left[3R - \left(R \mp \frac{a}{2}\right)\right]$$

oder:

A) . . . $V = \frac{\pi}{3}\left(R \mp \frac{a}{2}\right)^2 \left(2R \pm \frac{a}{2}\right)$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe, wobei zu berücksichtigen ist, dass die oberen der doppelten Vorzeichen bei Berechnung des kleineren der beiden Kugelsegmente, die unteren bei Berechnung des grösseren Kugelsegments zu verwenden sind und dass der Wert für $R$ zuerst aus der umstehenden Gleichung 1) berechnet werden muss.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man zunächst aus umstehender Gleichung 1):

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$$

oder nach Hülfsrechnung 1):

$$R = 6{,}5 \text{ dm}$$

Ferner erhält man aus vorstehender Gleich. A) mit Benutzung des soeben für $R$ gefundenen Wertes:

$$V = \frac{3{,}141}{3}\left(6{,}5 \mp \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(2 \cdot 6{,}5 \pm \frac{3}{2}\right)$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung 2) für das kleinere Kugelsegment:

$$V_1 = 379{,}61 \text{ cdm}$$

und für das grössere Kugelsegment:

$$V_2 = 770{,}74 \text{ cdm}$$

---

**Aufgabe 327.** Der Radius einer Kugel sei $r = 1{,}26$ m; wie gross ist die Oberfläche und das Volumen des dieser Kugel umbeschriebenen, geraden, regulär-sechsseitigen Prismas?

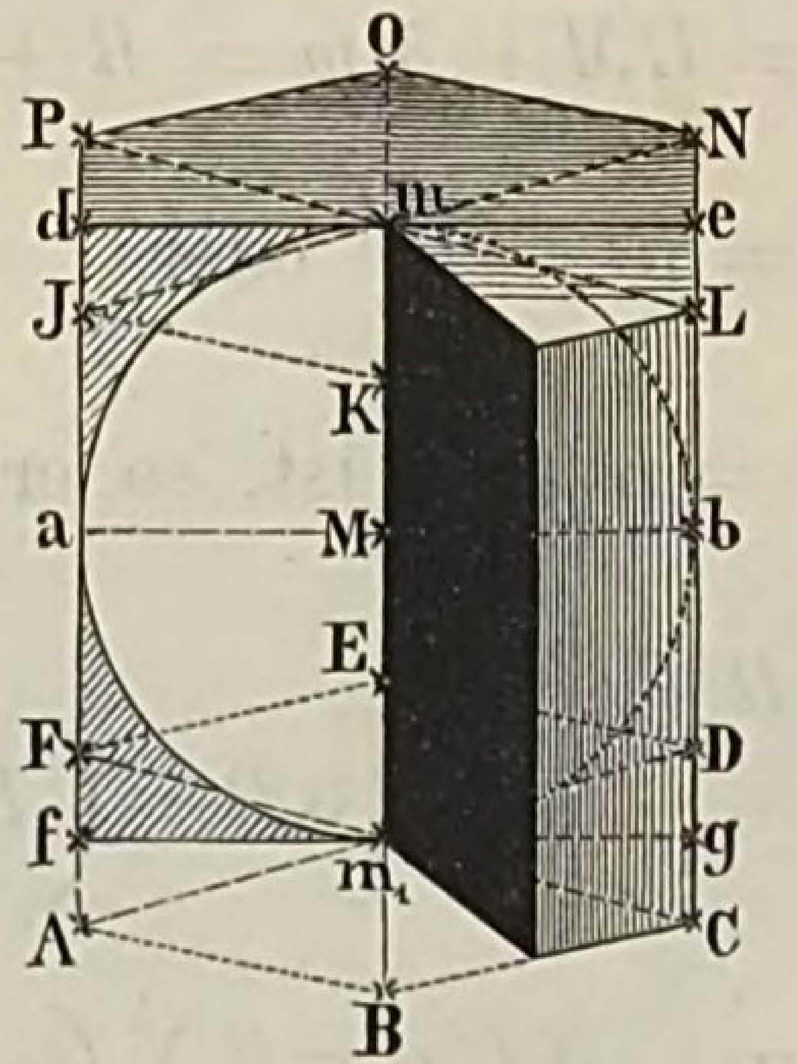
**Formel:**

Für ein Prisma:

$V = G \cdot H$ (s. Erkl. 1, S. 1)

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche und des gesuchten Volumens des um die gegebene Kugel konstruierten geraden, regulär-sechsseitigen Prismas muss man zunächst die

Figur 70.




**Erkl. 263.** Bezeichnet man die Seite eines regulären Sechsecks mit $s_6$, so hat man für den Inhalt $J_6$ desselben die Relation:

$$J_6 = 6 \cdot \frac{s_6^2}{4} \sqrt{3} \text{ oder:}$$

$$\text{a)} \ldots J_6 = \frac{3 s_6^2}{2} \sqrt{3}$$

Da nun jedes der Bestimmungsdreiecke eines regulären 6-Ecks ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $s_6$ ist, so hat man für den Radius $r_6$ (= dm siehe Figur 70) des einbeschriebenen Kreises, die Relation:

$$r_6^2 = s_6^2 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2$$

$$[\overline{dm}^2 = \overline{Pm}^2 - \overline{Pd}^2, \text{ s. Figur 70}]$$

oder:

$$r_6^2 = s_6^2 - \frac{s_6^2}{4} \text{ mithin:}$$

$$\text{b)} \ldots r_6^2 = \frac{3}{4} s_6^2, \text{ woraus man:}$$

$$\text{c)} \ldots s_6^2 = \frac{4}{3} r_6^2 \text{ erhält.}$$

Substituiert man diesen Wert in Gleich. a), so erhält man für den Inhalt $J_6$ eines regulären 6-Ecks, in den Radius $r_6$ des demselben einbeschriebenen Kreises ausgedrückt, die Relation:

$$J_6 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} r_6^2 \sqrt{3} \text{ oder:}$$

$$\text{d)} \ldots J_6 = 2 r_6^2 \sqrt{3}$$

**Hülfsrechnungen.**

1) $O = 12 \cdot 1{,}26^2 \cdot \sqrt{3}$

$$\log O = \log 12 + 2 \cdot \log 1{,}26 + \frac{1}{2} \cdot \log 3$$

Nun ist: $\log 12 = 1{,}0791812$

$+ 2 \cdot \log 1{,}26 = 2 \cdot 0{,}1003705 = 0{,}2007410$

$+ \frac{1}{2} \cdot \log 3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4771213 = 0{,}2385606$

$\log O = 1{,}5184828$

mithin: 4876

$\text{numlog } O = 32{,}998$

oder: $O = 32{,}998$ qm

Bestimmungsstücke: $G$ und $H$, nämlich Grundfläche und Höhe desselben in den gegeb. Radius $r$ der Kugel ausdrücken.

Denkt man sich zu diesem Zwecke, siehe Figur 70, durch die Axe $mm_1$ des Prismas eine Ebene so gelegt, dass sie durch die Mitten $d$ und $c$ ($f$ und $g$) zweier parallelen Grundkanten einer der Grundflächen geht, so schneidet diese Ebene das Prisma in dem Rechteck $dcgf$, dessen Seiten $dc$ und $fg$ die Durchmesser der den Grundflächen einbeschriebenen Kreise und dessen Seiten $df$ und $cg$ gleich der Höhe des Prismas sind; ferner schneidet jene Ebene die Kugel in einem grössten Kreise, welcher dem Rechteck, bezw. dem Quadrate $dcgf$ einbeschrieben ist.

Aus der somit erhaltenen Schnittfigur ergibt sich, dass der Durchmesser $mm_1$ der Kugel gleich der Höhe $H$ des Prismas ist, man hat somit:

$$1) \ldots H = 2r$$

Ferner ergibt sich, dass der Durchmesser $dc$ des einer den Grundflächen einbeschriebenen Kreises gleich dem Durchmesser $2r$ der Kugel ist, man hat somit, wenn man den Radius des der regulären sechsseitigen Basis umschriebenen Kreises mit $r_6$ bezeichnet, die weitere Relation:

$$2) \ldots r_6 = r$$

Aus nebenstehender Erkl. 263 ergibt sich hiernach für die Grundkante $s_6$ des Prismas:

$$s_6^2 = \frac{4}{3} r_6^2 \text{ [s. nebensteh. Gleich. c)]}$$

oder:

$$s_6^2 = \frac{4r^2}{3}$$

$$s_6 = \sqrt{\frac{4r^2 \cdot 3}{3 \cdot 3}}$$

mithin:

$$3) \ldots s_6 = \frac{2r}{3} \sqrt{3}$$

und für den Inhalt $G$ einer der Grundflächen:

$$J_6 = 2 r_6^2 \sqrt{3} \text{ [s. nebenst. Gleich. d)]}$$

oder:

$$4) \ldots G = 2r^2 \sqrt{3}$$

2) $V = 4 \cdot 1{,}26^3 \cdot \sqrt{3}$

$$log\, V = log\, 4 + 3 \cdot log\, 1{,}26 + \frac{1}{2} \cdot log\, 3$$

Nun ist: $log\, 4 = 0{,}6020600$

$+ 3 \cdot log\, 1{,}26 = 3 \cdot 0{,}1003705 = 0{,}3011115$

$+ \frac{1}{2} \cdot log\, 3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4771213 = 0{,}2385606$

$log\, V = 1{,}1417321$

mithin: 7319

$numlog\, V = 13{,}859$

oder: $V = 13{,}859$ dm

Da nun die gesuchte Oberfläche $O$ des Prismas:

$$O = 6 \cdot s_6 \cdot H + 2 \cdot G$$

ist, so erhält man in Rücksicht der vorstehenden Gleichungen 1), 3) und 4):

$$O = 6 \cdot \frac{2r}{3} \sqrt{3} \cdot 2r + 2 \cdot 2r^2 \sqrt{3}$$

oder:

$$O = 8r^2 \sqrt{3} + 4r^2 \sqrt{3} \text{ mithin:}$$

$$\text{A)} \ldots O = 12r^2 \sqrt{3}$$

als **allgemeine** Lösung des 1. Teils der Aufgabe.

Da ferner das gesuchte Volumen $V$ des Prismas:

$$V = G \cdot H$$

ist, so erhält man in Rücksicht der vorstehenden Gleichung 1) und 4):

$$V = 2r^2 \sqrt{3} \cdot 2r$$

oder:

$$\text{B)} \ldots V = 4r^3 \sqrt{3}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

In Rücksicht des für $r$ gegebenen Zahlenwertes erhält man:

$$O = 12 \cdot 1{,}26^2 \cdot \sqrt{3} \text{ und}$$

$$V = 4 \cdot 1{,}26^3 \cdot \sqrt{3}$$

oder nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1) und 2):

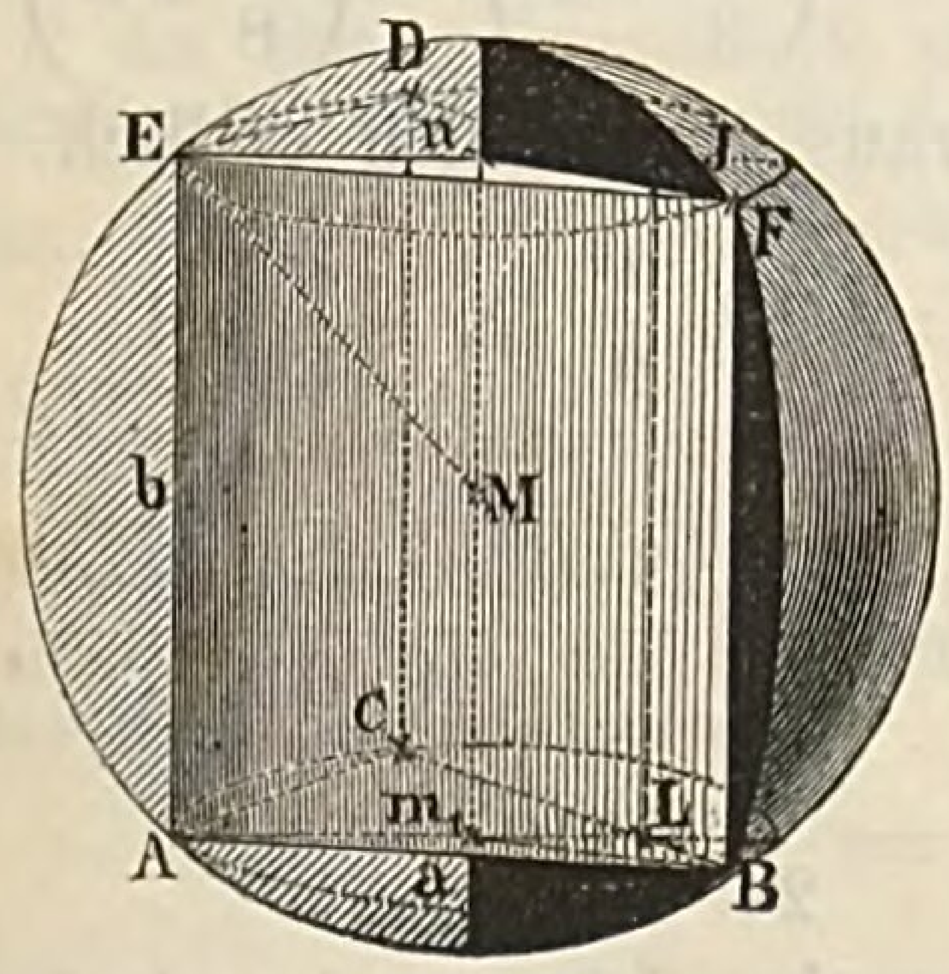
$$O = 32{,}998 \text{ qm und}$$

$$V = 13{,}859 \text{ cbm}$$

---

**Aufgabe 328.** Um ein gerades, regulär-dreiseitiges Prisma, in welchem alle Begrenzungsflächen inhaltsgleich sind und dessen Grundkante $a = 9{,}62$ m ist, sei eine Kugel umbeschrieben. Wie gross ist der Radius dieser Kugel?

Figur 71.




**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 71, durch die Axe $mm_1$ des Prismas $ABCDEF$ und durch eine Seitenkante, z. B. durch die Seitenkante $AE$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene das Prisma in dem Rechteck $AEJL$ und die Kugel in einem grössten Kreis, der durch die Ecken $A$ und $E$ des Prismas geht. Verbindet man in der somit erhaltenen Schnittfigur den Mittelpunkt $M$ mit der Ecke $E$, so ist dies ein Radius der Kugel, welcher als gesucht mit $x$ bezeichnet sei. Zur Bestimmung des Radius $ME = x$ hat man in dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $MmE$ die Relation:

**Erkl. 264.** Halbiert man in einem geraden Prisma mit regulärer Basis die Axe, d. i. die Verbindungslinie der „Mitten" der beiden kongruenten regulären Grundflächen, so ist der Halbierungspunkt gleichweit von allen Ecken des Prismas entfernt, d. h. er ist der Mittelpunkt der dem betreff. Prisma umbeschriebenen Kugel.

**Erkl. 265.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Schwerlinien, bezw. die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in einem Punkte, dem sogenannten Schwerpunkt, und zwar im Verhältnis von 1 : 2."

**Erkl. 266.** Zwischen der Seite $s$ eines gleichseitigen Dreiecks und der Höhe $h$ desselben besteht die Relation:

$$h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$$

**Erkl. 267.** Der Inhalt $J$ der Seitenfläche $ABFE$, dessen Seiten $AB$ und $AE$, bezw. $= a$ und $b$ sind, ist, weil dieselbe ein Rechteck darstellt:

$$J = a \cdot b$$

**Erkl. 268.** Die Formel zur Berechnung des Inhalts $J$ eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite mit $s$ bezeichnet wird, ist:

$$J = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$$

Darnach ist der Inhalt des Dreiecks $ABC$, dessen Seite $a$ ist $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

**Hülfsrechnung.**

$$log\, x = log\, 9{,}62 + \frac{1}{2} \cdot log\, 219 - log\, 24$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 9{,}62 &= 0{,}9831751 \\ +\frac{1}{2} \cdot log\, 219 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}3404441 &= 1{,}1702221 \\ &\overline{\phantom{0}2{,}1533972} \\ -log\, 24 &= -1{,}3802112 \\ log\, x &= 0{,}7731860 \\ &\phantom{= 0{,}773}1865 \end{aligned}$$

mithin:

$$numlog\, x = 5{,}9318.$$

1) . . . $x^2 = \overline{Em}^2 + \overline{Mm}^2$

Da nun $m$ der Schwerpunkt (die Mitte) des gleichseitigen Dreiecks $EFD$, folglich $Em = \frac{2}{3}\, EJ$ (siehe Erkl. 265) und da ferner $EJ$ als Höhe des gleichseitigen Dreiecks $EFD$, dessen Seite $= a$ ist $= \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (siehe Erkl. 266) gesetzt werden kann, so ergibt sich, dass

$$Em = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}, \text{ oder dass}$$

2) . . . $Em = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ ist.

Da ferner:

$$Mm = Mm_1 = \frac{mm_1}{2} = \frac{AE}{2} = \frac{b}{2}$$

ist und die Seitenkante $b$ in die gegebene Grundkante $a$ mittelst der in der Aufgabe gegebenen Bedingung, dass die Inhalte sämtlicher Begrenzungsflächen einander gleich sein sollen, bezw. mittelst der Gleichung:

$$ab = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \text{ (s. Erkl. 267 und 268)}$$

ausgedrückt werden kann, indem man hieraus:

$$b = \frac{a}{4}\sqrt{3} \text{ erhält, so ergibt sich,}$$

dass $Mm = \frac{a}{4}\sqrt{3} : 2$ oder dass

3) . . . $Mm = \frac{a}{8}\sqrt{3}$ ist.

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man schliesslich für den gesuchten Radius $x$:

$$x^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{8}\sqrt{3}\right)^2$$

und hieraus ergibt sich endlich:

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{9} \cdot 3 + \frac{a^2}{64} \cdot 3}$$

oder:

$$x = \sqrt{\frac{3 \cdot 64\, a^2 + 3 \cdot 9 \cdot a^2}{9 \cdot 64}}$$

A) . . $x = \frac{a}{24}\sqrt{219}$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht des für $a = 9{,}62$ dm gegebenen Zahlenwertes erhält man:

$$x = \frac{9{,}62}{24}\sqrt{219}$$

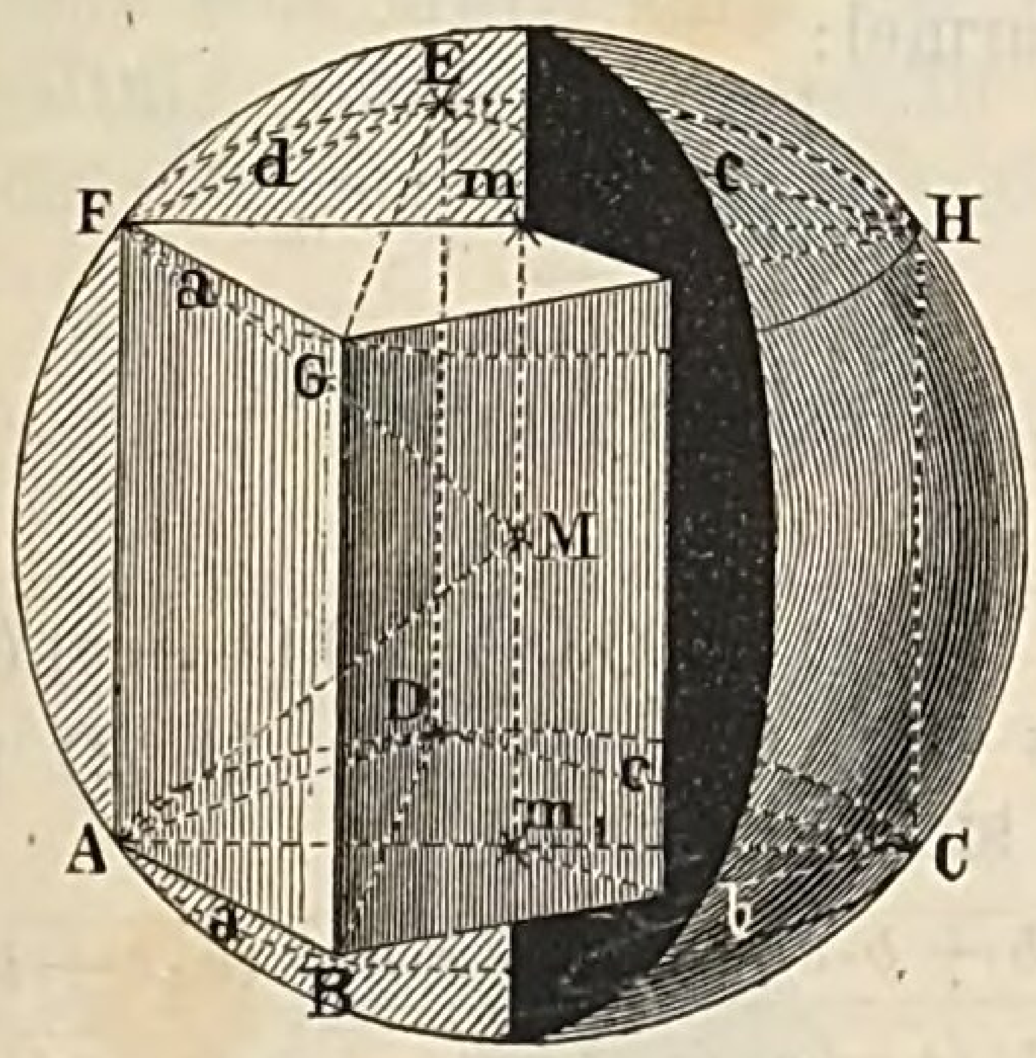
oder nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$x = 5{,}93 \text{ dm}$$

---

**Aufgabe 329.** Die Grundflächen eines geraden Prismas, dessen Volumen $V = 240$ ccm gegeben ist, sind Kreisvierecke mit den Seiten $a = 11$, $b = 8$, $c = 4$ und $d = 3$ cm. Man soll den Radius der Kugel berechnen, welcher sich um dieses Prisma beschreiben lässt.

Figur 72.




**Erkl. 269.** Die Formel zur Berechnung des Inhalts $J$ eines Kreisvierecks, dessen Seiten mit $a$, $b$, $c$ und $d$ bezeichnet sind, ist:

$$1) \ldots J = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

in welcher Formel:

$$a) \ldots s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

nämlich die halbe Summe der vier Seiten des Vierecks bedeutet.

Man siehe hierüber Dr. Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, speziell den Abschnitt, welcher über „das Kreisviereck" handelt.

**Erkl. 270.** Die Formel zur Berechnung des Radius $R$ des einem Kreisviereck umbeschriebenen Kreises ist, wenn $a$, $b$, $c$ und $d$ die Seiten und wenn: $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ bedeutet:

$$R = \frac{\sqrt{(a \cdot b + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

Man siehe hierüber Dr. Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, speziell den Abschnitt, welcher über „das Kreisviereck" handelt.

**Formel:**

$$V = G \cdot H \text{ (s. Erkl. 1, S. 1).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 72, $ABCDEFGH$ das gegeb. gerade Prisma, dessen Grundflächen $ABCD$ und $EFGH$ Kreisvierecke sind, so ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte $mm_1$ der Kreise, welche um jene Kreisvierecke konstruiert werden können die Axe des Prismas, deren Mittelpunkt $M$ von sämtlichen Ecken jener beiden Grundflächen gleichweit entfernt ist (was sich leicht durch Kongruenz rechtwinkliger Dreiecke, z. B. wie $\triangle MmF$ und $Mm_1A$ nachweisen lässt), dieser Punkt $M$ ist somit der Mittelpunkt der dem Prisma umbeschriebenen Kugel. Denkt man sich nun durch die Axe $mm_1$ des Prismas und eine Seitenkante, z. B. durch die Seitenkante $AF$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene das Prisma in dem Rechteck $AFJK$ und die gedachte Kugel in einem grössten Kreis, der durch die Ecken $A$ und $F$ geht; verbindet man in der somit erhaltenen Schnittfigur $M$ mit $F$ (oder $M$ mit $A$), so ist diese Strecke $MF$ ein Radius der Kugel, welcher als gesucht mit $x$ bezeichnet sei.

Zur Bestimmung dieses Radius $x$ hat man in dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $MmF$, die Relation:

$$1) \ldots x^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mF}^2$$

Da nun $m$ der Mittelpunkt, mithin $mF$ der Radius des dem Viereck $EFGH$ umschriebenen Kreises ist, so kann man nach der Erkl. 270:

$$2) \; mF = \frac{\sqrt{(a \cdot b + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

setzen, in welcher Gleichung

$$a) \ldots s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

nämlich die halbe Summe der vier Seiten des Kreisvierecks bedeutet.

Da ferner:

$$mM = Mm_1 = \frac{mm_1}{2} = \frac{FA}{2} = \frac{H}{2}$$

nämlich gleich der halben Höhe $H$ des Prismas ist und da das Volumen $V$ des Prismas gegeben und der Inhalt der Grundfläche $G$ nach der Erkl. 269 aus den Seiten $a$, $b$, $c$ und $d$ der Grundfläche mittelst der Formel:

$$G = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

in welcher: $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ bedeutet

berechnet werden kann und sich aus der Formel:

$$V = G \cdot H$$

$$H = \frac{V}{G}$$

ergibt, so erhält man:

$$3) \ldots mM = \frac{H}{2} = \frac{V}{2G} = \frac{V}{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) ergibt sich nunmehr:

$$x^2 = \left(\frac{V}{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(a\cdot b+b\cdot c)\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}\right)^2$$

und hieraus erhält man:

$$x = \sqrt{\frac{V^2}{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} + \frac{(a\cdot b+b\cdot c)\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)}{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4V^2 + (a\cdot b+b\cdot c)\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe, wobei zu berücksichtigen ist, dass

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

bedeutet.

In Rücksicht des in der Aufgabe gegebenen Zahlenbeispiels ist:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{11+8+4+3}{2} = 13$$

ferner ist:

$$\text{b)} \ldots (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = 900$$

(s. Hülfsrechnung 1)

dann ist:

$$\text{c)}\ (a\cdot b+b\cdot c)\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d) = 816000$$

(s. Hülfsrechnung 2)

und vorstehende allgemeine Lösung A) geht über in:

### Hülfsrechnungen.

1) Setzt man in:

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$s = 13,\ a = 11,\ b = 8,\ c = 4 \text{ und } d = 3$$

so erhält man:

$$(13-11)\cdot(13-8)\cdot(13-4)\cdot(13-3) = 2\cdot5\cdot9\cdot10 = 900$$

2) Setzt man in:

$$(a\cdot b+b\cdot c)\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)$$

$$a = 11,\ b = 8,\ c = 4 \text{ und } d = 3$$

so erhält man:

$$(11\cdot8+8\cdot4)\cdot(11\cdot8+4\cdot3)\cdot(11\cdot4+8\cdot3)$$
$$= (88+32)\cdot(88+12)\cdot(44+24)$$
$$= 120\cdot100\cdot68 = 8160\cdot100 = 816000$$

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4 \cdot 240^2 + 816000}{900}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$x = \frac{1}{4 \cdot 30}\sqrt{4 \cdot 57600 + 816000}$$

$$x = \frac{1}{120}\sqrt{230400 + 816000}$$

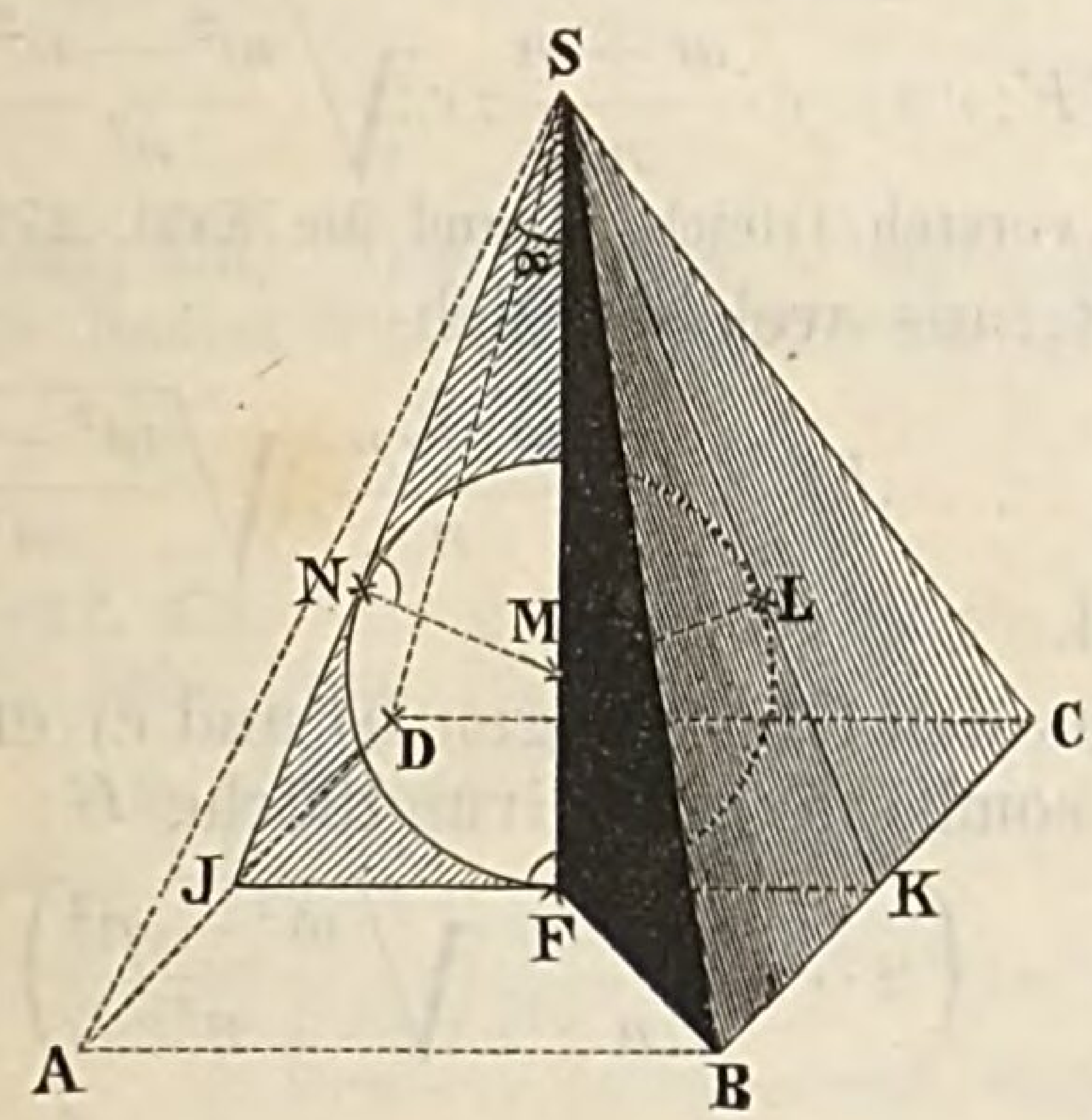
$$= \frac{1}{120}\sqrt{1046400}$$

$$x = \frac{1022{,}9}{120} = 85{,}4\,\text{cm}$$

---

**Aufgabe 330.** Um eine Kugel mit dem Radius $r = 1{,}268$ m wird eine gerade vierseitige Pyramide konstruiert, deren Höhe vom Mittelpunkt der Kugel im Verhältnis $m:n = 5:4$ geteilt wird. Wie gross ist das Volumen dieser Pyramide?

Figur 73.




**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 28, S. 11).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 73, $ABCDS$ die um die gedachte Kugel konstruierte gerade 4-seitige Pyramide und man denkt sich durch die Höhe (Axe) $SF$ der Pyramide und durch eine seitliche Höhe, z. B. durch die Höhe $SJ$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die Pyramide in dem gleichschenkligen Dreieck $SJK$ und die gedachte Kugel in einem grössten Kreis, welches ein jenem Dreieck $JKS$ umbeschriebener Kreis ist. Fällt man vom Mittelpunkt $M$ des in der Durchschnittsfigur enthaltenen grössten Kreises der Kugel die Senkrechten $MF$, $MN$ und $ML$ auf die Seiten des Dreiecks $JKS$, so sind diese Senkrechten sämtlich gleich dem gegebenen Radius $r$ der Kugel. Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ der Pyramide dient vorsteh. Formel:

$$1) \ldots V = \frac{G \cdot H}{3}$$

in welcher $H$ und $G$ noch in den gegebenen Radius $r$ ausgedrückt werden müssen, wozu folgende Betrachtung genügt.

Zur Bestimmung der Höhe $H$ beachte man, dass der Aufgabe gemäss die Höhe $SF$ durch den Mittelpunkt $M$ der Kugel im Verhältnis $m:n$ geteilt werden soll, man hat sonach:

$$SM : MF = m : n$$

oder:

$$SM : r = m : n$$

**Erkl. 271.** Verbindet man die Mitten (in Figur 73 $J$ und $K$) zweier Seiten eines Parallelogramms, so ist diese Verbindungslinie parallel und gleich einer der beiden andern Seiten des Parallelogramms.

**Erkl. 272.** Aus dem rechtwinkligen Dreieck $MNS$ in Figur 73 erhält man:

$$\overline{SN}^2 = \overline{SM}^2 - \overline{MN}^2$$

oder, wenn man nach nebenstehender Gleich. a)

$$SM = \frac{m}{n} \cdot r \text{ und}$$

$$MN = r \text{ setzt}$$

$$SN = \sqrt{\left(\frac{m}{n} \cdot r\right)^2 - r^2}$$

und hieraus ergibt sich:

$$SN = \sqrt{\frac{m^2}{n^2} \cdot r^2 - r^2}$$

oder:

$$SN = r \cdot \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2}}$$

mithin:

$$\text{a)} \ldots SM = \frac{m}{n} \cdot r$$

Da nun:

$$H = SF = SM + MF = \frac{m}{n} \cdot r + r \text{ ist,}$$

so erhält man hieraus:

$$2) \ldots H = r \cdot \frac{m+n}{n}$$

Zur Bestimmung der Grundfläche $G = ABCD$, beachte man, dass, siehe Fig. 73, $G = \overline{AB}^2$

oder: $G = \overline{JK}^2$ (s. Erkl. 271)

und auch:

$$\text{b)} \ldots G = (2 \cdot JF)^2 \text{ ist}$$

und dass man aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $JFS$ und $SNM$ die Proportion:

$$JF : MN = SF : SN$$

bezw. die Proportion:

$$JF : r = r \cdot \frac{m+n}{n} : r\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2}}$$

(s. vorsteh. Gleich. 2) und die Erkl. 272)

erhält, aus welcher sich

$$\text{c)} \ldots JF = r \cdot \frac{m+n}{n} : \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2}}$$

ergibt.

Aus den Gleichungen b) und c) erhält man somit für die Grundfläche $G$:

$$G = \left(2 \cdot r \cdot \frac{m+n}{n} : \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2}}\right)^2$$

oder:

$$G = 4r^2 \cdot \frac{(m+n)^2}{n} : \frac{m^2 - n^2}{n^2}$$

$$= 4r^2 \cdot \frac{(m+n)^2 \cdot n^2}{n^2 \cdot (m^2 - n^2)}$$

$$= 4r^2 \cdot \frac{(m+n)(m+n) \cdot n^2}{n^2 (m-n)(m+n)}$$

mithin:

$$3) \ldots G = 4r^2 \cdot \frac{m+n}{m-n}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man endlich für das gesuchte Volumen $V$ der Pyramide:

$$V = \frac{4r^2 \cdot \frac{m+n}{m-n} \cdot r \frac{m+n}{n}}{3}$$

**Hülfsrechnung.**

$$V = \frac{4}{3} \cdot 1{,}268 \cdot \frac{(5+4)^2}{(5-4)\cdot 4} = \frac{4}{3} \cdot 1{,}268 \cdot \frac{9^2}{1\cdot 4}$$

$$= \frac{1{,}268}{3} \cdot 81 = 1{,}268 \cdot 27$$

mithin:

$$V = 34{,}236$$

oder:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \cdot \frac{(m+n)^2}{(m-n)n}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte ergibt sich hieraus:

$$V = \frac{4}{3} \cdot 1{,}268 \cdot \frac{(5+4)^2}{(5-4)\cdot 4}$$

oder nach nebensteh. Hülfsrechnung:

$$V = 34{,}236 \text{ cm}$$

---

**Aufgabe 331.** Um eine Kugel mit dem gegebenen Radius $r$ soll eine gerade vierseitige Pyramide beschrieben werden, deren Höhe gleich dem Umfange eines grössten Kreises der Kugel ist. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide?

**Erkl. 273.** Der Umfang $U$ eines Kreises, dessen Radius mit $r$ bezeichnet wird, ist:

$$U = 2r\cdot\pi$$

**Erkl. 274.** Aus dem rechtwinkligen Dreieck $SMN$, siehe Figur 73, erhält man:

$$SN = \sqrt{\overline{SM}^2 - \overline{MN}^2}$$

da nun:

$$MN = r$$

und

$$SM = SF - MF$$
$$= 2r\pi - r \text{ [s. nebensteh. Gleich. 2)]}$$

oder:

$$SM = r(2\pi - 1)$$

gesetzt werden kann, so ist:

$$SN = \sqrt{r^2(2\pi-1)^2 - r^2}$$

oder:

$$SN = r\sqrt{(2\pi-1)^2 - 1}$$
$$SN = r\sqrt{4\pi^2 - 4\pi + 1 - 1}$$
$$SN = r\sqrt{4\pi(\pi-1)}$$

mithin:

$$SN = 2r\sqrt{\pi(\pi-1)}$$

**Formel:**

$$V = \frac{G\cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28, S. 11).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 73, $ABCDS$ die Pyramide, so denke man sich analog wie in voriger Aufgabe, durch deren Höhe $SF$ und durch die seitliche Höhe $SJ$ eine Ebene gelegt.

Zur Berechnung des gesuchten Volums $V$ der Pyramide dient vorstehende Formel:

$$1) \ldots V = \frac{G\cdot H}{3}$$

in welcher $H$ und $G$ in den gegebenen Kugelradius $r$ ausgedrückt werden müssen, was wie folgt geschieht:

Der Aufgabe gemäss ist die Höhe $SF$ gleich dem Umfang eines grössten Kreises der Kugel, somit hat man:

$$2) \ldots H = SF = 2r\pi$$

(s. Erkl. 273)

Zur Bestimmung der Grundfläche $G$ beachte man, dass wie in voriger Aufgabe:

$$a) \ldots G = (2\cdot JF)^2 \text{ ist}$$

und dass man aus den ähnlichen Dreiecken $JFS$ und $SNM$ die Proportion:

$$JF : MN = SF : SN$$

bezw. die Proportion:

$$JF : r = 2r\pi : 2r\sqrt{\pi(\pi-1)}$$

[s. die Gleich. a) und die Erkl. 274]

erhält, aus welcher sich:

$$b) \ldots JF = \frac{r\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}$$

ergibt.

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man somit für die Grundfläche $G$:

**Erkl. 275.** Aus dem bei $F$ rechtwinkligen Dreieck $JFS$, siehe Figur 73, erhält man die Relation:

$$SJ = \sqrt{\overline{SF}^2 + \overline{JF}^2}$$

setzt man in derselben:

$$SJ = h$$

$$SF = H = 2r\pi \text{ [s. nebenst. Gleich. 2)]}$$

und

$$JF = \frac{r\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}} \text{ [s. nebenst. Gleich. b)]}$$

so geht dieselbe über in:

$$h = \sqrt{(2r\pi)^2 + \left(\frac{r\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}\right)^2}$$

Und hieraus erhält man durch Reduktion:

$$h = \sqrt{4r^2\pi^2 + \frac{r^2\pi^2}{\pi(\pi-1)}}$$

$$h = r\pi\sqrt{4 + \frac{1}{\pi(\pi-1)}}$$

$$h = r\pi\sqrt{\frac{4\pi(\pi-1)+1}{\pi(\pi-1)}}$$

$$h = r\pi\sqrt{\frac{4\pi^2-4\pi+1}{\pi(\pi-1)}}$$

$$h = r\pi\sqrt{\frac{(2\pi-1)^2}{\pi(\pi-1)}}$$

mithin:

$$h = \frac{r\pi\cdot(2\pi-1)}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}$$

$$G = \left(\frac{2\cdot r\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}\right)^2 = \frac{4r^2\pi^2}{\pi(\pi-1)}$$

oder:

$$3) \ldots G = \frac{4r^2\pi}{\pi-1}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man endlich für das gesuchte Volumen $V$ der Pyramide:

$$V = \frac{\frac{4\cdot r^2\pi}{\pi-1}\cdot 2r\pi}{3}$$

oder:

$$A) \ldots V = \frac{8}{3}\cdot\frac{r^3\pi^2}{\pi-1}$$

als **allgemeine** Lösung des 1. Teils der Aufgabe.

---

Bezeichnet man ferner die Seite $AB$ oder $AD$ der quadratischen Basis der Pyramide mit $a$, die seitliche Höhe $SJ$ mit $h$, so hat man zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$ der Pyramide, die Relation:

$$O = a^2 + 4\cdot\frac{a\cdot h}{2}$$

oder:

$$4) \ldots O = a(a+2h)$$

Da nun:

$$a = AB = JK = 2\cdot JF$$

oder mit Benutzung vorstehender Gleichung b):

$$c) \ldots a = \frac{2\cdot r\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}$$

ist, und nach der Erkl. 275:

$$d) \ldots h = \frac{r\pi(2\pi-1)}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}$$

gesetzt werden kann, so geht die Gleichung 4) über in:

$$O = \frac{2\cdot r\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}\left(\frac{2\cdot r\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}} + 2\cdot\frac{r\pi(2\pi-1)}{\sqrt{\pi(\pi-1)}}\right)$$

Durch Reduktion ergibt sich hieraus:

$$O = \frac{4r^2\pi^2}{(\sqrt{\pi(\pi-1)})^2}(1+2\pi-1)$$

$$O = \frac{4r^2\pi^2}{\pi(\pi-1)}\cdot 2\pi$$

und man erhält für die gesuchte Oberfläche $O$

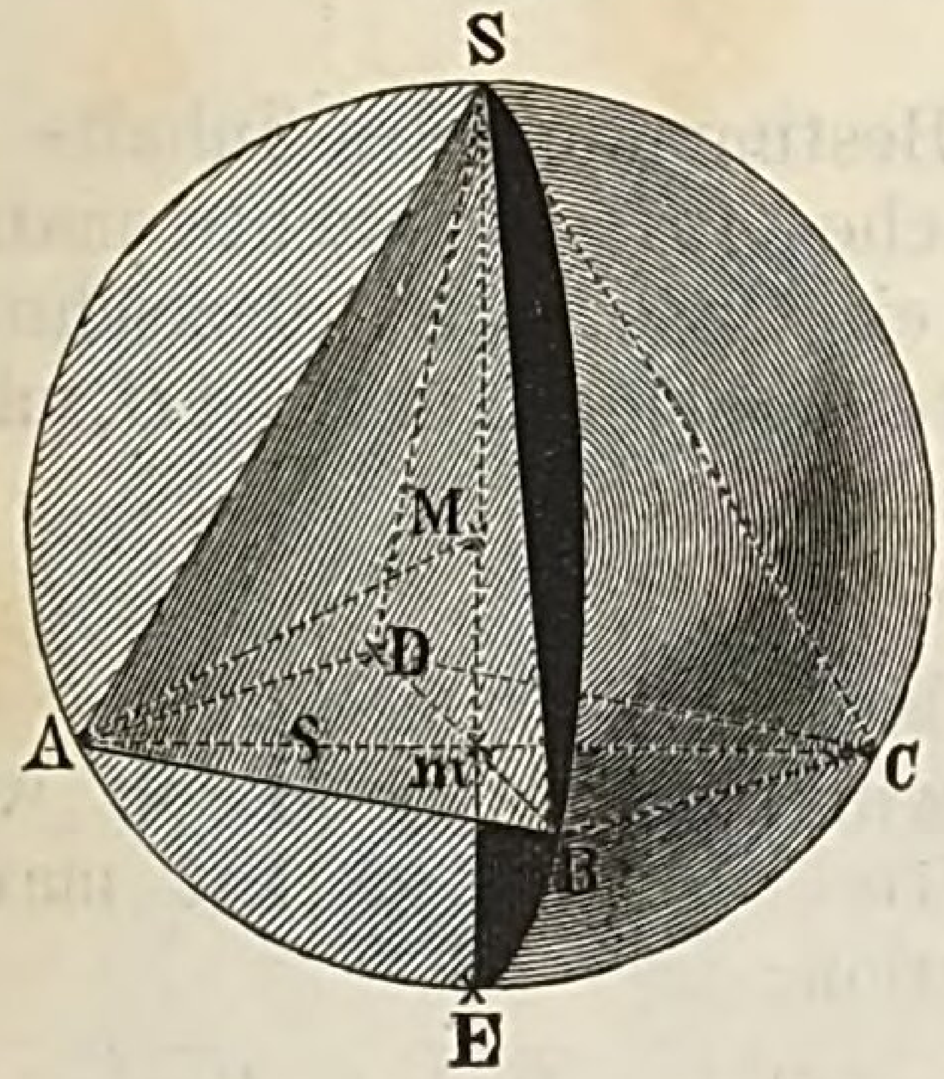
$$B) \ldots O = \frac{8\cdot r^2\pi^2}{\pi-1}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

---

**Aufgabe 332.** In einer Kugel mit dem Radius $r = 1,25$ m ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis beschrieben; die Höhe derselben verhält sich zum Radius des der Basis umschriebenen Kreises wie $p:q = 3:2$. Wie gross ist das Volumen der Pyramide?

Figur 74.




**Erkl. 276.** Nebenstehende Gleichung:

$$\text{f)} \ldots H = r + \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{p^2} \cdot H^2}$$

nach $H$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$H - r = \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{p^2} \cdot H^2}$$

$$(H-r)^2 = r^2 - \frac{q^2}{p^2} \cdot H^2$$

$$H^2 - 2rH + r^2 = r^2 - \frac{q^2}{p^2} \cdot H^2$$

$$H^2 - 2rH + \frac{q^2}{p^2} \cdot H^2 = 0$$

die ganze Gleichung mit $H$ dividiert, gibt:

$$H - 2r + \frac{q^2}{p^2} \cdot H = 0$$

$$H + \frac{q^2}{p^2} \cdot H = 2r$$

$$H\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = 2r$$

$$H \cdot \frac{p^2 + q^2}{p^2} = 2r$$

mithin:

$$H = \frac{2r \cdot p^2}{p^2 + q^2}$$

**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 28, S. 11)}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 74, $ABCDS$ die der gedachten Kugel einbeschriebene gerade vierseitige Pyramide und man denkt sich durch die Höhe (Axe) $Sm$ und eine der Seitenkanten, z. B. durch die Seitenkante $SA$ eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe die Pyramide in dem gleichschenkligen Dreieck $ACS$ und die Kugel in einem grössten Kreis, welches der diesem Dreiecke $ACS$ umbeschriebene Kreis ist.

Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ der Pyramide dient vorstehende Formel:

$$1) \ldots V = \frac{G \cdot H}{3}$$

in welcher $G$ und $H$ noch in die durch die Aufgabe gegebenen Bestimmungsstücke ausgedrückt werden müssen, wozu folgende Betrachtung genügt.

Zur Bestimmung der Höhe $H$ beachte man, dass

$$\text{a)} \ldots H = Sm = SM + Mm = r + Mm$$

und dass der Aufgabe gemäss die Proportion:

$$Sm : Am = p : q$$

bezw. die Proportion:

$$\text{b)} \ldots \frac{H}{\varrho} = \frac{p}{q}$$

besteht und dass man ferner aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $MmA$ die Relation:

$$\overline{Mm}^2 = \overline{MA}^2 - \overline{mA}^2$$

bezw. die Relation:

$$\text{c)} \ldots Mm = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

erhält.

Substituiert man den sich für $\varrho$ aus Gleich. b) ergebenden Wert:

$$\text{d)} \ldots \varrho = \frac{q}{p} \cdot H$$

in Gleich. c), so erhält man:

$$\text{e)} \ldots Mm = \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{p^2} \cdot H^2}$$

**Erkl. 277.** Setzt man in nebenstehender Gleichung:

$$d) \ldots \varrho = \frac{q}{p} \cdot H$$

für $H$ den in nebenstehender Gleichung 2) gefundenen Wert, so erhält man:

$$\varrho = \frac{q}{p} \cdot \frac{2r \cdot p^2}{p^2 + q^2}$$

oder:

$$\varrho = 2r \cdot \frac{pq}{p^2 + q^2}$$

mithin:

$$\varrho^2 = 4r^2 \cdot \frac{p^2 q^2}{(p^2 + q^2)^2}$$

**Hülfsrechnung.**

$$V = \frac{16}{3} \cdot 1{,}25^3 \cdot \frac{3^4 \cdot 2^2}{(3^2 + 2^2)^3}$$

$$= \frac{16}{3} \cdot 1{,}25^3 \cdot \frac{81 \cdot 4}{13^3}$$

$$= 64 \cdot 27 \cdot \left(\frac{1{,}25}{13}\right)^3$$

$$log\, V = log\, 64 + log\, 27 + 3 \cdot (log\, 1{,}25 - log\, 13)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 64 &= \phantom{-}1{,}8061800 \\ + log\, 27 &= \phantom{-}1{,}4313638 \\ & \phantom{=-}\ 3{,}2375438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 3 \cdot (log\, 1{,}25 - log\, 13) \\ &= 3 \cdot (0{,}0969100 - 1{,}1139434) \\ &= 3 \cdot -1{,}0170334 = -3{,}0511002 \\ &log\, V = \phantom{-}0{,}1864436 \\ &\phantom{log\, V = -}\ 4478 \end{aligned}$$

mithin:

$$numlog\, V = 1{,}5362$$

Setzt man diesen Wert für $Mm$ in Gleich. a), so erhält man zur Berechnung der Höhe $H$, die Gleichung:

$$f) \ldots H = r + \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{p^2} \cdot H^2}$$

aus welcher man nach der Erkl. 276:

$$2) \ldots H = \frac{2r \cdot p^2}{p^2 + q^2}$$

erhält.

Zur Bestimmung des Inhalts $G$ der Grundfläche $ABCD$ beachte man, dass dieselbe ein Quadrat ist; bezeichnet man eine Seite desselben, z. B. $AB$ mit $a$, so hat man hiernach:

$$g) \ldots G = a^2$$

Da aber das Dreieck $ABm$ ein bei $m$ rechtwinkliges Dreieck, in welchem $Am = Bm = \varrho$ ist, so hat man auch die Relation:

$$\overline{AB}^2 = \overline{Am}^2 + \overline{Bm}^2$$

bezw. die Relation:

$$a^2 = \varrho^2 + \varrho^2$$

oder:

$$h) \ldots a^2 = 2 \cdot \varrho^2$$

Substituiert man hierin den in der Erkl. 277 für $\varrho$ bezw. für $\varrho^2$ berechneten Wert, so erhält man nach der Gleich. g) und h) für den Inhalt der Grundfläche:

$$3) \ldots G = a^2 = 2 \cdot \varrho^2 = 8r^2 \cdot \frac{p^2 q^2}{(p^2 + q^2)^2}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man somit für das gesuchte Volumen $V$ der Pyramide:

$$V = 8r^2 \cdot \frac{p^2 q^2}{(p^2 + q^2)^2} \cdot \frac{2r \cdot p^2}{p^2 + q^2} : 3$$

oder:

$$V = \frac{16}{3} r^3 \cdot \frac{p^4 q^2}{(p^2 + q^2)^3}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

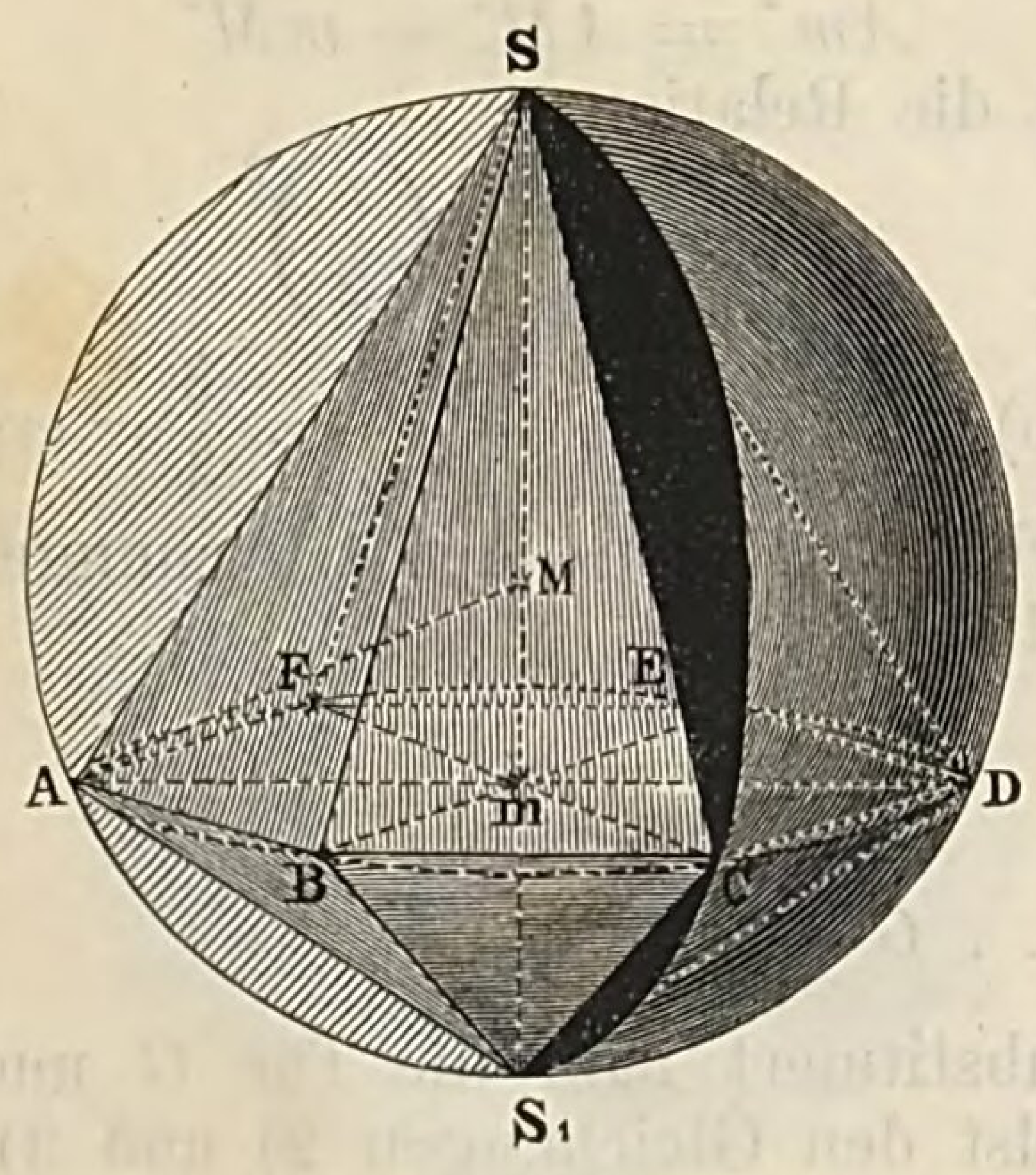
$$V = \frac{16}{3} \cdot 1{,}25^3 \cdot \frac{3^4 \cdot 2^2}{(3^2 + 2^2)^3}$$

oder nach nebensteh. Hülfsrechnung:

$$V = 1{,}536 \text{ cbm}$$

**Aufgabe 333.** Einer Kugel, deren Halbmesser $r = 12{,}73$ dm gegeben ist, sei eine sechsseitige gerade Pyramide einbeschrieben und zwar so, dass die Entfernung der Grundfläche vom Mittelpunkt der Kugel $= \frac{r}{2}$ ist. Wie gross ist der Radius einer andern Kugel, welche mit jener Pyramide gleiches Volumen hat?

Figur 75.




**Erkl. 278.** Nebenstehende Gleichung:

$$4) \ldots \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{9}{8} r^2 \sqrt{3}\left(r \pm \frac{r}{2}\right) : 3$$

reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{3}{8} r^2 \sqrt{3}\left(r \pm \frac{r}{2}\right)$$

$$x^3 = \frac{9}{32\pi} r^2 \sqrt{3}\left(r \pm \frac{r}{2}\right)$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{32\pi} \cdot r^2 \left(r \pm \frac{r}{2}\right)}$$

mithin erhält man:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{32\pi} \cdot r^2 \cdot \frac{3}{2} r}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{27\sqrt{3}}{64 \cdot \pi} \cdot r^3}$$

**Formeln:**

Für eine Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29)}$$

Für eine Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28, S. 11).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man den gesuchten Radius der Kugel, welche mit der 6-seitigen Pyramide, deren Grundfläche $= G$ und deren Höhe $= H$ sei, gleiches Volumen haben soll, mit $x$, so hat man unter Benutzung der vorsteh. Formeln die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{G \cdot H}{3}$$

Um hieraus die Grösse $x$ berechnen zu können, müssen zunächst die Grössen $G$ und $H$ in den gegebenen Radius $r$ der der Pyramide umbeschriebenen Kugel ausgedrückt werden.

Denkt man sich zu diesem Zwecke durch die Höhe (Axe) $Sm$ der Pyramide und durch eine Seitenkante, z. B. durch die Seitenkante $SA$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die Pyramide in dem gleichschenkligen Dreieck $SAD$ und die Kugel in einem grössten Kreis, welches der diesem Dreieck $SAD$ umbeschriebene Kreis ist.

Da nun der Aufgabe gemäss die Basis $ABCDEF$ der Pyramide um $Mm = \frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt der Kugel entfernt sein soll und man, wie in der Fig. 75 angedeutet ist, zu beiden Seiten dieser Fläche $ABCDEF$ je eine Pyramide mit den Spitzen $S$ und $S_1$ in die gedachte Kugel konstruieren kann, so hat man für die Höhe $H$ der Pyramide entweder:

$$Sm = SM + Mm = r + \frac{r}{2}$$

oder:

$$S_1 m = S_1 M - Mm = r - \frac{r}{2}$$

sonach ist:

$$2) \ldots H = r \pm \frac{r}{2}$$

Zur Berechnung des Inhalts $G$ der Grundfläche $ABCDEF$ beachte man,

oder:

$$\text{a)} \ldots x_1 = \frac{3}{4} r \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$$

und:

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{32\pi} \cdot r^2 \cdot \frac{r}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{64\pi} \cdot r^3}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots x_2 = \frac{r}{4} \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{\pi}}$$

**Hülfsrechnungen.**

1)

$$log\, x_1 = log\, 3 + log\, 12{,}73 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} log\, 3 - log\, \pi\right) - log\, 4$$

Nun ist:

$$log\, 3 = 0{,}4771213$$
$$+ log\, 12{,}73 = 1{,}1048284$$
$$1{,}5819497$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} log\, 3 - log\, \pi\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}4771213 - 0{,}4971499\right) = \frac{1}{3}\left(0{,}2385606 - 0{,}4971499\right) = \frac{1}{3} \cdot - 0{,}2585893 = - 0{,}0861964$$

$$1{,}4957533$$
$$- log\, 4 = - 0{,}6020600$$
$$log\, x_1 = 0{,}8936933$$
$$6952$$

mithin:

$$x_1 = 7{,}8288$$

2)

$$log\, x_2 = log\, 12{,}73 + \frac{1}{3} \cdot \left(log\, 9 + \frac{1}{2} \cdot log\, 3 - log\, \pi\right) - log\, 4$$

Nun ist:

$$log\, 12{,}73 = 1{,}1048284$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \left(log\, 9 + \frac{1}{2} \cdot log\, 3 - log\, \pi\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(0{,}9542425 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}4771213 - 0{,}4971499\right) = \frac{1}{3}\left(0{,}4570926 + 0{,}2385606\right) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}6956532 = + 0{,}2318844$$

$$1{,}3367128$$
$$- log\, 4 = - 0{,}6020600$$
$$log\, x_2 = 0{,}7346528$$
$$6558$$

mithin:

$$x_2 = 5{,}4282$$

dass dieselbe ein reguläres Sechseck ist; bezeichnet man eine Seite, z. B. $AB$ desselben mit $a$, so hat man nach der Erklärung 263, S. 164:

$$\text{a)} \ldots G = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}$$

Da nun die Seite $a$ des regulären 6-Ecks gleich dem Radius des demselben umschriebenen Kreises, also in Fig. 75, z. B. $= Am$ ist und sich aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $AmM$ die Relation:

$$\overline{Am}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{mM}^2$$

bezw. die Relation:

$$a^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

oder:

$$\text{b)} \ldots a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4} r^2 \text{ ergibt,}$$

so erhält man aus den Gleichungen a) und b):

$$G = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} \quad \text{oder:}$$

$$3) \ldots G = \frac{9}{8} r^2 \sqrt{3}$$

Substituiert man die für $G$ und $H$ mittelst den Gleichungen 2) und 3) gefundenen Werte in Gleichung 1), so erhält man:

$$4) \ldots \frac{4}{3} \pi x^3 = \frac{9}{8} r^2 \sqrt{3} \left(r \pm \frac{r}{2}\right) : 3$$

und hieraus ergibt sich nach der Erklärung 278 für den gesuchten Kugelradius $x$:

$$\text{A)} \ldots x_1 = \frac{3}{4} r \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$$

oder:

$$\text{B)} \ldots x_2 = \frac{r}{4} \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{\pi}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht des für $r$ gegebenen Zahlenwertes erhält man hiernach:

$$x_1 = \frac{3}{4} \cdot 12{,}73 \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$$

und:

$$x_2 = \frac{12{,}73}{4} \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{\pi}}$$

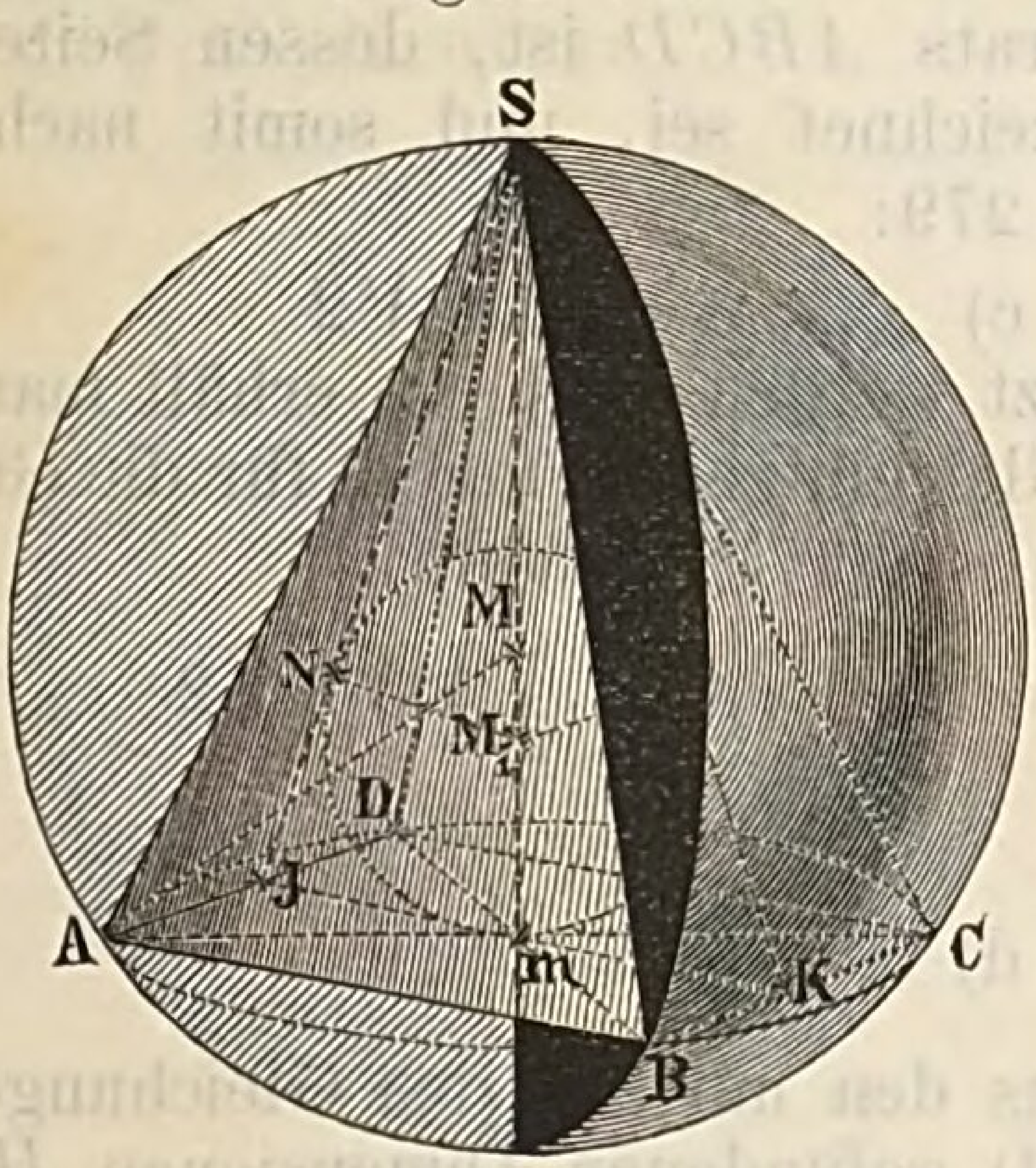
oder nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1) und 2):

$$x_1 = 7{,}83 \text{ dm}$$

und: $x_2 = 5{,}43$ dm

**Aufgabe 334.** Eine Kugel mit dem Radius $r$ ist in der Entfernung des halben Radius vom Mittelpunkt durchschnitten; in die somit erhaltene Schnittfigur ist ein Quadrat konstruiert und über demselben in dem grösseren der beiden Kugelsegmente eine gerade Pyramide, deren Spitze in der Kugeloberfläche liegt, errichtet. In welchem Verhältnis steht das Volumen jener dieser Pyramide umbeschriebenen Kugel zu dem Volumen der derselben einbeschriebenen Kugel?

Figur 76.




**Erkl. 279.** In jedem Quadrat halbieren sich die Diagonalen und stehen senkrecht aufeinander, mithin ist das Dreieck $ABm$ ein bei $m$ rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck und man hat:

$$\overline{AB}^2 = \overline{Am}^2 + \overline{Bm}^2$$

oder, da $Bm = Am$
und $AB = a$ ist:

$$a^2 = 2 \cdot \overline{Am}^2$$

woraus man:

$$a = Am\sqrt{2}$$

erhält.

**Formel:**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man das Volumen der Kugel, in welche die gedachte Pyramide konstruiert werden soll, also das Volumen der dieser Pyramide umbeschriebenen Kugel, deren Radius $r$ gegeben ist, mit $V$ und das Volumen der dieser Pyramide einbeschriebenen Kugel mit $v$ und deren noch unbekannten Radius mit $x$, so hat man unter Benutzung der vorstehenden Formel für das gesuchte Verhältnis:

$$V:v = \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi x^3$$

oder:

$$1) \;\ldots\; V:v = r^3 : x^3$$

Zur weiteren Bestimmung dieses Verhältnisses $V:v$ muss der Radius $x$ in den Radius $r$ ausgedrückt werden, was wie folgt geschieht.

Ist, siehe Figur 76, $ABCDS$ die in die gedachte Kugel konstruierte Pyramide und man denkt sich durch deren Höhe $Sm$ und eine Seitenkante, z. B. $AS$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die Pyramide in dem gleichschenkligen Dreieck $SAC$ und die gedachte Kugel in einem grössten Kreis, welches der dem Dreieck $SAC$ umbeschriebene Kreis um $M$ ist. Mit Hülfe dieser Schnittfigur kann man aus dem gegebenen Radius $r$ der der Pyramide umbeschriebenen Kugel die Dimensionen, nämlich die Höhe $Sm = H$ und eine Grundkante $AB = a$ bestimmen. Es ist nämlich:

$$a) \;\ldots\; H = Sm = SM + Mm = r + \frac{r}{2} = \frac{3}{2}r$$

weil die Schnittebene $ABCD$, der Aufgabe gemäss, in dem Abstand $Mm = \frac{r}{2}$

**Erkl. 280.** Nebenstehende Gleichung:

$$\text{f)} \; . \; . \; . \; \frac{r}{4}\sqrt{6} : x = \frac{3}{2}r : \sqrt{\left(\frac{3}{2}r - x\right)^2 - x^2}$$

reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{\sqrt{6}}{2} : x = 3 : \sqrt{\frac{9}{4}r^2 - 3rx + x^2 - x^2}$$

$$\frac{6}{4} : x^2 = 9 : \left(\frac{9}{4}r^2 - 3rx\right)$$

$$9x^2 = \frac{54}{16}r^2 - \frac{18}{4}rx$$

$$9x^2 + \frac{9}{2}rx = \frac{27}{8}r^2$$

$$x^2 + \frac{r}{2}x = \frac{3}{8}r^2$$

$$x^2 + \frac{r}{2}x + \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}r^2 + \left(\frac{r}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{r}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}r^2 + \frac{1}{16}r^2$$

$$x + \frac{r}{4} = \pm\sqrt{\frac{6r^2 + r^2}{16}} = -\sqrt{\frac{7r^2}{16}}$$

$$x = -\frac{r}{4} \pm \frac{r}{4}\sqrt{7}$$

mithin:

$$x = \frac{r}{4}(\sqrt{7} - 1)$$

Der zweite für $x$ sich ergebende Wert ist, als negativ, zu verwerfen.

vom Mittelpunkt $M$ der gedachten Kugel gelegt wurde.

Ferner erhält man aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $AmM$ die Relation:

$$\overline{Am}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{Mm}^2$$

bezw.:

$$\overline{Am}^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$$

oder:

$$\text{b)} \; . \; . \; . \; Am = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Da nun $Am$ die halbe Diagonale des Quadrats $ABCD$ ist, dessen Seite mit $a$ bezeichnet sei, und somit nach der Erkl. 279:

$$\text{c)} \; . \; . \; . \; a = Am\sqrt{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus den Gleichungen b) und c) für die Grundkante $a$ der Pyramide:

$$a = \frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

oder:

$$\text{d)} \; . \; . \; . \; a = \frac{r}{2}\sqrt{6}$$

Aus den mittelst den Gleichungen a) und d) gefundenen Dimensionen $H$ und $a$ der Pyramide muss nunmehr der Radius $x$ der dieser Pyramide einbeschriebenen Kugel berechnet werden. Denkt man sich zu diesem Zwecke, s. Fig. 76, wiederum durch die Höhe $Sm$ der Pyramide und durch eine seitliche Höhe, z. B. durch die Dreieckshöhe $SJ$ eine weitere Ebene gelegt, so schneidet dieselbe die Pyramide in dem gleichschenkligen Dreieck $SJK$ und die gedachte der Pyramide einbeschriebenen Kugel in einem grössten Kreis, welches der dem Dreieck $SJK$ einbeschriebene Kreis um $M_1$ ist. Fällt man von dem Mittelpunkte $M_1$ dieses Kreises auf die Seiten des Dreiecks $SJK$ die Senkrechten, so sind diese Senkrechten, wie $M_1N$ und $M_1m$ gleich dem gesuchten Radius $x$. Zur Bestimmung des Radius $x$ beachte man, dass die Dreiecke $JmS$ und $SNM_1$ ähnliche Dreiecke sind, dass somit unter anderm die Proportion:

$$Jm : M_1N = Sm : SN$$

besteht.

**Erkl. 281.** Nebenstehende Proportion:

$$V:v = r^3:\left(\frac{r}{4}(\sqrt{7}-1)\right)^3$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V:v = r^3:\frac{r^3}{4^3}(\sqrt{7}-1)^3$$
$$= 1:\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^3$$
$$= 1:\left(\frac{2,646-1}{4}\right)^3$$
$$= 1:\left(\frac{1,646}{4}\right)^3$$
$$= 1:0,4115^3$$

mithin:

$$V:v = 1:0,0697$$

Setzt man in derselben:

$$Jm = \frac{JK}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} = \frac{r}{4}\sqrt{6}$$

[s. Gleich. d)]

$$M_1N = x$$

$$Sm = H = \frac{3}{2}r \quad \text{[s. Gleich. a)]}$$

und:

$$SN = \sqrt{\overline{SM_1}^2 - \overline{M_1N}^2}$$
$$= \sqrt{(Sm - M_1m)^2 - M_1N^2}$$
$$= \sqrt{(H+x)^2 - x^2}$$

oder:

$$SN = \sqrt{\left(\frac{3}{2}r - x\right)^2 - x^2}$$

so geht dieselbe über in:

$$\text{f)}\quad \frac{r}{4}\sqrt{6}:x = \frac{3}{2}r:\sqrt{\left(\frac{3}{2}r - x\right)^2 - x^2}$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 280:

$$x = \frac{r}{4}(\sqrt{7}-1)$$

Setzt man diesen für $x$ gefundenen Wert in Gleich. 1) ein, so erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$V:v = r^3:\left(\frac{r}{4}(\sqrt{7}-1)\right)^3$$

oder nach der Erkl. 281:

$$V:v = 1:\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^3$$

bezw.:

$$V:v = 1:0,0697$$

---

**Aufgabe 335.** Um eine Kugel, deren Radius $r$ gegeben ist, soll ein gerader einseitiger Pyramidenstumpf beschrieben werden, dessen (grössere) Grundfläche ein Quadrat mit der Diagonale $= 4r$ ist. Welches ist das Volumen dieses Pyramidenstumpfs?

**Formel:**

Für einen Pyramidenstumpf:

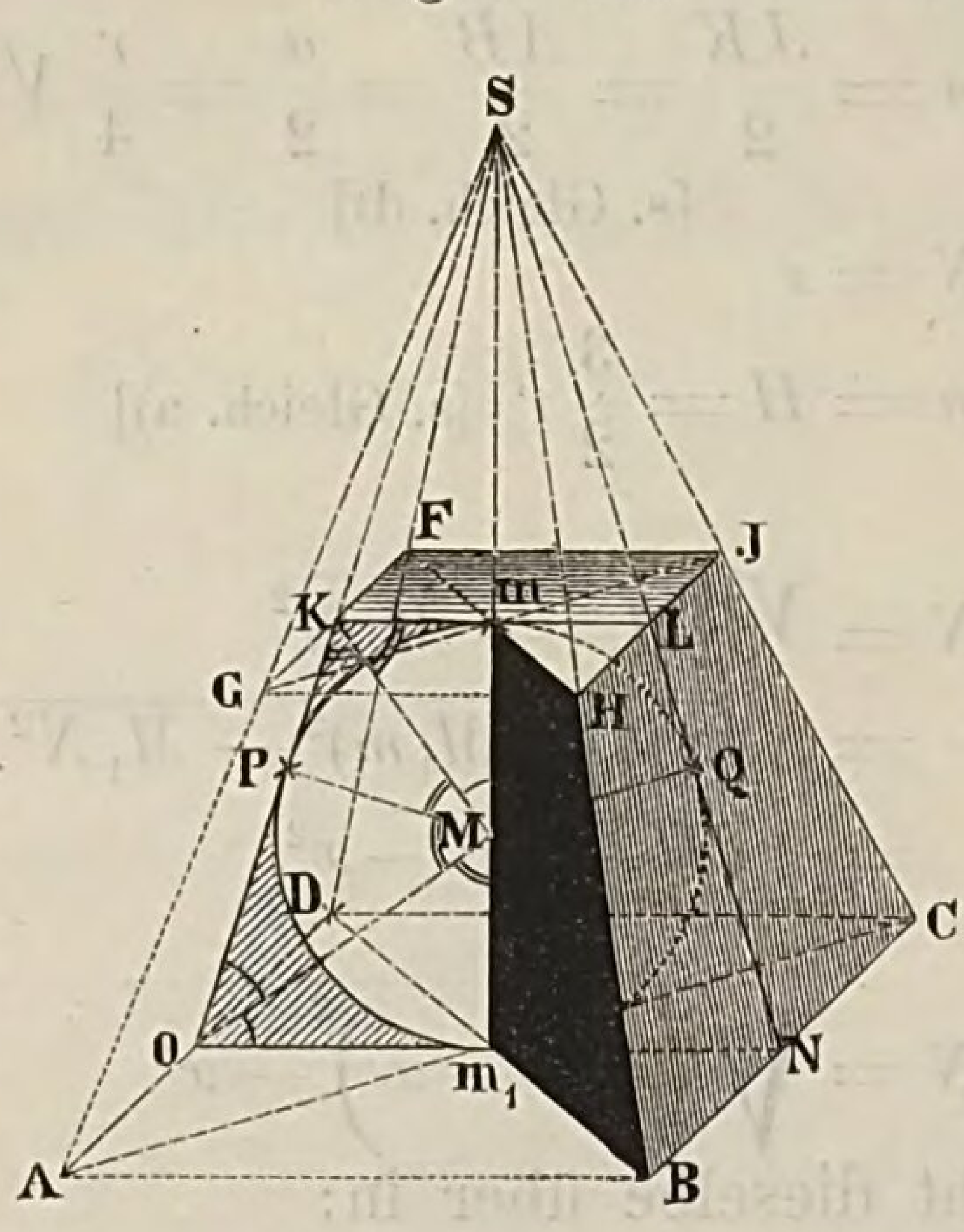
$$V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g) \quad \text{(s. Erkl. 31, S. 13).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ des um die Kugel konstruierten Pyramidenstumpfs dient vorstehende Formel:

$$1)\ \ldots\ V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

Um die in dieser Formel vorkommenden, noch unbekannten Grössen $H$, $G$ und $g$ in den gegebenen Radius $r$ der Kugel ausdrücken zu können, mache man folgende Betrachtung. Denkt man

Figur 77.




**Erkl. 282.** Fällt man, siehe Figur 77, in dem Viereck $Om_1mK$ von dem Mittelpunkt $M$ die Senkrechte $MP$ auf die Seite $OK$, so ist dieselbe gleich dem Radius $r$ des Kreises um $M$, weil das ganze Viereck $ONLK$ ein Tangentenviereck zu diesem Kreis ist.

Da nun: $KP = Km$

ebenso: $OP = Om_1$ (s. Erkl. 283) ist, so halbieren die Verbindungslinien $KM$ und $OM$ die Viereckswinkel, durch welche sie gehen und da ferner:

$$\sphericalangle PMm + \sphericalangle PMm_1 = 2R$$

und da: $\sphericalangle PMm + PKm = 2R$

ist, so folgt hieraus, dass:

$\sphericalangle PKm = \sphericalangle PMm_1$, bezw. dass $\sphericalangle OMm_1 = \sphericalangle MKm$ ist.

In analoger Weise könnte man darthun, dass:

$\sphericalangle MOm_1 = \sphericalangle KMm$ ist.

Aus der Gleichheit der Winkel folgt, dass:

$$\triangle KmM \sim \triangle Om_1M$$

**Erkl. 283.** Ein geometrischer Lehrsatz heisst:

„Die Tangenten (z. B. $Km$ und $KP$, oder $OM_1$ und $OP$, siehe Figur 77) von einem Punkte an einen Kreis sind gleich lang und der durch sie gebildete Winkel wird durch die Centrallinie halbiert.“

sich, siehe Figur 77, durch die Axe $mm_1$ des um die Kugel konstruiert gedachten Pyramidenstumpfs $ABCDFGHJ$ und durch eine seitliche Höhe der vollständigen Pyramide $ABCDS$, z. B. durch die Dreieckshöhe $SO$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Pyramidenstumpf in dem Antiparallelogramm $ONLK$ und die Kugel in einem grössten Kreis, welches der jenem Viereck $ONLK$ einbeschriebene Kreis ist. Aus dieser Schnittfigur ergibt sich zunächst, dass:

2) . . . $H = mm_1 = 2r$

ist.

Zur Berechnung des Inhalts $G$ der Grundfläche $ABCD$ beachte man, dass der Aufgabe gemäss:

$$AC = 4r$$

ist und dass, wenn die Seite $AB$ (oder $BC$) mit $a$ bezeichnet wird, in dem rechtwinkligen Dreieck $ABC$ die Relation:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

bezw. die Relation:

$$a^2 + a^2 = (4r)^2$$

besteht, woraus man:

$$2a^2 = 16r^2$$

oder:

3) . . . $G = a^2 = 8r^2$

und auch:

$$a = \sqrt{8r^2} \text{ oder:}$$

a) . . . $a = 2r\sqrt{2}$

erhält.

Zur Berechnung des Inhalts $g$ der Deckfläche $GHJF$ muss man zunächst eine Seite derselben, z. B. $GH$ oder $HJ$, welche mit $b$ bezeichnet sei, berechnen, da man alsdann:

b) . . . $g = b^2$

hat. Da nun:

$$b = GH = KL = 2 \cdot Km$$

ist und durch Verbindung des Punktes $M$ mit den Punkten $K$ und $O$ nach der Erkl. 282 die ähnlichen Dreiecke: $KmM$ und $Om_1M$, in welchen:

$$Km = \frac{b}{2} \text{ und}$$

$$Om_1 = \frac{ON}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

ist, entstehen und sich aus diesen Dreiecken die Proportion:

$$Km : Mm_1 = Mm : Om_1$$

bezw. die Proportion:

$$\frac{b}{2} : r = r : \frac{a}{2}$$

ergibt, aus welcher man:

$$\text{c)} \ldots b = \frac{4r^2}{a}$$

erhält, so ergibt sich aus den Gleichungen b) und c) für den Inhalt $g$:

$$g = \left(\frac{4r^2}{a}\right)^2$$

oder in Rücksicht der Gleich. a):

$$g = \left(\frac{4r^2}{2r\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{16r^4}{4r^2 \cdot 2}$$

mithin:

$$4) \ldots g = 2r^2$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) ergibt sich hiernach für das gesuchte Volumen $V$:

$$V = \frac{2r}{3}(8r^2 + \sqrt{8r^2 \cdot 2r^2} + 2r^2)$$

oder:

$$V = \frac{2r}{3}(8r^2 + 4r^2 + 2r^2)$$

$$V = \frac{2r}{3} \cdot 14r^2$$

mithin:

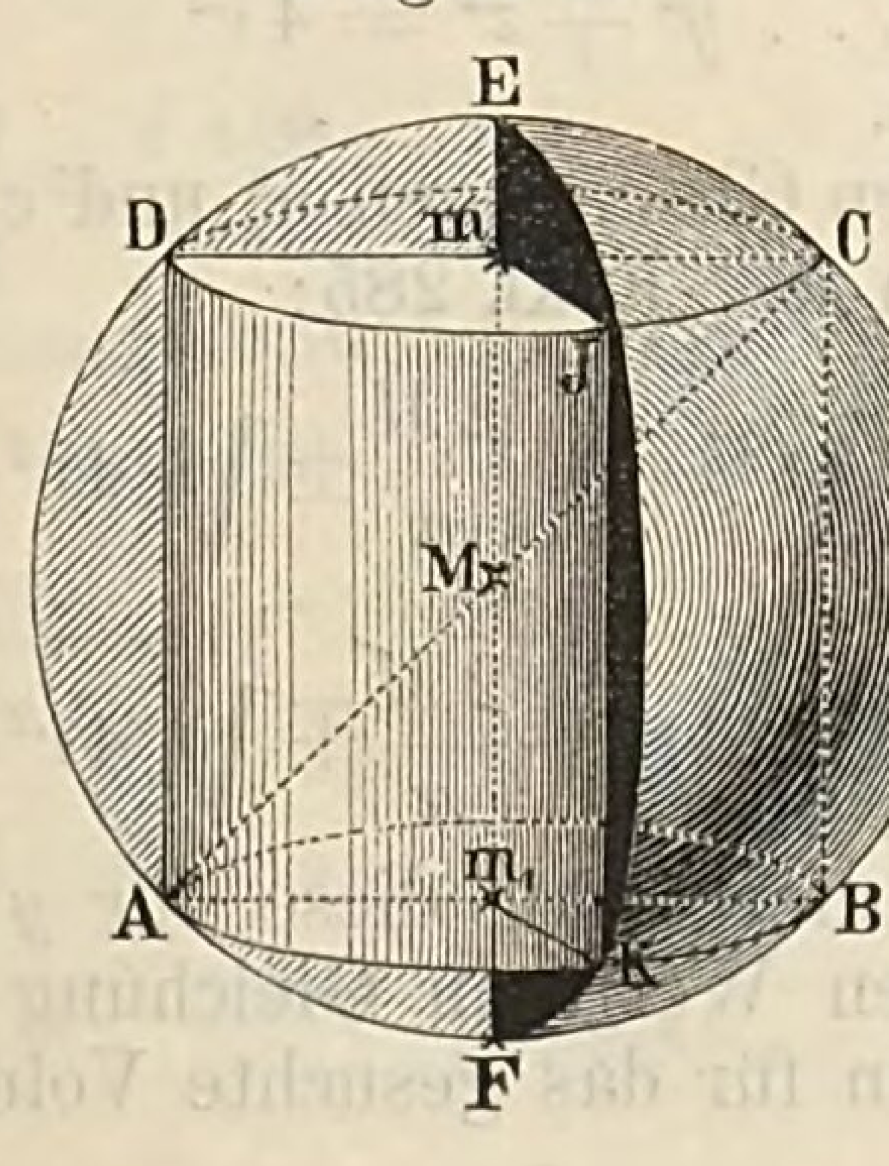
$$V = \frac{28}{3}r^3$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

---

**Aufgabe 336.** In einer Kugel von $V = 5{,}008$ cbm Inhalt ist ein gerader Cylinder einbeschrieben, dessen Mantelfläche $M = 4{,}08$ qm enthält. Wie gross ist das Volumen dieses Cylinders?

Figur 78.




**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67, S. 29)

Für einen Cylinder:

II. $V = R^2\pi \cdot H$ (s. Erkl. 33, S. 14)

III. $M = 2R\pi \cdot H$ (s. Erkl. 47, S. 20).

**Auflösung.** Bezeichnet man das gesuchte Volumen des Cylinders mit $x$, dessen unbekannte Höhe mit $y$ und dessen unbekannten Durchmesser mit $z$, so hat man nach vorstehender Formel II, die Relation:

$$x = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot y \quad \text{oder:}$$

$$1) \ldots x = \frac{\pi^2}{4} \cdot z \cdot y$$

**Erkl. 284.** Da in Figur 78 $\sphericalangle ADC$ ein **rechter Winkel** ist, so muss nach dem geometr. Lehrsatze:

„Alle Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises sind **rechte Winkel.**“

die Verbindungslinie $AC$ ein Durchmesser des Kreises um $M$ sein.

**Erkl. 285.** Aus nebenstehenden Gleichungen:

$$\text{a)} \; \ldots \; z \cdot y = \frac{M}{\pi}$$

$$\text{c)} \; \ldots \; y^2 + z^2 = 4r^2$$

erhält man $y$ und $z$, wie folgt:

Addiert man einmal und subtrahiert ein andermal das 2fache der Gleich. a) von Gleich. c), so erhält man die Gleichungen:

$$y^2 + 2zy + z^2 = 4r^2 + \frac{2M}{\pi}$$

$$y^2 - 2zy + y^2 = 4r^2 - \frac{2M}{\pi}$$

bezw. die Gleichungen:

$$(y+z)^2 = 4r^2 + \frac{2M}{\pi}$$

$$(y-z)^2 = 4r^2 - \frac{2M}{\pi}$$

oder die Gleichungen:

$$\alpha) \; \ldots \; y + z = \sqrt{4r^2 + \frac{2M}{\pi}} \; {}^{*)}$$

$$\beta) \; \ldots \; y - z = \pm\sqrt{4r^2 - \frac{2M}{\pi}}$$

Durch die Addition dieser Gleichungen ergibt sich:

$$2y = \sqrt{4r^2 + \frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2 - \frac{2M}{\pi}}$$

oder:

$$\gamma) \quad y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4r^2 + \frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2 - \frac{2M}{\pi}}\right]$$

Durch Subtraktion der Gleichungen $\alpha$) und $\beta$) ergibt sich:

$$2z = \sqrt{4r^2 + \frac{2M}{\pi}} \mp \sqrt{4r^2 - \frac{2M}{\pi}}$$

oder:

$$\delta) \quad z = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4r^2 + \frac{2M}{\pi}} \mp \sqrt{4r^2 - \frac{2M}{\pi}}\right]$$

*) Die Quadratwurzel in vorstehender Gleichung $\alpha$) kann nur positiv sein, da die negative Summe zweier Strecken $x$ und $y$ keinen Sinn zulässt.

Die unbekannten Grössen $z$ und $y$ müssen nunmehr in die gegebenen Stücke $V$ und $M$ ausgedrückt werden.

Setzt man in vorstehend. Formel III, $2R = z$ und $H = y$, so erhält man die Gleichung:

$$M = z \cdot \pi \cdot y$$

oder:

$$\text{a)} \; \ldots \; z \cdot y = \frac{M}{\pi}$$

Eine weitere Bestimmungsgleichung für $z$ und $y$ erhält man durch nachstehende Betrachtung.

Aus dem gegebenen Volumen $V$ findet man mittelst vorstehender Formel I. zunächst den Radius $r$ der Kugel; man erhält:

$$\text{b)} \; \ldots \; r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Denkt man sich ferner durch die Axe $mm_1$ des Cylinders $ABCD$, s. Figur 78, ihrer Längsrichtung nach, eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Cylinder in dem Rechteck $ABCD$ und die Kugel in einem grössten Kreis, welches der diesem Rechteck $ABCD$ umbeschriebene Kreis um $M$ ist. Zieht man in dem Rechteck die Diagonale $AC$, so muss diese Diagonale $AC$ nach der Erklärung 284 ein Durchmesser des Kreises um $M$ sein; da also in dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $ADC$:

$$AC = 2r$$

$$AD = H = y$$

und: $$DC = z$$

ist, so lässt sich für $z$ und $y$ die weitere Bestimmungsgleichung:

$$y^2 + z^2 = (2r)^2$$

oder:

$$\text{c)} \; \ldots \; y^2 + z^2 = 4r^2$$

aufstellen.

Aus den Gleichungen a) und c) erhält man nach der Erkl. 285:

$$2)\; y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4r^2 + \frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2 - \frac{2M}{\pi}}\right]$$

und:

$$3)\; z = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4r^2 + \frac{2M}{\pi}} \mp \sqrt{4r^2 - \frac{2M}{\pi}}\right]$$

Substituiert man diese für $y$ und $z$ gefundenen Werte in Gleichung 1), so erhält man für das gesuchte Volumen $x$:

$$x = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{4r^2+\frac{2M}{\pi}} \mp \sqrt{4r^2-\frac{2M}{\pi}}\right]\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\sqrt{4r^2+\frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2-\frac{2M}{\pi}}\right]$$

oder:

$$x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{4r^2+\frac{2M}{\pi}} \mp \sqrt{4r^2-\frac{2M}{\pi}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{4r^2+\frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2-\frac{2M}{\pi}}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{32}\cdot\left(4r^2+\frac{2M}{\pi} \mp 2\sqrt{\left(4r^2+\frac{2M}{\pi}\right)\cdot\left(4r^2-\frac{2M}{\pi}\right)} + 4r^2 - \frac{2M}{\pi}\right)$$
$$\cdot\left(\sqrt{4r^2+\frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2-\frac{2M}{\pi}}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{32}\left(8r^2 \mp 2\sqrt{\left(4r^2+\frac{2M}{\pi}\right)\left(4r^2-\frac{2M}{\pi}\right)}\right)\cdot\left(\sqrt{4r^2+\frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2-\frac{2M}{\pi}}\right)$$

oder:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{\pi}{16}\left(4r^2 \mp \sqrt{\left(4r^2+\frac{2M}{\pi}\right)\left(4r^2-\frac{2M}{\pi}\right)}\right)\cdot\left(\sqrt{4r^2+\frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{4r^2-\frac{2M}{\pi}}\right)$$

**Hülfsrechnungen:**

1) $r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 5{,}008}{4\cdot 3{,}141}} = \sqrt[3]{\frac{15{,}024}{4\cdot 3{,}141}} = \sqrt[3]{\frac{3{,}756}{3{,}141}}$

$\log r = \frac{1}{3}(\log 3{,}756 - \log 3{,}141)$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 3{,}756 &= \phantom{-}0{,}5747256 \\ -\log 3{,}141 &= -0{,}4971499 \\ & \phantom{=-}0{,}0775757 \\ & \phantom{=-}\cdot\tfrac{1}{3} \\ \log r &= \phantom{-}0{,}0258586 \\ & \phantom{=-0{,}02}8382 \\ & \phantom{=-0{,}025}204 \\ & \phantom{=-0{,}025}204{,}5 \end{aligned}$$

mithin:

$$r = 1{,}06135$$

2) $4r^2 = 4\cdot 1{,}06135^2$

$\log 4r^2 = \log 4 + 2\cdot\log 1{,}06135$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}06135 &= 0{,}0258586 \\ & \phantom{=0{,}025858}\cdot 2 \\ & \phantom{=}0{,}0517172 \\ +\log 4 &= 0{,}6020600 \\ \log 4r^2 &= 0{,}6537772 \\ & \phantom{=0{,}65}7719 \\ & \phantom{=0{,}6537}53 \\ & \phantom{=0{,}6537}57{,}6 \end{aligned}$$

mithin:

$$4r^2 = 4{,}50586$$

3) $\frac{2M}{\pi} = \frac{2\cdot 4{,}08}{3{,}141} = \frac{8{,}16}{3{,}141}$

$\log\frac{2M}{\pi} = \log 8{,}16 - \log 3{,}141$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 8{,}16 &= \phantom{-}0{,}9116902 \\ -\log 3{,}141 &= -0{,}4971499 \\ \log\frac{2M}{\pi} &= \phantom{-}0{,}4145403 \\ & \phantom{=-0{,}41}5388 \\ & \phantom{=-0{,}41453}15 \\ & \phantom{=-0{,}41453}16{,}8 \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{2M}{\pi} = 2{,}59741$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe, wobei zu berücksichtigen ist, dass nach der Gleich. b):

$$\text{B)} \ldots r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

gesetzt werden muss.

Zur Berechnung des in der Aufgabe gegebenen Zahlenbeispiels verfahre man, wie folgt:

Zuerst berechne man aus der Gleichung:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 5{,}008}{4\cdot 3{,}141}}$$

den Wert für $r$.

Nach Hülfsrechnung 1) erhält man:

$$r = 1{,}06135 \text{ m}$$

Dann berechne man die Ausdrücke $4r^2$ und

$$\left(4r^2+\frac{2M}{\pi}\right) \text{ und } \left(4r^2-\frac{2M}{\pi}\right)$$

Nach den Hülfsrechnungen 2) und 3) erhält man:

$$4r^2 = 4{,}50586$$
$$4r^2+\frac{2M}{\pi} = 4{,}50586 + 2{,}59741 = 7{,}10327$$
$$4r^2-\frac{2M}{\pi} = 4{,}50586 - 2{,}59741 = 1{,}90845$$

Obige allgemeine Form A) geht somit über in:

$$x = \frac{\pi}{16}(4{,}50586 \mp \sqrt{7{,}10327\cdot 1{,}90845})$$
$$\cdot(\sqrt{7{,}10327} \pm \sqrt{1{,}90845})$$

und hieraus erhält man nach den Hülfsrechnungen 4) und 5):

$$\text{C)} \ldots x = \frac{\pi}{16}(4{,}50586 \mp 2{,}6652\cdot 1{,}38147)$$
$$\cdot(2{,}6652 \pm 1{,}38147)$$

oder, wenn man nur die oberen Vorzeichen berücksichtigt:

$$x_1 = \frac{\pi}{16}(4{,}50586 \mp 3{,}68188)\cdot 4{,}04667$$

$$x_1 = \frac{\pi}{16}\cdot 0{,}82398\cdot 4{,}04667$$

4) $\log \sqrt{7,10327} = \frac{1}{2} \cdot \log 7,10327$

Nun ist:

$$\begin{array}{r} \log 7,10327 = 0,8514540 \\ 43,4 \\ \hline 0,8514583 \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \hline 0,4257291 \\ 7298 \end{array}$$

mithin:

$\sqrt{7,10327} = 2,6652$

5) $\log \sqrt{1,90845} = \frac{1}{2} \cdot \log 1,90845$

Nun ist:

$$\begin{array}{r} \log 1,90845 = 0,2806694 \\ 114 \\ \hline 0,2806808 \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \hline 0,1403404 \\ 3195 \\ \hline 209 \\ 219 \end{array}$$

mithin:

$\sqrt{1,90845} = 1,38147$

6) $\log x = \log 3,141 + \log 0,82398 + \log 4,04667 - \log 16$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} 3,141 = & 0,4971499 \\ + \log 0,82398 = & 0,9159167 - 1 \\ + \log 4,04667 = & 0,6070903 \\ & 75 \\ \hline & 2,0201644 - 1 \\ - \log 16 = & - 1,2041200 \\ \hline \log x = & 0,8160444 - 1 \\ & 0423 \\ \hline & 21 \end{array}$$

mithin:

$\text{numlog}\, x = 0,65470$

Aus dieser Gleichung erhält man schliesslich nach nebenstehender Hülfsrechnung 6):

$$x_1 = 0,6547 \text{ cbm}$$

Berücksichtigt man in vorstehender Gleichung C) die unteren Vorzeichen, so erhält man für $x$ einen 2. Wert, nämlich:

$$x_2 = \frac{\pi}{16}(4,50586 + 3,68188)(2,6652 - 1,38147)$$

oder:

$$x_2 = \frac{\pi}{16} \cdot 8,18774 \cdot 1,28373$$

$$x_2 = 2,0638 \text{ cbm}$$

---

**Aufgabe 337.** In einer Kugel mit dem Radius $r$ denke man sich einen geraden Cylinder, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, eingezeichnet. Wie gross sind die Volumina der vier Stücke, in welche die Begrenzungsflächen des Cylinders die Kugel teilen?

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

I. $V = R^2 \pi \cdot H$ (s. Erkl. 33, S. 14)

Für eine Kugelschicht:

II. $V = \frac{\pi h}{6}[3(\varrho^2 + \varrho_1^2) + h^2]$

(s. Erkl. 286)

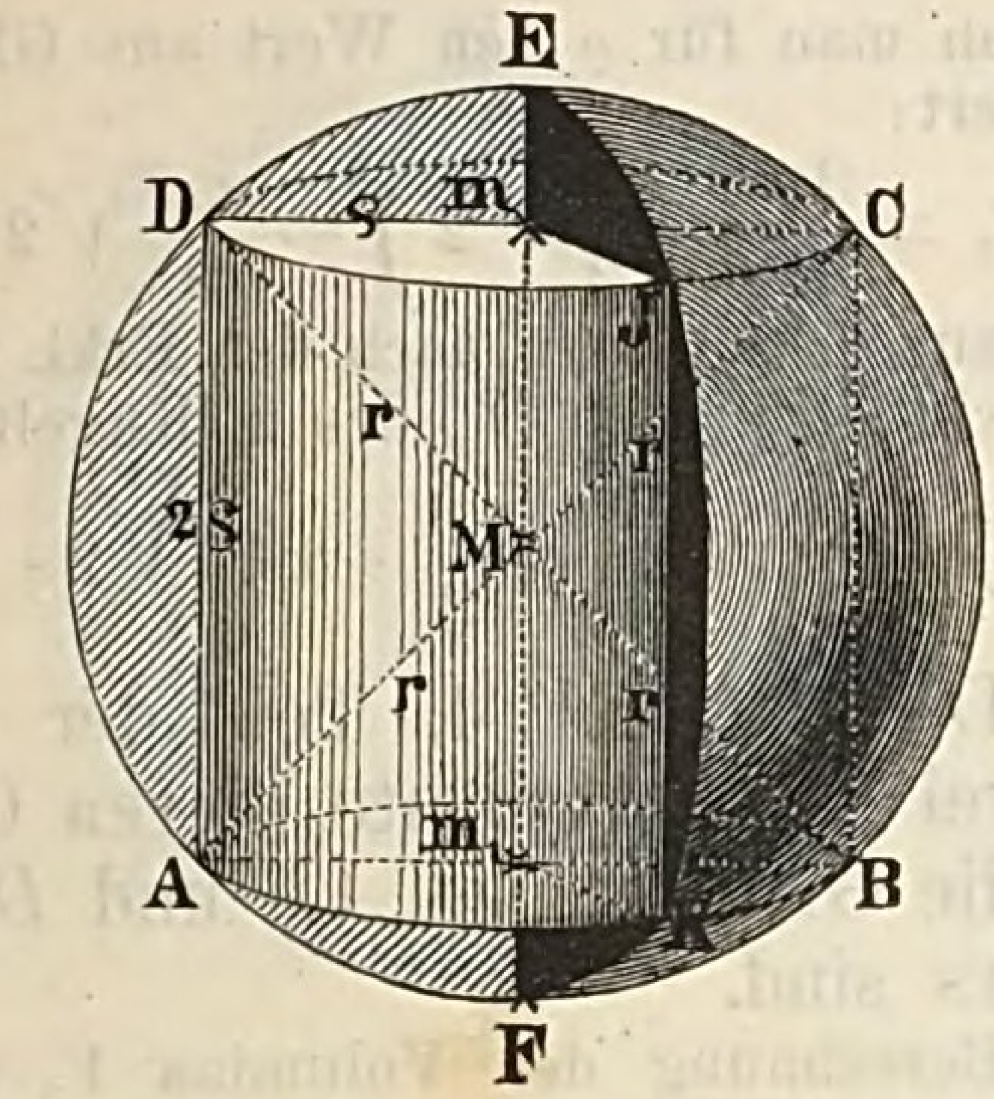
Für ein Kugelsegment:

III. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$

(s. Erkl. 151, S. 78)

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 79, durch die Längsrichtung der Axe $mm_1$ des in die Kugel konstruiert gedachten quadratischen Cylinders eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Cylinder in dem Quadrate $ABCD$ und

Figur 79.




**Erkl. 286.** Die Formel zur Berechnung des Volumens $V$ einer Kugelschicht, deren Begrenzungskreise die Radien $\varrho$ und $\varrho_1$ haben und dessen Höhe mit $h$ bezeichnet wird, ist:

$$V = \frac{\pi h}{6}[3(\varrho^2 + \varrho_1^2) + h^2].$$

Man siehe den Abschnitt im 1. Buch der Körperberechnungen, welcher über „**die Kugel**" handelt.

**Erkl. 287.** Das Volumen $V$ der zwischen den Parallelkreisen $AB$ und $DC$, siehe Figur 79, liegenden Kugelschicht ist, da diese Kreise kongruente Kreise mit den Radien $\varrho$ sind, und da die Höhe $mm_1$ derselben $= AD = 2\varrho$ ist, nach umstehender Formel II:

$$V = \frac{\pi \cdot 2\varrho}{6}[3(\varrho^2 + \varrho^2) + (2\varrho)^2]$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$V = \frac{\pi\varrho}{3}(3 \cdot 2\varrho^2 + 4\varrho^2)$$

$$V = \frac{\pi\varrho}{3} \cdot 10\varrho^2$$

mithin ist:

$$\alpha) \;.\;.\; V = \frac{10}{3}\pi \cdot \varrho^2$$

**Erkl. 288.** Nebenstehende Gleichung:

$$V_2 = \frac{10}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^3 - \frac{\pi r^3}{2}\sqrt{2}$$

reduziert gibt:

$$V_2 = \frac{10}{3}\pi \cdot \frac{r^3}{8} \cdot \sqrt{2^3} - \frac{\pi r^3}{2}\sqrt{2}$$

$$V_2 = \frac{5}{3}\pi \cdot \frac{r^3 \cdot 2}{4} \cdot \sqrt{2} - \frac{\pi r^3}{2}\sqrt{2}$$

$$V_2 = \pi r^3 \sqrt{2}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$V_2 = \pi r^3 \sqrt{2} \cdot \frac{2}{6}$$

oder:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^3 \sqrt{2}$$

die Kugel in einem grössten Kreise, welches der diesem Quadrate $ABCD$ umbeschriebene Kreis um $M$ ist.

Aus der Figur 79 ersieht man, dass die Begrenzungsflächen des Cylinders das Volumen der Kugel in vier Teile teilen, welche im nachstehenden aufgeführt und bezeichnet sind.

1) Ein Teil der Kugel wird von sämtlichen Flächen des Cylinders umschlossen, er ist also seiner Form, Grösse und Ausdehnung nach gleich dem Cylinder $ABCD$ selbst.

Zur Berechnung des Volumens $V_1$ dieses Teils dient vorstehende Formel I. Bezeichnet man den Radius eines Grundkreises des Cylinders mit $\varrho$, also den Durchmesser und auch die Höhe $H$ des Cylinders mit $2\varrho$, weil der Axenschnitt desselben, der Aufgabe gemäss, ein Quadrat sein soll, und berücksichtigt man, dass in dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $ADC$ die Relation:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$$

bezw. die Relation:

$$(2\varrho)^2 + (2\varrho)^2 = (2r)^2$$

besteht und dass man hieraus:

$$4\varrho^2 + 4\varrho^2 = 4r^2$$

oder:

$$\varrho^2 + \varrho^2 = r^2$$

$$2\varrho^2 = r^2, \text{ mithin:}$$

$$a) \;.\;.\;.\; \varrho = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

erhält, und dass also hiernach die Höhe

$$b) \;.\;.\;.\; H = mm_1 = AD = 2\varrho = r\sqrt{2}$$

ist, so erhält man nach vorstehender Formel I:

$$V_1 = \left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot r\sqrt{2}$$

oder:

$$V_1 = \frac{r^2}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{2}$$

mithin:

$$A) \;.\;.\;.\; V_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi r^3 \sqrt{2}$$

2) Ein zweiter Teil der Kugel ist ein kugelförmiger Ring, welcher umschlossen wird von dem Mantel des Cylinders und von der Kugelzone, welche begrenzt wird von den Grundkreisen $AB$ und $DC$ des Cylinders.

Zur Berechnung des Volumens $V_2$ dieses Kugelteils beachte man, dass derselbe eine Kugelschicht vorstellt, welche cylindrisch durchbohrt ist, dass man ihn somit als die Differenz der zwischen den Kreisen $AB$ und $DC$ liegenden Kugelschicht und des mittelst der Gleichung A) berechneten Teils $V_1$ betrachten kann. Unter Benutzung der vorstehenden Formel II., bezw. der in der Erkl. 287 entwickelten Gleichung $\alpha$) und der vorstehenden Gleichung A) hat man somit:

$$V_2 = \frac{10}{3}\pi\varrho^3 - \frac{\pi r^3}{2}\sqrt{2}$$

oder wenn man für $\varrho$ den Wert aus Gleich. a) substituiert:

$$V_2 = \frac{10}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^3 - \frac{\pi r^3}{2}\sqrt{2}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 288 für das gesuchte Volumen $V_2$ des 2. Kugelteils:

$$\text{B)} \ldots\; V_2 = \frac{1}{3}\cdot\pi r^3\sqrt{2}$$

3) Der 3. und 4. Teil der Kugel sind zwei Kugelsegmente, deren Grundkreise die Grundkreise $AB$ und $DC$ des Cylinders sind.

Zur Berechnung der Volumina $V_3$ und $V_4$ dieser Kugelteile beachte man, dass dieselben Kugelsegmente einer und derselben Kugel sind, deren Höhen $h$ einander gleich sind, indem die eine Höhe $= ME - Mm = r - \frac{mm_1}{2} = r - \varrho$ die andere $= MF - Mm_1$ nämlich ebenfalls $= r - \frac{mm_1}{2} = r - \varrho$ ist und dass dieselben hiernach kongruente Segmente sind. Mit Benutzung der vorstehenden Formel III. erhält man somit für die gesuchten Volumina $V_3$ und $V_4$ dieser beiden Teile:

$$V_3 = V_4 = \frac{\pi(r-\varrho)^2}{3}[3r - (r-\varrho)]$$

oder:

$$V_3 = V_4 = \frac{\pi(r-\varrho)^2}{3}\cdot(2r+\varrho)$$

Substituiert man hierin den mittelst Gleichung a) für $\varrho$ gefundenen Wert, so erhält man:

$$V_3 = V_4 = \frac{\pi\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2}{3}\left(2r + \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)$$

oder nach der Erkl. 289:

$$V_3 = V_4 = \frac{\pi r^3}{12}(8 - 5\sqrt{2})$$

*) Die Summe der 4 Teile muss gleich dem Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ der ganzen Kugel sein.

**Erkl. 289.** Nebenstehende Gleichung:

$$V_3 = V_4 = \frac{\pi\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2}{3}\left(2r + \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V_3 = V_4 = \frac{\pi}{3}\left(r^2 - r^2\sqrt{2} + \frac{r^2}{4}\cdot 2\right)\cdot r\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{2}r^2 - r^2\sqrt{2}\right)\cdot r\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi r^3}{3}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\cdot\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi r^3}{3}\left(3 - 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi r^3}{3}\left(2 - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi r^3}{3}\left(\frac{8 - 5\sqrt{2}}{4}\right)$$

oder:

$$V_3 = V_4 = \frac{\pi r^3}{12}(8 - 5\sqrt{2})$$

---

**Aufgabe 338.** In einer Kugel, deren Radius $r = 80$ cm gegeben, soll man einen geraden Cylinder beschreiben, dessen Volumen zu dem Volumen des ihn umgebenden kugelförmigen Ringes im Verhältnisse $m:n = 7:6$ steht. In welchen Abständen vom Mittelpunkt der Kugel kommen die Grundflächen des Cylinders zu liegen?

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

$$\text{I.}\quad V = R^2\pi\cdot H \quad \text{(s. Erkl. 33, S. 14)}$$

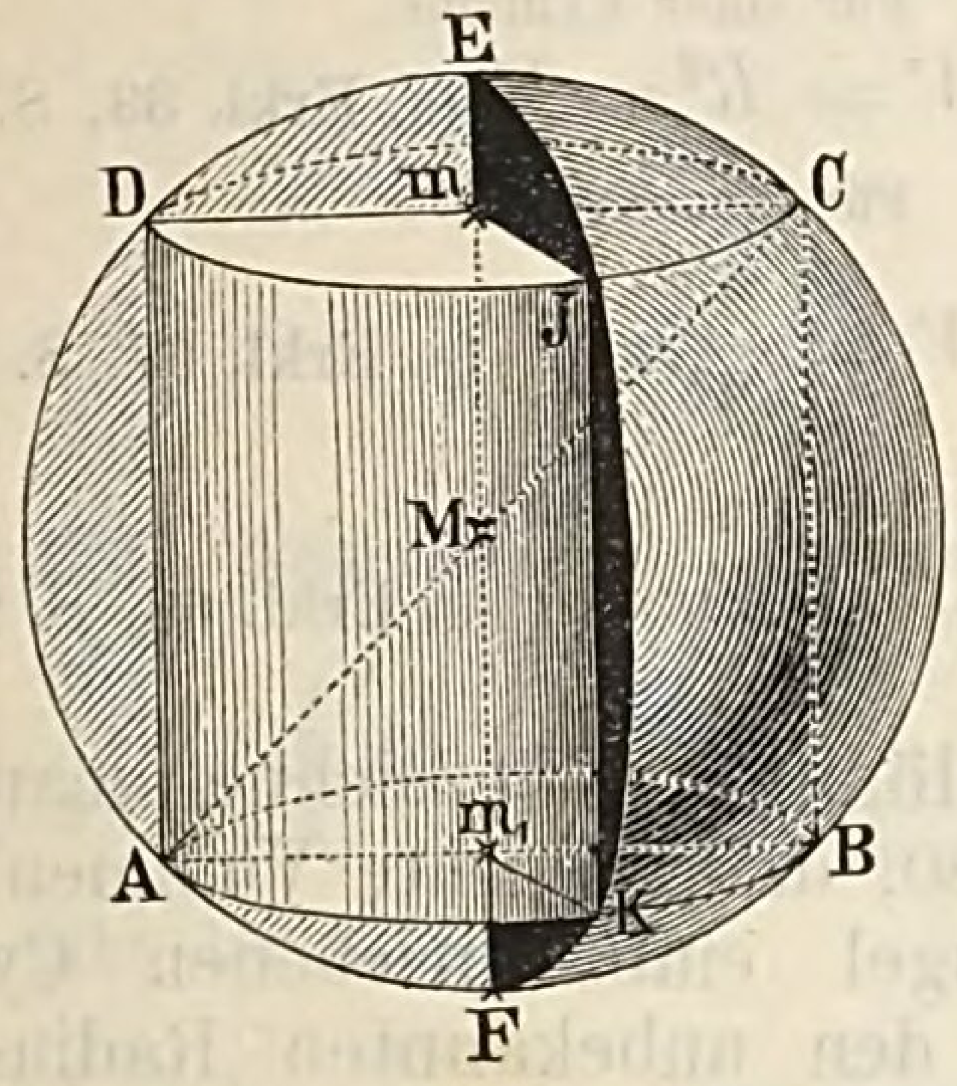
Für eine Kugelschicht:

$$\text{II.}\quad V = \frac{\pi h}{6}[3(\varrho^2 + \varrho_1^{\,2}) + h^2]$$

(s. Erkl. 286).

**Auflösung.** Figur 80 stellt die Durchschnittsfigur dar, welche entsteht, wenn man durch die Längsrichtung der Axe $mm_1$ des Cylinders eine Ebene gelegt denkt. Bezeichnet man die Höhe

Figur 80.




$mm_1$ des Cylinders $ABDC$, welche aus der Summe der beiden gleichen und gesuchten Abstände $Mm$ und $Mm_1$ besteht, mit $2x$; bezeichnet man ferner den Radius $Am_1$ ($Dm$) des Grundkreises des Cylinders mit $y$ und berücksichtigt man, dass das Volumen des um den Cylinder liegenden, ringförmigen Teils der Kugel aus der Differenz der Volumina der zwischen den gleichen Parallelkreisen $AB$ und $DC$ liegenden Kugelschicht, deren Höhe ebenfalls $= 2x$ und des Cylinders ist, so hat man zur Berechnung von $x$ mit Benutzung der vorstehenden Formeln I. und II., der Aufgabe gemäss, die Bestimmungsgleichung:

$$y^2 \cdot \pi \cdot 2x : \left[\frac{\pi \cdot 2x}{6}[3(y^2+y^2)+(2x)^2] - y^2 \cdot \pi \cdot 2x\right] = m : n$$

oder die sich nach der Erkl. 290 hieraus ergebende einfachere Gleichung:

$$1) \;.\;.\;.\; 2mx^2 - 3ny^2 = 0$$

Eine weitere Gleichung ergibt sich aus der Betrachtung, dass z. B. das Dreieck $MmC$ ein bei $m$ rechtwinkliges ist, dass in demselben $MC = r$, $Mm = x$ und $mC = y$ ist. Man erhält aus demselben die Relation:

$$2) \;.\;.\;.\; x^2 + y^2 = r^2$$

Substituiert man nunmehr den sich aus Gleich. 2) für $y^2$ ergebenden Wert:

$$y^2 = r^2 - x^2$$

in Gleich. 1), so resultiert:

$$2mx^2 - 3n(r^2 - x^2) = 0$$

und hieraus erhält man der Reihe nach:

$$2mx^2 - 3nr^2 + 3nx^2 = 0$$

$$x^2(2m + 3n) = 3nr^2$$

$$x^2 = \frac{3nr^2}{2m+3n} \quad \text{oder:}$$

$$A) \;.\;.\;.\; x = r\sqrt{\frac{3n}{2m+3n}}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = 80\sqrt{\frac{3\cdot 6}{2\cdot 7 + 3\cdot 6}} = 80\sqrt{\frac{18}{14+18}}$$

$$x = 80\sqrt{\frac{18}{32}} = 80\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x = 80\cdot\frac{3}{4} = 20\cdot 3 \quad \text{oder:}$$

$$x = 60 \text{ cm}$$

**Erkl. 290.** Nebenstehende Gleichung:

$$y^2\cdot\pi\cdot 2x : \left[\frac{\pi\cdot 2x}{6}[3(y^2+y^2)+(2x)^2] - y^2\cdot\pi\cdot 2x\right] = m : n$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{2\pi x y^2}{\frac{\pi x}{3}(6y^2+4x^2) - 2\pi x y^2} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{2\pi x y^2}{\frac{\pi x}{3}(6y^2+4x^2-6y^2)} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{6y^2}{4x^2} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{3y^2}{2x^2} = \frac{m}{n}$$

$$2mx^2 = 3ny^2$$

$$2mx^2 - 3ny^2 = 0$$

**Aufgabe 339.** Das Volumen einer Kugel ist $V = 14391\frac{1}{3}$ cbm. In gleichen Abständen vom Mittelpunkte $M$ der Kugel werden zwei parallele Ebenen gelegt, welche auf der Oberfläche der Kugel eine Zone begrenzen, deren Inhalt $J = 1896{,}17$ qcm beträgt. Wie gross ist das Volumen des Cylinders, welcher jener Kugel einbeschrieben ist und dessen Grundflächen in jenen Schnittebenen liegen?

**Formeln:**

Für einen Cylinder.

I. $V = R^2\pi \cdot H$ (s. Erkl. 33, S. 14.

Für eine Kugel:

II. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67, S. 29).

Für eine Zone:

III. $J = 2\pi r \cdot h$ (s. Erkl. 63, S. 29).

**Auflösung.** Bezeichnet man, siehe Figur 80, das gesuchte Volumen des in die Kugel einbeschriebenen Cylinders mit $x$, den unbekannten Radius einer seiner Grundflächen $AB$ oder $DC$ mit $y$ und die unbekannte Höhe $mm_1$ desselben, d. i. zugleich auch die Höhe der Kugelzone, deren Inhalt $J$ gegeben ist, mit $z$, so hat man nach vorstehender Formel I. die Gleichung.

$$1) \ldots x = y^2 \cdot \pi \cdot z$$

Bezeichnet man ferner den unbekannten Radius der Kugel mit $u$, so hat man nach vorstehenden Formeln II. und III. die weiteren Gleichungen:

$$2) \ldots V = \frac{4}{3}\pi \cdot u^3$$

$$3) \ldots J = 2\pi u \cdot z$$

Schliesslich ergibt sich noch aus dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $ADC$ die Gleichung:

$$4) \ldots z^2 = (2u)^2 - (2y)^2$$

Man hat somit 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, aus welchen die unbekannte Grösse $x$ zu berechnen ist.

Aus Gleichung 2) erhält man für den Radius $u$ der Kugel:

$$a) \ldots u = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Aus Gleichung 3) ergibt sich ferner für die Höhe $z$ der Zone, bezw. des Cylinders:

$$z = \frac{J}{2\pi \cdot u}$$

oder in Rücksicht der Gleich. a):

$$b) \ldots z = \frac{J}{\sqrt[3]{6\pi^2 V}} \text{ (s. Erkl. 291).}$$

Aus Gleich. 4) erhält man:

$$4y^2 = 4u^2 - z^2$$

**Erkl. 291.** Setzt man in der Gleichung:

$$z = \frac{J}{2\pi \cdot u}$$

für $u = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ [s. nebensteh. Gleich. a)],

so geht dieselbe über in:

$$z = \frac{J}{2\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}}$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$z = \frac{J}{\sqrt[3]{\frac{8\pi^3 \cdot 3V}{4\pi}}}$$

oder:

$$z = \frac{J}{\sqrt[3]{6\pi^2 \cdot V}}$$

**Erkl. 292.** Setzt man in der Gleichung:

$$4y^2 = 4u^2 - z^2$$

für $z$ und $u$ die sich aus nebenstehenden Gleichungen a) und b) ergebenden Werte, so geht derselbe über in:

$$4y^2 = 4 \cdot \sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}} - \frac{J^2}{\sqrt[3]{36\pi^4 V^2}}$$

und hieraus erhält man:

$$y^2 = \sqrt[3]{\frac{9V^2}{2^3 \cdot 2 \cdot \pi^2}} - \frac{J^2}{4\sqrt[3]{36 \cdot \pi^3 \cdot \pi \cdot V^2}}$$

oder:

$$y^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}} - \frac{J^2}{4\pi\sqrt[3]{36\pi V^2}}$$

**Erkl. 293.** Nebenstehende Gleichung:

$$x = \pi \cdot \frac{J}{\sqrt[3]{6\pi^2 V}} \cdot \left( \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}} - \frac{J^2}{4\pi\sqrt[3]{36\pi V^2}} \right)$$

reduziert gibt der Reihe nach:

$$x = \pi \cdot J \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{9V^2}{12\pi^4 V}} - \frac{J^2}{4\pi\sqrt[3]{6^3 \cdot \pi^3 \cdot V^3}} \right)$$

$$x = \pi J \cdot \left( \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi^3 \cdot \pi}} - \frac{J^2}{4\pi \cdot 6 \cdot \pi \cdot V} \right)$$

$$x = \pi J \cdot \left( \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6V}{(2\pi)^3 \cdot \pi}} - \frac{J^2}{4\pi \cdot 6\pi \cdot V} \right)$$

$$x = \pi J \cdot \left( \frac{1}{4\pi}\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} - \frac{J^2}{4\pi \cdot 6\pi \cdot V} \right)$$

$$x = \frac{\pi J}{4\pi}\left( \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} - \frac{J^2}{6\pi V} \right)$$

oder:

$$x = \frac{J}{4}\left( \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} - \frac{J^2}{6\pi V} \right)$$

**Hülfsrechnungen:**

1) $log \frac{1896,17}{4}\sqrt[3]{\frac{6 \cdot 14391,33}{\pi}}$

$= \frac{1}{3} \cdot (log 6 + log 14391,33 - log \pi) + log 1896,17 - log 4$

| | | |
|---|---|---|
| Nun ist: | $log 6 =$ | 0,7781513 |
| | $+ log 14391,33 =$ | 4,1580910 |
| | | + 90,6 |
| | | 9,1 |
| | | 4,9362523 |
| | $- log \pi = -$ | 0,4971499 |
| | | 4,4391024 |
| | | $\cdot \frac{1}{3}$ |
| | | 1,4797008 |
| | $+ log 1896,17 =$ | 3,2778612 |
| | | + 160 |
| | | 4,7575780 |
| | $- log 4 = -$ | 0,6020600 |
| | | 4,1555180 |
| | | 5182 |

mithin ist:

$$\frac{1896,17}{4}\sqrt[3]{\frac{6 \cdot 14391,33}{\pi}} = \underline{\underline{14306}}$$

oder in Rücksicht der mittelst den Gleich. a) und b) für $z$ und $u$ gefundenen Werte:

$$\text{c)} \ldots y^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}} - \frac{J^2}{4\pi\sqrt[3]{36\pi V^2}}$$

(s. Erkl. 292).

Substituiert man endlich die mittelst den Gleichungen c) und b) für $y^2$ und $z$ gefundenen Werte in Gleich. 1), so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Cylinders:

$$x = \pi \cdot \frac{J}{\sqrt[3]{6\pi^2 V}} \cdot \left( \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}} - \frac{J^2}{4\pi\sqrt[3]{36\pi V^2}} \right)$$

oder nach gehöriger Reduktion, siehe Erkl. 293:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{J}{4} \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} - \frac{J^2}{6\pi V} \right)$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = \frac{1896,17}{4}\left( \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 14391,33}{\pi}} - \frac{1896,17^2}{6\pi \cdot 14391,33} \right)$$

Da nun jeder der Summanden in der Klammer einzeln für sich berechnet werden muss, so schreibt man besser:

$$x = \frac{1896,17}{4}\sqrt[3]{\frac{6 \cdot 14391,33}{\pi}} - \frac{1896,17^3}{24\pi \cdot 14391,33}$$

und berechnet jeden Summanden, wie in den Hülfsrechnungen 1) bis 3) geschehen ist, auf logarithmische Weise. Man erhält:

$$x = 14306 - 6283$$

oder:

$$x = 8023 \text{ cbm}$$

2) $log \frac{1896{,}17^3}{24 \cdot \pi \cdot 14391{,}33} = 3 \cdot log\, 1896{,}17 - (log\, 24 + log\, \pi + log\, 14391{,}33)$

Nun ist:

$$\begin{array}{rr} log\, 1896{,}17 = & 3{,}2778612 \\ & +160 \\ \hline & 3{,}2778772 \\ & \cdot 3 \\ \hline & 9{,}8336316 \\ -(log\, 24 + log\, \pi + log\, 14391{,}33) = & -6{,}0354621 \\ \text{(s. Hülfsrechnung 3)} & \overline{3{,}7981695} \\ & 1671 \\ \hline & 24 \\ & 27{,}6 \end{array}$$

mithin ist:

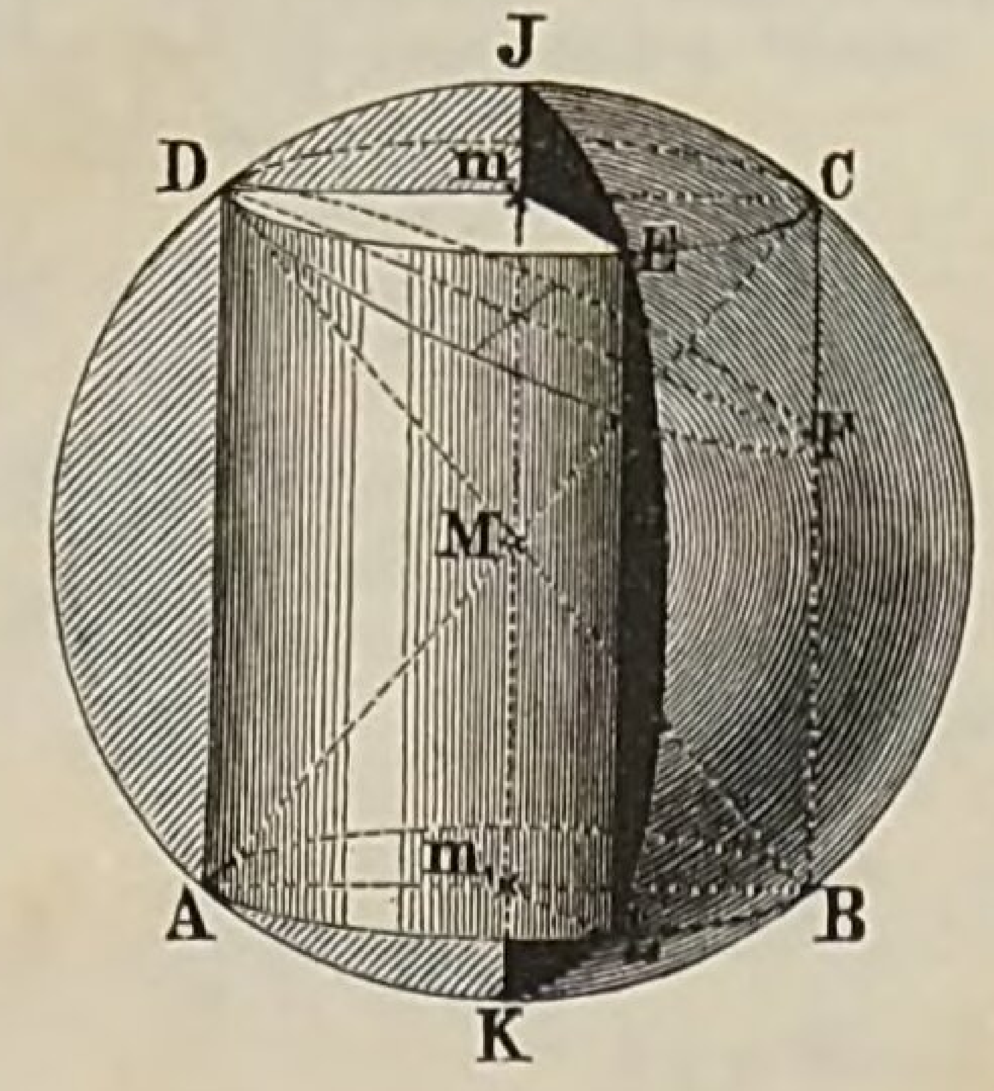
$$\frac{1896{,}17^3}{24 \cdot \pi \cdot 14391{,}33} = \underline{\underline{6283{,}04}}$$

3) Man hat:

$$\begin{array}{rr} log\, 24 = & 1{,}3802112 \\ + log\, \pi = & 0{,}4971499 \\ + log\, 14391{,}33 = & 4{,}1580910 \\ & +90{,}6 \\ & 9{,}1 \\ \hline (log\, 24 + log\, \pi + log\, 14391{,}33) = & 6{,}0354621 \end{array}$$

**Aufgabe 340.** In eine Kugel mit dem Radius $r$ ist ein senkrechter Cylinder konstruiert, dessen Gesamtoberfläche $\frac{4}{5}$ der Kugeloberfläche ist. Wie gross ist der Inhalt dieses Cylinders? — Und wenn man, vom Umfange des oberen Grundkreises ausgehend, eine Ebene senkrecht auf das den Ausgangspunkt enthaltende Axenparallelogramm so durch den Cylinder legt, dass von der gegenüberliegenden Seitenlinie des Cylinders oben $\frac{1}{3}$ abgeschnitten wird; wie gross ist die Mantelfläche des unten übrig bleibenden Cylinderstücks?

Figur 81.




**Formeln:**

Für einen Cylinder:

I. $V = R^2\pi \cdot H$ (s. Erkl. 33, S. 14)

II. $O = 2R\pi \cdot H + 2R^2\pi$ (s. Erkl. 294)

Für eine Kugel:

III. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28).

**Auflösung** des 1. Teils der Aufgabe. Bezeichnet man das gesuchte Volumen des der Kugel einbeschriebenen Cylinders mit $x$, den unbekannten Radius eine seiner Grundflächen mit $y$ und seine unbekannte Höhe mit $z$, so hat man nach vorstehender Formel I. die Gleichung:

1) . . . $x = y^2\pi \cdot z$

Dann hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln II. und III, die Gleichung:

$$2y\pi \cdot z + 2 \cdot y^2\pi = \frac{4}{5} \cdot 4r^2\pi$$

bezw. die durch Reduktion erhaltene einfachere Gleichung:

2) . . . $yz + y^2 = \frac{8}{5} r^2$

**Erkl. 294.** Die Oberfläche $O$ eines geraden Cylinders besteht aus der Mantelfläche: $M = 2R\pi \cdot H$ (siehe Erkl. 47, S. 20) und aus der Summe der Inhalt der beiden kongruenten Kreisflächen. Man hat somit:

$$O = 2R\pi \cdot H + 2 \cdot R^2\pi$$

oder:

$$O = 2R\pi(H + R)$$

Man siehe das 1. Buch der Körperberechnungen, speziell den Abschnitt, welcher über „**den Cylinder**“ handelt.

**Erkl. 295.** Nebenstehende Gleichung:

$$y^2 + y\sqrt{4r^2 - 4y^2} = \frac{8}{5}r^2$$

nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$y\sqrt{4r^2 - 4y^2} = \frac{8}{5}r^2 - y^2$$

$$(y\sqrt{4r^2 - 4y^2})^2 = \left(\frac{8}{5}r^2 - y^2\right)^2$$

$$y^2(4r^2 - 4y^2) = \frac{64}{25}r^4 - \frac{16}{5}r^2y^2 + y^4$$

$$4r^2y^2 - 4y^4 = \frac{64}{25}r^4 - \frac{16}{5}r^2y^2 + y^4$$

$$5y^4 - \frac{16}{5}r^2y^2 - 4r^2y^2 = -\frac{64}{25}r^4$$

$$5y^4 - \left(\frac{16}{5}r^2 + 4r^2\right)y^2 = -\frac{64}{25}r^4$$

$$5y^4 - \frac{36}{5}r^2y^2 = -\frac{64}{25}r^4$$

$$y^4 - \frac{36}{25}r^2y^2 = -\frac{64}{125}r^4$$

$$(y^2)^2 - \frac{36}{25}r^2 \cdot y^2 + \left(\frac{36}{2 \cdot 25}r^2\right)^2 = -\frac{64}{125}r^4 + \left(\frac{36}{2 \cdot 25}r^2\right)^2$$

$$\left(y^2 - \frac{18}{25}r^2\right)^2 = -\frac{64}{125}r^4 + \frac{324}{25^2}r^4$$

$$y^2 - \frac{18}{25}r^2 = \pm\sqrt{\frac{-64 \cdot 5r^4 + 324r^4}{25^2}}$$

$$y^2 = \frac{18}{25}r^2 \pm \sqrt{\frac{4r^4}{25^2}} = \frac{18}{25}r^2 \pm \frac{2}{25}r^2$$

hieraus erhält man für $y^2$ zwei Werte, nämlich:

$$y_1^2 = \frac{20}{25}r^2 \text{ und:}$$

$$y_2^2 = \frac{16}{25}r^2$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für $y$ die Werte:

$$y_1 = \pm\sqrt{\frac{20}{25}r^2} = \sqrt{\frac{4r^2}{25} \cdot 5} \text{ *)}$$

oder:

*) Das negative Vorzeichen dieser Wurzel lässt für $y$ keinen Sinn zu.

Ferner besteht in dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $ADC$ die Relation:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$$

mithin hat man noch die weitere Gleichung:

$$z^2 + (2y)^2 = (2r)^2$$

oder:

$$3) \; \ldots \; z^2 + 4y^2 = 4r^2$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man die gesuchte Grösse $x$, wie folgt:

Aus Gleichung 3) ergibt sich zunächst:

$$a) \; \ldots \; z = \sqrt{4r^2 - 4y^2}$$

substituiert man diesen Wert in Gleichung 2), so ist:

$$y^2 + y\sqrt{4r^2 - 4y^2} = \frac{8}{5}r^2$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 295 für $y$ die beiden Werte:

$$b) \; \ldots \; \begin{cases} y_1 = \frac{2r}{5}\sqrt{5} \text{ **)} \\ y_2 = \frac{4}{5}r \end{cases}$$

Setzt man diese Werte für $y$ in Gleichung a), so erhält man für $z$ die Werte:

$$z_1 = \sqrt{4r^2 - 4 \cdot \left(\frac{2r}{5}\sqrt{5}\right)^2}$$

und:

$$z_2 = \sqrt{4r^2 - 4 \cdot \left(\frac{4}{5}r\right)^2}$$

oder nach gehöriger Reduktion, siehe die Erkl. 296 und 297, die Werte:

$$c) \; \ldots \; \begin{cases} z_1 = \frac{2r}{5}\sqrt{5} \text{ **)} \\ z_2 = \frac{6}{5}r \end{cases}$$

Substituiert man endlich die zusammengehörigen Werte für $y$ und $z$ in die Gleichung 1), so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Cylinders die Werte:

$$V_1 = \left(\frac{2r}{5}\sqrt{5}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{2r}{5}\sqrt{5}$$

und:

$$V_2 = \left(\frac{4}{5}r\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{6}{5}r$$

**) Es sind somit zwei Cylinder möglich, welche der verlangten Bedingung entsprechen.

$$\alpha) \ldots y_1 = \frac{2r}{5}\sqrt{5}$$

und:

$$y_2 = \pm\sqrt{\frac{16}{25}r^2} \text{ *)}$$

oder:

$$\beta) \ldots y_2 = \frac{4}{5}r$$

*) Das negative Vorzeichen dieser Wurzel lässt für $y$ keinen Sinn zu.

**Erkl. 296.** Aus der Gleichung:

$$z_1 = \sqrt{4r^2 - 4\cdot\left(\frac{2r}{5}\sqrt{5}\right)^2}$$

erhält man durch Reduktion:

$$z_1 = \sqrt{4r^2 - 4\cdot\frac{4r^2\cdot 5}{25}}$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{160r^2 - 80r^2}{25}} = \sqrt{\frac{20r^2}{25}}$$

oder:

$$z_1 = \frac{2r}{5}\sqrt{5}$$

**Erkl. 297.** Aus der Gleichung:

$$z_2 = \sqrt{4r^2 - 4\cdot\left(\frac{4}{5}r\right)^2}$$

erhält man durch Reduktion:

$$z_2 = \sqrt{4r^2 - 4\cdot\frac{16r^2}{25}}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{100r^2 - 64r^2}{25}} = \sqrt{\frac{36r^2}{25}}$$

oder:

$$z_2 = \frac{6r}{5}$$

**Erkl. 298.** Aus der Gleichung:

$$x_1 = \left(\frac{27}{5}\sqrt{5}\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{2r}{5}\sqrt{5}$$

erhält man durch Reduktion:

$$x_1 = \frac{4r^2\cdot 5}{25}\cdot\pi\cdot\frac{2r}{5}\sqrt{5}$$

oder:

$$x_1 = \frac{8}{25}\pi r^3\sqrt{5}$$

**Erkl. 299.** Aus der Gleichung:

$$x_2 = \left(\frac{4}{5}r\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{6}{5}r$$

erhält man durch Reduktion:

$$x_2 = \frac{16r^2}{25}\cdot\pi\cdot\frac{6}{5}r$$

oder:

$$x_2 = \frac{96}{125}\pi r^3$$

oder nach gehöriger Reduktion, siehe die Erkl. 298 und 299, die Werte:

$$\text{A)} \ldots \begin{cases} x_1 = \frac{8}{25}\pi r^3\sqrt{5} \\ \text{und:} \\ x_2 = \frac{96}{125}\pi r^3 \end{cases}$$

als **allgemeine** Lösung des 1. Teils der Aufgabe.

**Auflösung** des 2. Teils der Aufgabe. Denkt man sich, wie in der Aufgabe erwähnt, durch den Punkt $D$ der oberen Grundfläche eine Ebene senkrecht durch das Axenparallelogramm $ABCD$ des Cylinders gelegt, so erhält man als Schnittfigur mit dem Cylinder eine Ellipse (siehe die Figuren 45 und 46, S. 119), deren grössere Axe die gerade Linie $DF$ ist.

Zur Berechnung des gesuchten Mantels $M$ des schief abgeschnittenen Cylinders $ABFD$ benutze man die in der Aufgabe 228, Seite 119 entwickelte, bezw. die in der Erkl. 214, S. 120 aufgestellte Formel:

$$2) \ldots M = 2r\pi\cdot\frac{a+b}{2}$$

In dieser Formel bedeutet $r$ den Radius des Grundkreises, nach vorstehend. Gleich. b) ist somit:

$$r = \begin{cases} y_1 = \frac{2r}{5}\sqrt{5} \\ y_2 = \frac{4}{5}r \end{cases}$$

ferner bedeutet $a$ die längste Seitenlinie $AD$ des schief abgeschnittenen Cylinders, nach vorsteh. Gleich. c) ist somit:

$$a = \begin{cases} z_1 = \frac{2r}{5}\sqrt{5} \\ z_2 = \frac{6}{5}r \end{cases}$$

endlich bedeutet $b$ die kürzeste Seitenlinie $BF$ des schiefabgeschnittenen Cylinders, dieselbe ist der Aufgabe gemäss $= \frac{2}{3}\cdot BC$, nach vorsteh. Gleich. c) ist somit:

**Erkl. 300.** Nebenstehende Gleichung:

$$M_1 = 2\cdot\frac{2r}{5}\sqrt{5}\cdot\pi\cdot\frac{\frac{2r}{5}\sqrt{5}+\frac{4r}{15}\sqrt{5}}{2}$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$M_1 = \frac{4r\sqrt{5}\cdot\pi}{5}\cdot r\sqrt{5}\cdot\frac{\frac{6}{15}+\frac{4}{15}}{2}$$

$$M_1 = \frac{4r^2\pi(\sqrt{5})^2}{5}\cdot\frac{10}{30}$$

$$M_1 = \frac{4r^2\pi\cdot 5}{5}\cdot\frac{1}{3}$$

oder:

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi r^2$$

**Erkl. 301.** Nebenstehende Gleichung:

$$M_2 = 2\cdot\frac{4}{5}r\cdot\pi\cdot\frac{\frac{6}{5}r+\frac{12}{15}r}{2}$$

$$M_2 = \frac{8r\pi}{5}\cdot r\cdot\frac{\frac{18}{15}+\frac{12}{15}}{2}$$

$$M_2 = \frac{8r^2\pi}{5}\cdot\frac{2}{2}$$

oder:

$$M_2 = \frac{8}{5}\pi r^2$$

$$b = \begin{cases} \frac{2}{3}z_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2r}{5}\sqrt{5} = \frac{4r}{15}\sqrt{5} \\ \frac{2}{3}z_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}r = \frac{12}{15}r \end{cases}$$

In Rücksicht der für $r$, $a$ und $b$ gefundenen Werte erhält man aus vorstehender Gleich. 2) die weiteren Gleichungen:

$$M_1 = 2\cdot\frac{2r}{5}\sqrt{5}\cdot\pi\cdot\frac{\frac{2r}{5}\sqrt{5}+\frac{4r}{15}\sqrt{5}}{2}$$

$$M_2 = 2\cdot\frac{4}{5}r\cdot\pi\cdot\frac{\frac{6}{5}r+\frac{12}{15}r}{2}$$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich nach den Erkl. 300 und 301 für die gesuchte Mantelfläche $M$:

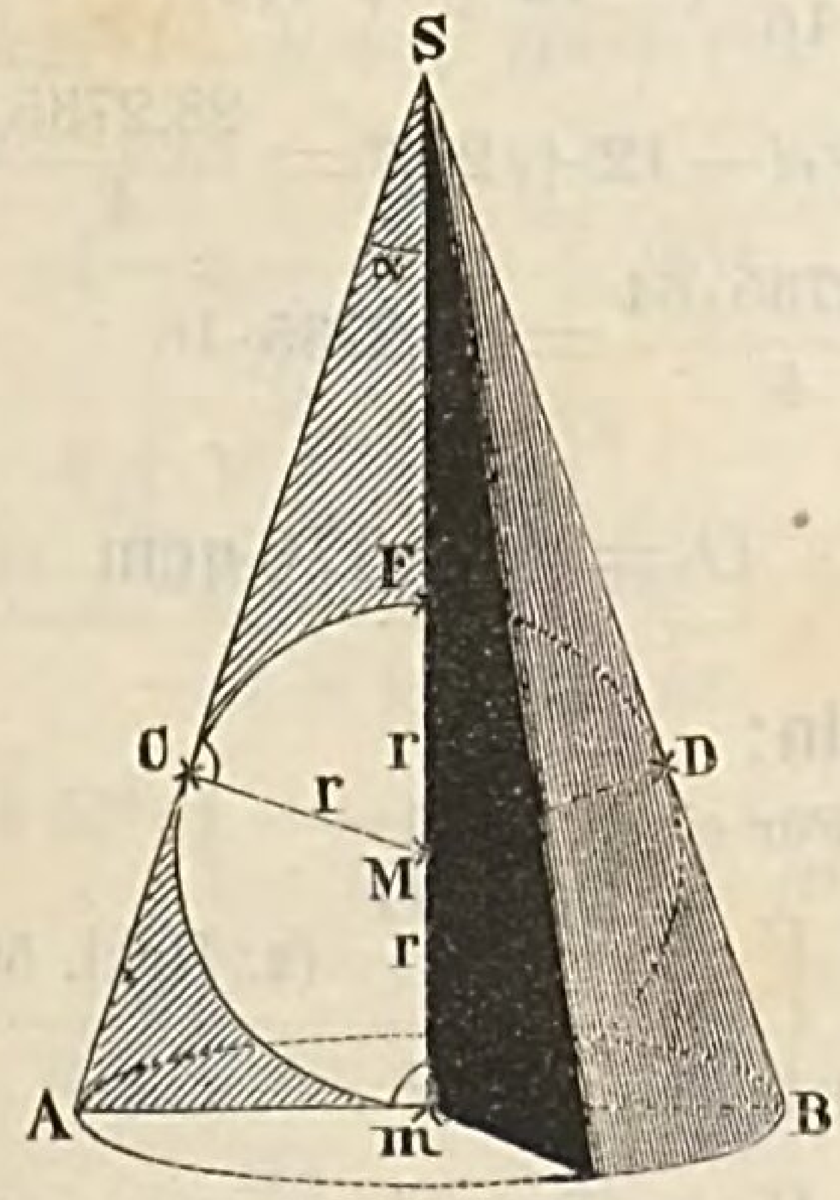
$$\text{B)} \ldots \begin{cases} M_1 = \frac{4}{3}\pi r^2 \\ M_2 = \frac{8}{5}\pi r^2 \end{cases}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

---

**Aufgabe 341.** Von einem geraden Kegel ist der Radius $R$ der Grundfläche $= 12$ cm und die Höhe $H = 16$ cm gegeben. Wie gross ist die Oberfläche der Kugel, welche sich diesem Kegel so einbeschreiben lässt, dass sie die Begrenzungsflächen des Kegels berührt?

Figur 82.




**Formel:**

Für eine Kugel:

$O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28).

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$ der dem Kegel einbeschriebenen Berührungskugel dient vorstehende Formel:

$$1) \ldots O = 4\pi r^2$$

Zur Bestimmung des unbekannten Radius $r$ dieser Kugel denke man sich durch die Längsrichtung der Axe (Höhe) $Sm$ eine Ebene gelegt, dieselbe schneidet den Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $ABS$, siehe Figur 82, und die Kugel in einem grössten Kreise, welches der diesem Dreieck $ABS$ einbeschriebene Kreis um $M$ ist. Fällt man alsdann von $M$ die Senkrechte $MC$ auf die Dreiecksseite $AS$, so kann man in Folge der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $AmS$ und $SCM$ (s. Erkl. 302), die Proportion aufstellen:

**Erkl. 302.** Die Dreiecke $AmS$ und $SCM$, siehe Figur 82, sind ähnlich, weil:

$$\sphericalangle SmA = \sphericalangle SCM = R$$

und weil beide Dreiecke den Winkel $\alpha$ gemeinschaftlich haben.

**Erkl. 303.** Nebenstehende Gleichung:

$$H : \sqrt{(H-r)^2 - r^2} = R : r$$

reduziert und nach $r$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$H : \sqrt{H^2 - 2Hr + r^2 - r^2} = R : r$$

$$H : \sqrt{H^2 - 2Hr} = R : r$$

$$H^2 : (H^2 - 2Hr) = R^2 : r^2$$

$$H^2 \cdot r^2 = H^2 \cdot R^2 - 2HR^2 \cdot r$$

$$H^2 \cdot r^2 + 2HR^2 \cdot r = H^2 \cdot R^2$$

$$r^2 + \frac{2R^2}{H} \cdot r = R^2$$

$$r^2 + \frac{2R^2}{H} \cdot r + \left(\frac{R^2}{H}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{R^2}{H}\right)^2$$

$$\left(r + \frac{R^2}{H}\right)^2 = R^2 + \frac{R^4}{H^2}$$

$$r + \frac{R^2}{H} = \pm \sqrt{\frac{H^2 R^2 + R^4}{H^2}}$$

$$r = -\frac{R^2}{H} \pm \sqrt{\frac{R^2}{H^2}(H^2 + R^2)}$$

$$r = -\frac{R^2}{H} \pm \frac{R}{H} \sqrt{H^2 + R^2}$$

Da das negative Vorzeichen der Wurzel keinen Sinn zulässt, so hat man:

$$r = \frac{R}{H}(-R + \sqrt{H^2 + R^2})$$

$$\text{a)} \ldots Sm : SC = Am : CM$$

Da nun:

$Sm = H$, nämlich gleich der gegebenen Höhe des Kegels.

$Am = R$, nämlich gleich dem gegebenen Radius der Kugelbasis.

$CM = r$, nämlich gleich dem unbekannten Radius der Kugel

und:

$$SC = \sqrt{\overline{SM}^2 - \overline{CM}^2}$$

$$= \sqrt{(Sm - Mm)^2 - \overline{CM}^2}$$

oder:

$$SC = \sqrt{(H-r)^2 - r^2}$$

ist, so geht vorstehende Proportion a) über in:

$$H : \sqrt{(H-r)^2 - r^2} = R : r$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 303:

$$2) \ldots r = \frac{R}{H}(-R + \sqrt{H^2 + R^2})$$

Substituiert man diesen Wert für $r$ in Gleich. 1), so erhält man für die gesuchte Oberfläche $O$ der Berührungskugel:

$$O = 4\pi \cdot \frac{R^2}{H^2}(-R + \sqrt{H^2 + R^2})^2$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $R$ und $H$ gegebenen Zahlenwerte ergibt sich hiernach:

$$O = 4\pi \cdot \frac{12^2}{16^2}(-12 + \sqrt{16^2 + 12^2})^2$$

oder:

$$O = 4\pi \cdot \left(\frac{12}{16}\right)^2 \cdot (-12 + \sqrt{256 + 144})^2$$

$$O = 4\pi \cdot \frac{9}{16} \cdot (-12 + \sqrt{400})^2$$

$$O = \frac{9 \cdot \pi}{4} \cdot (-12 + 20)^2 = \frac{28{,}2735}{4} \cdot 8^2$$

$$O = \frac{28{,}2735 \cdot 64}{4} = 28{,}2735 \cdot 16$$

mithin:

$$O = 452{,}376 \text{ qcm}$$

---

**Aufgabe 342.** In einem geraden Kegel, dessen Grundflächenradius $R = 10$ m und dessen Höhe $H = 20$ m gegeben sind, ist eine Berührungskugel beschrieben und an diese Kugel eine der Kegelgrundfläche parallele Berührungsebene gelegt. In welchem Verhältnis

**Formeln:**

Für einen Kegel:

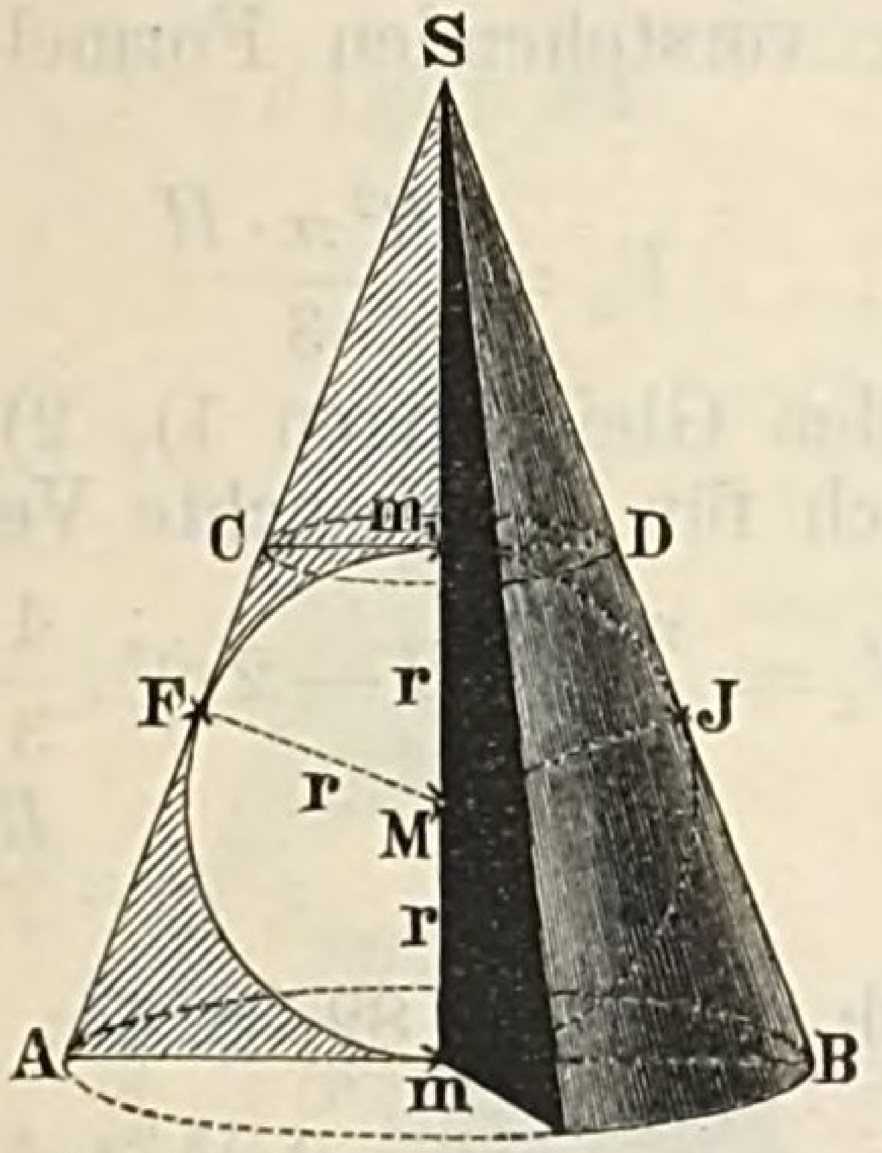
$$\text{I. } V = \frac{R^2 \pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50, S. 23)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II. } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29).}$$

stehen die Volumina des abgeschnittenen Kegels, der Kugel und des ganzen Kegels?

Figur 83.




**Erkl. 304.** Umstehende Proportion:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{R^2}{H^2}\left(H - \frac{2R}{H}(-R + \sqrt{H^2 + R^2})\right)^3$$
$$: 4\left(\frac{R}{H}(-R + \sqrt{H^2 + R^2})\right)^3 : R^2 H$$

reduziert gibt der Reihe nach:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{[H^2 - 2R(-R + \sqrt{H^2 + R^2})]^3}{H^3}$$
$$: \frac{4R^3}{H^3}(-R + \sqrt{H^2 + R^2})^3 : R^2 H$$
$$= \frac{1}{H^5} \cdot [H^2 - 2R(-R + \sqrt{H^2 + R^2})]^3$$
$$: \frac{4R}{H^3} \cdot (-R + \sqrt{H^2 + R^2}) : H$$
$$= [H^2 - 2R(-R + \sqrt{H^2 + R^2})]^3$$
$$: 4RH^2(-R + \sqrt{H^2 + R^2})^3 : H^6$$
$$= \frac{[H^2 - 2R(-R + \sqrt{H^2 + R^2})]^3}{(-R + \sqrt{H^2 + R^2})^3} : 4RH^2$$
$$: \frac{H^6}{(-R + \sqrt{H^2 + R^2})^3}$$
$$= \left(\frac{H^2 - 2R(-R + \sqrt{H^2 + R^2})}{-R + \sqrt{H^2 + R^2}}\right)^3$$
$$: 4RH^2 : \left(\frac{H^2}{-R + \sqrt{H^2 + R^2}}\right)^3$$
$$= \left(\frac{H^2}{-R + \sqrt{H^2 + R^2}} - 2R\right)^3 : 4RH^2$$
$$: \left(\frac{H^2}{-R + \sqrt{H^2 + R^2}}\right)^3$$

**Auflösung.** Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses muss man die Volumina der in Rede stehenden Körper in die gegebenen Dimensionen $R$ und $H$ des Kegels ausdrücken.

Das Volumen $V_1$ des durch die an die Kugel gelegten Berührungsebene $CD$, siehe Figur 83, abgeschnittenen Kegels $CDS$ findet man nach vorstehender Formel I, wenn man berücksichtigt, dass die Höhe $Sm_1$ dieses Kegels $= Sm - m_1 m = H - 2r$ ist, und dass man den Radius $Cm_1$ des Grundkreises desselben aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AmS$ und $Cm_1S$ mittelst der Proportion:

$$Cm_1 : Sm_1 = Am : Sm$$

bezw. mittelst der Proportion:

$$Cm : (H - 2r) = R : H$$

in $R$, $H$ und $r$, wenn $r$ den Radius der Berührungskugel bedeutet, ausdrücken kann, indem sich hieraus:

$$Cm = \frac{R(H - 2r)}{H}$$

ergibt.

Für das Volumen $V_1$ des abgeschnittenen Kegels erhält man somit:

$$V_1 = \frac{R^2(H - 2r)^2 \cdot \pi \cdot (H - 2r)}{H^2 \cdot 3}$$

oder:

$$1) \;.\;.\; V_1 = \frac{\pi R^2}{3H^2} \cdot (H - 2r)^3$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass der Radius $r$ der Berührungskugel, analog wie in der vorhergehenden Aufgabe 341, in $R$ und $H$ ausgedrückt werden muss. Wie in der Gleichung 2) der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe gezeigt ist, erhält man für $r$:

$$a) \;.\;.\;.\; r = \frac{R}{H}(-R + \sqrt{H^2 + R^2})$$

Diesen Wert für $r$ hat man sich in Gleich. 1) und der nachfolgenden Gleichung 2) gesetzt zu denken. Um zunächst keine zu grossen Ausdrücke zu erhalten, ist dies in der Auflösung dieser Aufgabe erst in nachfolgender Proportion geschehen. Das Volumen $V_2$ der dem Kegel einbeschriebenen Berührungskugel findet man mittelst vorstehender Formel II; man erhält:

$$= \left(\frac{H^2(R+\sqrt{H^2+R^2})}{(-R+\sqrt{H^2+R^2})(R+\sqrt{H^2+R^2})} - 2R\right)^3 : 4RH^2$$

$$: \left(\frac{H^2(R+\sqrt{H^2+R^2})}{(-R+\sqrt{H^2+R^2})(R+\sqrt{H^2+R^2})}\right)^3$$

$$= \left(\frac{H^2(R+\sqrt{H^2+R^2})}{H^2+R^2-R^2} - 2R\right)^3 : 4RH^2$$

$$: \left(\frac{H^2(R+\sqrt{H^2+R^2})}{H^2+R^2-R^2}\right)^3$$

$$= (R+\sqrt{H^2+R^2}-2R)^3 : 4RH^2$$
$$: (R+\sqrt{H^2+R^2})^3$$

mithin ist:

$$V_1 : V_2 : V_3 = (\sqrt{H^2+R^2}-R)^3 : 4RH^2$$
$$: (R+\sqrt{H^2+R^2})^3$$

$$2) \ \ldots \ V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Das Volumen $V_3$ des ganzen Kegels $ABS$ endlich findet man ebenfalls mittelst der vorstehenden Formel I; man erhält:

$$3) \ \ldots \ V_3 = \frac{R^2\pi\cdot H}{3}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) ergibt sich für das gesuchte Verhältnis:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{\pi R^2}{3H^2}(H-2r)^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{R^2\pi H}{3}$$

oder nach der Erkl. 82, S. 44:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{R^2}{H^2}(H-2r)^3 : 4r^3 : R^2 H$$

Substituiert man nunmehr den Wert für $r$ aus Gleichung a), so geht diese Proportion über in:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{R^2}{H^2}\left(H - \frac{2R}{H}(-R+\sqrt{H^2+R^2})\right)^3 : 4\left(\frac{R}{H}(-R+\sqrt{H^2+R^2})\right)^3 : R^2 H$$

und hieraus erhält man nach gehöriger Reduktion, wie in der Erkl. 304 gezeigt ist, für das gesuchte Verhältnis:

$$A) \ \ldots \ V_1 : V_2 : V_3 = (\sqrt{R^2+H^2}-r)^3 : 4RH^2 : (\sqrt{R^2+H^2}+r)^3$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht des in der Aufgabe gegebenen Zahlenbeispiels erhält man hiernach:

$$V_1 : V_2 : V_3 = (\sqrt{10^2+20^2}-10)^3 : 4\cdot 10\cdot 20^2 : (\sqrt{10^2+20^2}+10^3)$$

oder:

$$V_1 : V_2 : V_3 = (\sqrt{500}-10)^3 : 16000 : (\sqrt{500}+10)^3$$

$$V_1 : V_2 : V_3 = (22{,}361-10)^3 : 16000 : (22{,}361+10)^3$$

$$V_1 : V_2 : V_3 = 12{,}361^3 : 16000 : 32{,}361^3$$

mithin:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1888{,}7 : 16000 : 33889{,}5$$

(siehe Hülfsrechnung 1) und 2).

**Hülfsrechnungen:**

1) $\log 12{,}361^3 = 3\cdot\log 12{,}361$

Nun ist:

$\log 12{,}361 = 1{,}0920536$
$\cdot 3$
$\log 12{,}361^3 = 3{,}2761608$
1630

mithin:

$12{,}361^3 = 1888{,}7.$

2) $\log 32{,}361^3 = 3\cdot\log 32{,}361$

Nun ist:

$\log 32{,}361 = 1{,}5100219$
$\cdot 3$
$\log 32{,}361^3 = 4{,}5300657$
0588
69
64

mithin ist:

$32{,}361^3 = 33889{,}5.$

---

**Aufgabe 343.** In einem geraden Kegel, dessen Seitenlinie $= s$ und dessen Grundflächenradius $= R$ ist, soll eine Berührungskugel konstruiert werden. Wie gross ist der Inhalt des Kreises, in welchem sich die Mantelfläche des Kegels und die Oberfläche der Kugel

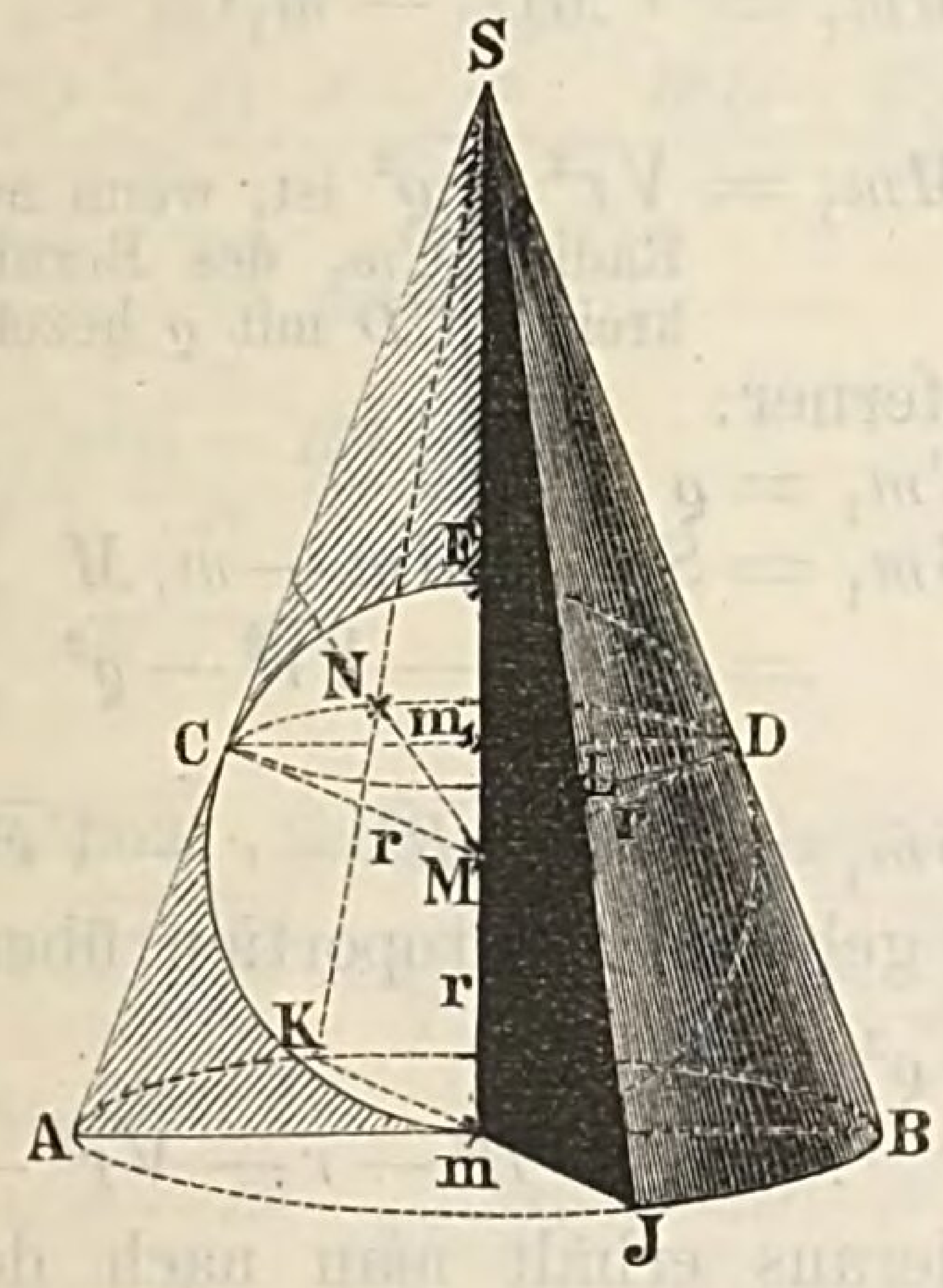
**Formel:**

Für ein Kugelsegment:

$$\text{I.} \ V = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$$ (s. Erkl. 151, S. 78).

berühren und wie gross ist das Volumen der kleineren der Kugelsegmente, in welche von der Ebene jenes Kreises die Kugel geteilt wird?

Figur 84.




**Erkl. 305.** In der Figur 84 ist:

$$SM = Sm - Mm = H - r$$

Da nun:

$$Sm = \sqrt{\overline{SA}^2 - \overline{Am}^2}$$

oder:

$$H = \sqrt{s^2 - R^2} \text{ ist,}$$

so erhält man hiernach:

$$SM = \sqrt{s^2 - R^2} - r$$

**Erkl. 306.** Nebenstehende Gleichung:

$$r : R = \left(\sqrt{s^2 - R^2} - r\right) : s$$

nach $r$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$rs = R\sqrt{s^2 - R^2} - Rr$$

$$rs + Rr = R\sqrt{s^2 - R^2}$$

$$r(s + R) = R\sqrt{s^2 - R^2}$$

$$r = \frac{R\sqrt{s^2 - R^2}}{s + R}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Längsrichtung der Höhe (Axe) $Sm$ des Kegels beliebige Ebenen gelegt, so schneiden diese Ebenen allemal den Kegel in einem gleichschenkligen Dreieck, z. B. in dem Dreieck $ABS$, siehe Figur 84, und die Kugel in einem grössten Kreis, welcher stets der jenem Dreieck einbeschriebene Kreis ist. Denkt man sich ferner von den Mittelpunkten der soeben erwähnten Kreise, d. i. der Mittelpunkt $M$ der gedachten Kugel, Senkrechte auf die Schenkel jener gleichschenkligen Dreiecke gefällt, wie z. B. die Senkrechten $MC$ und $MD$ in Fig. 84, so entstehen lauter kongruente, rechtwinklige Dreiecke, wie z. B. die Dreiecke $SCM$ und $SDM$ in der Figur 84. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke ergibt sich, dass die Entfernungen der Fusspunkte jener gefällten Senkrechten, wie $C$ und $D$ gleichweit von der Spitze $S$ des Kegels entfernt sind, und hieraus ergibt sich nach der Definition eines geraden Kegels, dass die Fusspunkte dieser sämtlichen Senkrechten, d. s. die Berührungspunkte zwischen dem Kegelmantel und der Kugelfläche, in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Ebene $CD$ parallel der Grundfläche $AB$ des Kegels $ABS$ ist.

Aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $SCM$ und $SmA$ erhält man die Proportion:

$$MC : Am = SM : SA$$

Da nun:

$MC = r$, nämlich gleich dem Radius der Berührungskugel,

$Am = R$, nämlich gleich dem gegebenen Radius des Kegels,

$SA = s$, nämlich gleich der gegebenen Seitenlinie des Kegels

und: $SM = \sqrt{s^2 - R^2} - r$

ist, so geht diese Proportion über, in:

$$r : R = \left(\sqrt{s^2 - R^2} - r\right) : s$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 306 für den Kugelradius $r$:

$$\text{a)} \ldots r = \frac{R\sqrt{s^2 - R^2}}{s + R}$$

Ferner erhält man aus dem bei $C$ rechtwinkligen Dreieck $MCS$, nach der Erkl. 307, die Proportion:

$$Mm_1 : Cm_1 = Cm_1 : Sm_1$$

Da nun:

$$Mm_1 = \sqrt{\overline{MC}^2 - \overline{m_1 C}^2}$$

oder:

$$Mm_1 = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$$ ist, wenn man den Radius $Cm_1$ des Berührungskreises $CD$ mit $\varrho$ bezeichnet.

Da ferner:

$$Cm_1 = \varrho$$

und:

$$Sm_1 = Sm - Mm - m_1 M = H - r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

oder:

$$Sm_1 = \sqrt{s^2 - R^2} - r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

ist, so geht diese Proportion über, in:

$$\sqrt{r^2 - \varrho^2} : \varrho = \varrho : \left(\sqrt{s^2 - R^2} - r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 308 für den Radius $\varrho$ des Berührungskreises:

$$\text{b)} \ldots \varrho = \frac{R}{s}(s - R)$$

Für den gesuchten Inhalt $J$ des Berührungskreises hat man somit und in Rücksicht der geometrischen Formel:

$$J = \varrho^2 \pi$$

die Relation:

$$\text{A)} \ldots J = \frac{R^2}{s^2}(s - R)^2 \cdot \pi$$

und dies ist die **allgemeine** Lösung des 1. Teils der Aufgabe.

**Erkl. 307.** Ein geometrischer Lehrsatz heisst: „In jedem rechtwinkligen Dreieck ($MCS$, siehe Figur 84) ist die zur Hypotenuse gehörige Höhe $Cm_1$ die mittlere Proportionale zwischen den Projektionen ($Mm_1$ und $Sm_1$) der Katheten auf die Hypotenuse."

**Erkl. 308.** Nebenstehende Proportion:

$$\sqrt{r^2 - r^2} : \varrho = \varrho : \left(\sqrt{s^2 - R^2} - r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$$

nach $\varrho$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\varrho^2 = \left(\sqrt{s^2 - R^2} - r\right) \cdot \sqrt{r^2 - \varrho^2} - \left(\sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)^2$$

$$\varrho^2 = \left(\sqrt{s^2 - R^2} - r\right) \cdot \sqrt{r^2 - \varrho^2} - r^2 + \varrho^2$$

$$\left(\sqrt{s^2 - R^2} - r\right) \cdot \sqrt{r^2 - \varrho^2} = r^2$$

$$\sqrt{r^2 - \varrho^2} = \frac{r^2}{\sqrt{s^2 - R^2} - r}$$

$$r^2 - \varrho^2 = \frac{r^4}{\left(\sqrt{s^2 - R^2} - r\right)^2}$$

$$\varrho^2 = r^2 - \frac{r^4}{\left(\sqrt{s^2 - R^2} - r\right)^2}$$

Substituiert man in diese Gleichung den vermittelst nebenstehender Gleichung a) für $r$ gefundenen Wert:

$$r = \frac{R\sqrt{s^2 - R^2}}{s + R}$$

so erhält man:

$$\varrho^2 = \frac{R^2\left(\sqrt{s^2 - R^2}\right)^2}{(s + R)^2} - \frac{\dfrac{R^4\left(\sqrt{s^2 - R^2}\right)^4}{(s + R)^4}}{\left(\sqrt{s^2 - R^2} - \dfrac{R\sqrt{s^2 - R^2}}{s + R}\right)^2}$$

oder:

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s^2 - R^2)}{(s + R)^2} - \frac{R^4(s^2 - R^2)^2}{(s + R)^4 \cdot \left(s^2 - R^2 - \dfrac{2R\left(\sqrt{s^2 - R^2}\right)^2}{s + R} + \dfrac{R^2(s^2 - R^2)}{(s + R)^2}\right)}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s - R)}{(s + R)} - \frac{R^4 \cdot (s - R)^2}{(s + R)^2 \cdot \left(s^2 - R^2 - 2R(s - R) + \dfrac{R^2(s - R)}{s + R}\right)}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s - R)}{s + R} - \frac{R^4(s - R)^2}{(s + R)^2\left(s^2 - 2Rs + R^2 + \dfrac{R^2(s - R)}{s + R}\right)}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s - R)}{s + R} - \frac{R^4(s - R)^2}{(s + R)^2\left((s - R)^2 + \dfrac{R^2(s - R)}{s + R}\right)}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s - R)}{s + R} - \frac{R^4(s - R)^2}{(s + R)^2(s - R) \cdot \left((s - R) + \dfrac{R^2}{s + R}\right)}$$

Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ des kleineren Kugelsegments $CDF$, welches von dem Berührungskreis $CD$ begrenzt wird, dient vorstehende Formel I.; setzt man in derselben für $r$ den mittelst vorstehender Gleichung a) gefundenen Wert u. berücksichtigt

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s-R)}{s+R} - \frac{R^4(s-R)}{(s+R)^2 \cdot \frac{s^2-R^2+R^2}{s+R}}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s-R)}{s+R} - \frac{R^4(s-R)}{(s+R)\cdot s^2}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s-R)}{s+R}\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s-R)}{s+R}\cdot\frac{s^2-R^2}{s^2} = \frac{R^2(s-R)(s-R)}{s^2}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2(s-R)^2}{s^2} \text{ mithin:}$$

$$\varrho^2 = \sqrt{\frac{R^2(s-R)^2}{s^2}} \text{ oder:}$$

$$\varrho = \frac{R}{s}\cdot(s-R)$$

**Erkl. 309.** Nebenstehende Gleichung:

$$h = \frac{R\sqrt{s^2-R^2}}{s+R} - \sqrt{\frac{R^2(s^2-R^2)}{(s+R)^2} - \frac{R^2}{s^2}(s-R)^2}$$

reduziert, gibt:

$$h = \frac{R\sqrt{s^2-R^2}}{s+R} - \sqrt{\frac{R^2s^2(s^2-R^2)-R^2(s^2-R^2)^2}{s^2(s+R)^2}}$$

$$h = \frac{R\sqrt{s^2-R^2}}{s+R} - \frac{R}{s(s+R)}\cdot\sqrt{(s^2-R^2)(s^2-s^2+R^2)}$$

$$h = \frac{Rs\sqrt{s^2-R^2} - R^2\sqrt{(s^2-R^2)}}{s(s+R)}$$

$$h = \frac{R\sqrt{s^2-R^2}\,(s-R)}{s\cdot(s+R)}$$

man, dass die Höhe $h$ des Segments $= Fm_1 = F - Mm_1M = r - \sqrt{r^2-\varrho^2}$ ist, dass man somit nach den Gleichungen a) und b) für $h$ die Relation erhält:

$$h = \frac{R\sqrt{s^2-R^2}}{s+R} - \sqrt{\frac{R^2(s^2-R^2)}{(s+R)^2} - \frac{R^2}{s^2}(s-R)^2}$$

woraus sich nach der Erkl. 309:

$$\text{c)} \;\ldots\; h = \frac{R\sqrt{s^2-R^2}\,(s-R)}{s(s+R)}$$

ergibt, so hat man für das gesuchte Volumen $V$ des Kugelsegments:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2\left(\sqrt{s^2-R^2}\right)^2(s-R)^2}{s^2(s+R)^2}\cdot\left[3\cdot\frac{R\sqrt{s^2-R^2}}{s+R} - \frac{R\sqrt{s^2-R^2}\,(s-R)}{s(s+R)}\right]$$

Diese Gleichung reduziert, erhält man der Reihe nach:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2(s^2-R^2)(s-R)^2}{s^2(s+R)^2}\cdot\left[\frac{3sR\sqrt{s^2-R^2} - R\sqrt{s^2-R^2}\,(s-R)}{s(s+R)}\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2(s-R)(s-R)^2}{s^2(s+R)}\cdot\frac{R\sqrt{s^2-R^2)}}{s(s+R)}\cdot[3s-(s-R)]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{s^3}\cdot\frac{(s-R)^3}{s+R}\cdot\sqrt{\frac{s^2-R^2}{(s+R)^2}}\cdot[3s-s+R]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{s^3}\cdot\frac{(s-R)^3}{s+R}\cdot\sqrt{\frac{s-R}{s+R}}\cdot(2s+R)$$

Und hieraus ergibt sich endlich:

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{R^3}{s^3}\cdot\frac{2s+R}{s+R}(s-R)^3\sqrt{\frac{s-R}{s+R}}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

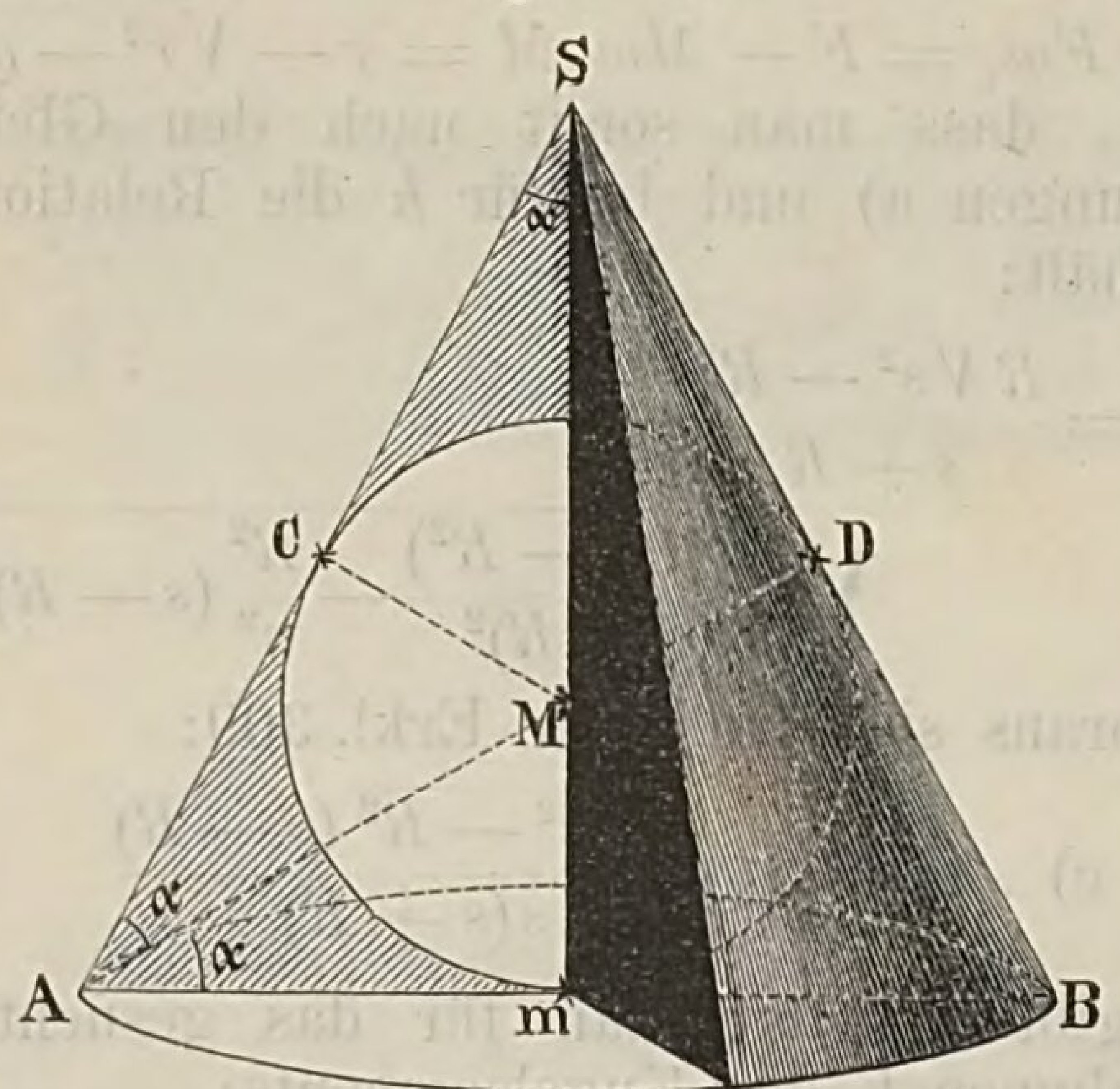
---

**Aufgabe 344.** Wie gross ist die Oberfläche $O$ einer Kugel, welche einem gleichseitigen Kegel, dessen Höhe $h = 3$ m misst, einbeschrieben werden kann?

**Formel:**

$$O = 4\pi r^2 \quad \text{(s. Erkl. 62, S. 28).}$$

Figur 85.




**Erkl. 310.** In jedem gleichseitigen Dreieck fallen die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks, d. i.:

1) der Schnittpunkt der Halbierungslinien der drei Winkel,
2) der Schnittpunkt der drei in den Mitten der drei Seiten errichtenden Perpendikel,
3) der Schnittpunkt der drei Höhen und
4) der Schnittpunkt der drei Schwerlinien des Dreiecks

in einen und denselben Punkt.

Aus diesem Grunde ist in der Figur 85, z. B. $\sphericalangle SAM = \sphericalangle ASM$, mithin das Dreieck $AMS$ ein gleichschenkliges Dreieck.

**Erkl. 311.** In dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $SmA$, siehe Figur 85, ist:

$$Sm = h$$

$$Am = \frac{AB}{2} = \frac{AS}{2}$$

Bezeichnet man ferner eine Seite des gleichseitigen Dreiecks $ABS$ mit $s$, so hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = h^2$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$s^2 - \frac{s^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3}{4}s^2 = h^2$$

$$s^2 = \frac{4h^2}{3} = \frac{4h^2}{9} \cdot 3$$

oder:

$$s = \frac{2h}{3}\sqrt{3}$$

**Erkl. 312.** Nebenstehende Gleichung:

$$2) \ldots r = \frac{1}{3}h$$

hätte man auch direkt aus dem geometrischen Lehrsatz:

„Die drei Schwerlinien eines Dreiecks, d. s. die Verbindungslinien der Mitten der

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $O$ hat man nach vorstehender Formel die Gleichung:

$$1) \ldots O = 4\pi r^2$$

und es bleibt zunächst der noch unbekannte Radius $r$ zu bestimmen übrig.

Denkt man sich zu diesem Zwecke durch die Höhe $Sm$ des gleichseitigen Kegels eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Kegel in dem gleichseitigen Dreieck $ABS$ und die Kugel in einem grössten Kreis, welches der dem Dreieck $ABS$ einbeschriebene Kreis um $M$ ist. Verbindet man $M$ mit $A$, so erhält man nach der Erkl. 310 das gleichschenklige Dreieck $AMS$, dessen Höhe $MC$ gleich dem zu bestimmenden Radius $r$ ist. In dem bei $C$ rechtwinkligen Dreieck $MCS$ ist:

$$MC = r$$

$$CS = \frac{AS}{2} = \frac{2h}{3}\sqrt{3} : 2 \text{ (s. Erkl. 311)}$$

und:

$$SM = Sm - Mm = h - r$$

somit hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$\overline{SM}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{MC}^2$$

oder:

$$(h - r)^2 = \left(\frac{h}{3}\sqrt{3}\right)^2 + r^2$$

Diese Gleichung nach $r$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$h^2 - 2rh + r^2 = \frac{h^2}{9} \cdot 3 + r^2$$

$$2rh = h^2 - \frac{h^2}{3}$$

$$2rh = \frac{2}{3}h^2$$

$$2) \ldots r = \frac{1}{3}h \text{ (s. Erkl. 312)}$$

Substituiert man diesen Wert für $r$ in vorstehende Gleichung 1), so erhält man:

$$A) \ldots O = \frac{4\pi}{9}h^2$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

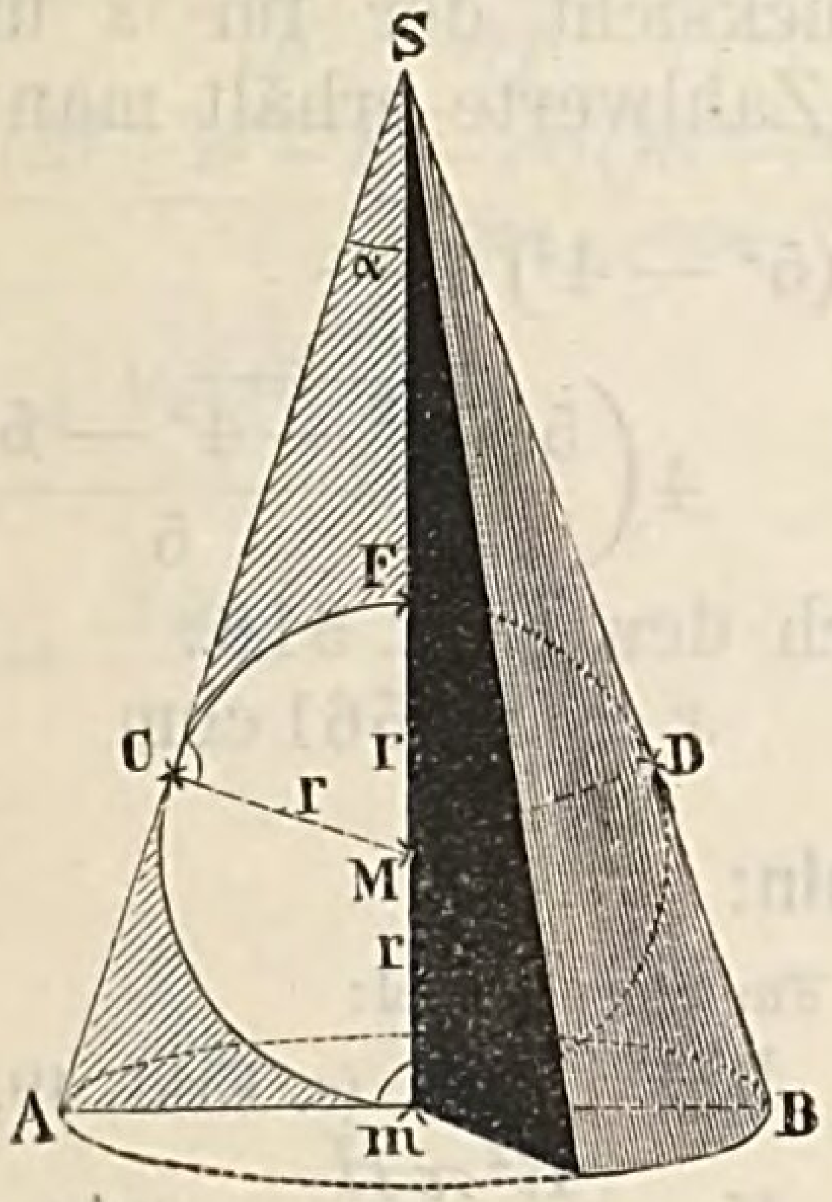
Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

drei Seiten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks (beim gleichseitigen Dreieck zugleich die Höhen) schneiden sich in einem Punkte und zwar im Verhältnis von 1 : 2

ableiten können.

**Aufgabe 345.** In einem geraden Kegel von $H = 4m$ Höhe soll eine Kugel einbeschrieben werden. Wie gross ist das Volumen des zwischen den Begrenzungsflächen des Kegels und der Oberfläche der Kugel liegenden Raumes, wenn die Seitenlinie $s$ des Kegels = 5 m misst?

Figur 86.




**Erkl. 313.** In Figur 86 ist:

$$SM = Sm - Mm = H - r$$

**Erkl. 314.** Nebenstehende Proportion:

$$s : (H - r) = R : r$$

nach $r$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$rs = HR - rR$$
$$rs + rR = HR$$
$$r(R + s) = HR$$

oder:

$$r = \frac{HR}{R + s}$$

**Erkl. 315.** Nebenstehenden Ausdruck:

$$r = \frac{H\sqrt{s^2 - H^2}}{s + \sqrt{s^2 - H^2}}$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$r = \frac{H\sqrt{s^2 - H^2}\,(s - \sqrt{s^2 - H^2})}{(s + \sqrt{s^2 - H^2})\,(s - \sqrt{s^2 - H^2})}$$

$$r = \frac{H\sqrt{s^2 - H^2}\,(s - \sqrt{s^2 - H^2})}{s^2 - (\sqrt{s^2 - H^2})^2}$$

$$r = \frac{H\sqrt{s^2 - H^2}\,(s - \sqrt{s^2 - H^2})}{s^2 - s^2 + H^2}$$

$$O = \frac{4 \cdot 3{,}142 \cdot 9}{9}$$

oder:

$$O = 12{,}568 \text{ qm}$$

---

**Formeln:**

Für einen Kegel:

$$\text{I. } V = \frac{R^2 \pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50, S. 23)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II. } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67, S. 29).}$$

**Auflösung.** Das gesuchte Volumen $x$ ist gleich der Differenz der Volumina des Kegels und der Kugel, mit Benutzung der vorstehenden Formeln hat man somit die Gleichung:

$$1) \ldots x = \frac{R^2 \pi H}{3} - \frac{4}{3}\pi r^3$$

in welche für $R$ und $r$ ihre noch näher zu bestimmenden Werte substituiert werden müssen.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $AmS$ ergibt sich die Relation:

$$\overline{Am}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{Sm}^2$$

bezw. die Relation:

$$R^2 = s^2 - H^2$$

woraus man:

$$2) \ldots R = \sqrt{s^2 - H^2}$$

erhält.

Aus den ähnlichen Dreiecken $AmS$ und $MCS$ ergibt sich ferner, ähnlich wie in der Aufgabe 341, die Proportion:

$$AS : SM = Am : CM$$

bezw. die Proportion:

$$s : (H - r) = R : r \quad \text{(s. Erkl. 313)}$$

aus welcher man nach der Erkl. 314

$$r = \frac{HR}{R + s}$$

oder in Rücksicht des mittelst Gleich. 2) für $R$ gefundenen Wertes:

$$r = \frac{H\sqrt{s^2 - H^2}}{s + \sqrt{s^2 - H^2}}$$

oder endlich durch Reduktion nach der Erkl. 315:

$$3) \ldots r = \frac{s\sqrt{s^2 - H^2} - s^2 + H^2}{H}$$

erhält.

$$r = \frac{H\sqrt{s^2 - H^2}\,(s - \sqrt{s^2 - H^2})}{H^2}$$

$$r = \frac{\sqrt{s^2 - H^2}\,(s - \sqrt{s^2 - H^2})}{H}$$

oder:

$$r = \frac{s\sqrt{s^2 - H^2} - s^2 + H^2}{H}$$

**Erkl. 316.** Aus nebenstehender Gleichung:

$$x = \frac{\pi}{3}\left[(5^2 - 4^2)4 - 4\left(\frac{5\sqrt{5^2 - 4^2} - 5^2 + 4^2}{4}\right)^3\right]$$

erhält man der Reihe nach:

$$x = \frac{\pi}{3}\left[9 \cdot 4 - 4 \cdot \left(\frac{5\sqrt{9} - 25 + 16}{4}\right)^3\right]$$

$$x = \frac{\pi}{3}\left[36 - 4 \cdot \left(\frac{15 - 9}{4}\right)^3\right]$$

$$x = \frac{\pi}{3}\left(36 - 4 \cdot \frac{6^3}{4^3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(36 - \frac{36 \cdot 6}{4 \cdot 4}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3}\left(36 - \frac{9 \cdot 3}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{72 - 27}{2}$$

$$x = \frac{3{,}1415 \cdot 45}{3 \cdot 2} = \frac{3{,}1415 \cdot 15}{2} = \frac{47{,}1225}{2}$$

$$x = 23{,}5612$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) ergibt sich durch Substitution:

$$x = \frac{(\sqrt{s^2 - H^2})^2 \cdot \pi \cdot H}{3} - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{s\sqrt{s^2 - H^2} - s^2 + H^2}{H}\right)^3$$

und hieraus erhält man nach gehöriger Reduktion für das gesuchte Volumen $x$:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{\pi}{3} \cdot \left[(s^2 - H^2) \cdot H - 4 \cdot \left(\frac{s\sqrt{s^2 - H^2} - s^2 + H^2}{H}\right)^3\right]$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $s$ und $H$ gegebenen Zahlwerte erhält man hiernach:

$$x = \frac{\pi}{3}\left[(5^2 - 4^2)\,4 - 4\left(\frac{5\sqrt{5^2 - 4^2} - 5^2 + 4^2}{5}\right)^3\right]$$

oder nach der Erkl. 316:

$$x = 23{,}561 \text{ cbm}$$

---

**Aufgabe 346.** In einem geraden Kegel, dessen Grundflächenradius $= R$ gegeben, ist eine Kugel einbeschrieben, deren Radius $= r$ ist. Welches ist die Mantelfläche $M$ und das Volumen $V$ jenes Kegels?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. $M = \pi R s$ (s. Erkl. 49, S. 22)

II. $V = \dfrac{R^2 \pi H}{3}$ (s. Erkl. 50, S. 23)

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Mantelfläche $M$ des Kegels hat man nach vorstehender Formel I, die Gleichung:

$$1) \ldots M = \pi R s$$

in welcher die Seitenlinie $s$ noch näher bestimmt werden muss.

Aus den ähnlichen Dreiecken $AmS$ und $MCS$, siehe Figur 86, ergibt sich die Proportion:

$$Am : MC = Sm : Sc$$

bezw. die Proportion:

$R : r = \sqrt{s^2 - R^2} : (s - R)$ (s. Erkl. 317)

und hieraus erhält man nach der Erklärung 318:

$$2) \ldots s = R \cdot \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}$$

Substituiert man diesen Wert in Gleich. 1), so erhält man für die gesuchte Mantelfläche $M$:

**Erkl. 317.** In der Figur 86 ist:

$Am = R$,
$MC = r$,
$Sm = \sqrt{\overline{SA}^2 - \overline{Am}^2} = \sqrt{s^2 - R^2}$ und
$SC = SA - CA = SA - Am = s - R$

**Erkl. 318.** Nebenstehende Proportion:

$$R : r = \sqrt{s^2 - R^2} : (s - R)$$

nach $s$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{s^2 - R^2}{(s - R)^2}$$

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{(s + R)(s - R)}{(s - R)(s - R)}$$

$$\frac{s + R}{s - R} = \frac{R^2}{r^2}$$

$\dfrac{2s}{2R} = \dfrac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}$ (s. Erkl. 319)

mithin:

$$s = R \cdot \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}$$

**Erkl. 319.** Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des 1. Verhältnisses zur Differenz derselben Glieder wie die Summe der Glieder des 2. Verhältnisses zur Differenz derselben Glieder."

Man siehe Kleyers Lehrbuch „die Proportionen."

**Erkl. 320.** Nebenstehende Gleichung:

$$H = \sqrt{R^2 \cdot \left(\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}\right)^2 - R^2}$$

reduziert, giebt der Reihe nach:

$$H = \sqrt{R^2 \cdot \left[\frac{(R^2+r^2)^2}{(R^2-r^2)^2} - 1\right]}$$

$$H = R \cdot \sqrt{\frac{(R^2+r^2)^2 - (R^2-r^2)^2}{(R^2-r^2)^2}}$$

$$H = R \sqrt{\frac{(R^2+r^2+R^2-r^2)(R^2+r^2-R^2+r^2)}{(R^2-r^2)^2}}$$

$$H = \frac{R}{R^2-r^2} \sqrt{2R^2 \cdot 2r^2}$$

oder:

$$H = \frac{R}{R^2-r^2} \cdot 2Rr = \frac{2R^2 r}{R^2-r^2}$$

$$\text{A)} \ldots M = \pi R^2 \cdot \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}$$

als **allgemeine** Lösung des 1. Teils der Aufgabe.

---

Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ des Kegels hat man nach vorstehender Formel II, die Gleichung:

$$3) \ldots V = \frac{R^2 \pi H}{3}$$

Da sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $AmS$, siehe Figur 86:

$$H = \sqrt{s^2 - R^2}$$

ergibt, so erhält man unter Berücksichtigung des für $s$ mittelst Gleich. 2) gefundenen Wertes, für die Höhe $H$:

$$H = \sqrt{R^2 \cdot \left(\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}\right)^2 - R^2}$$

oder nach der Erkl. 320:

$$4) \ldots H = \frac{2R^2 r}{R^2-r^2}$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) erhält man somit schliesslich für das gesuchte Volumen $V$:

$$V = \frac{R^2 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{2R^2 r}{R^2-r^2}$$

oder:

$$\text{B)} \ldots V = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{R^4 r}{R^2-r^2}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

---

**Aufgabe 347.** In einen geraden Kegel, dessen Höhe $= H$ ist, soll eine Kugel mit dem Radius $r$ einbeschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen und die Volumina dieser beiden Körper?

**Erkl. 321.** Setzt man in umstehender Gleichung:

$$1) \ldots O : O_1 = R(s+R) : 4r^2$$

$$\text{für } s = R \cdot \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}$$

so geht dieselbe über in:

$$O : O_1 = R\left(R \cdot \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} + R\right) : 4r^2$$

Diese Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. $O = \pi R(s+R)$ (s. Erkl. 107, S. 52)

II. $V = \dfrac{R^2 \pi H}{3}$ (s. Erkl. 50, S. 23)

Für eine Kugel:

III. $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62, S. 28)

IV. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67, S. 29).

**Auflösung.** Bezeichnet man die Oberfläche des Kegels mit $O$, die der Kugel mit $O_1$, so besteht nach vorstehenden Formeln I und II zur Bestimmung des Verhältnisses $O : O_1$ die Proportion:

$$O : O_1 = \pi R(s+R) : 4\pi r^2$$

$$O : O_1 = R^2 \left( \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} + 1 \right) : 4 r^2$$

$$O : O_1 = R^2 \cdot \frac{R^2 + r^2 + R^2 - r^2}{R^2 - r^2} : 4 r^2$$

$$O : O_1 = R^2 \cdot \frac{2 R^2}{R^2 - r^2} : 4 r^2$$

oder:

$$O : O_1 = \frac{R^4}{R^2 - r^2} : 2 r^2$$

**Erkl. 322.** In Figur 86 ist:

$Am = R$
$MC = r$
$Sm = H$

$$SC = \sqrt{\overline{SM}^2 - \overline{MC}^2}$$
$$= \sqrt{(Sm - Mm)^2 - \overline{MC}^2}$$
$$= \sqrt{(H - r)^2 - r^2}$$
$$= \sqrt{H^2 - 2 r H + r^2 - r^2} = \sqrt{H^2 - 2 r H}$$

**Erkl. 323.** Nebenstehende Gleichung a). reduziert, gibt der Reihe nach:

$$O : O_1 = \frac{\frac{r^4 H^2}{(H - 2r)^2}}{\frac{r^2 H - (H - 2r) r^2}{H - 2r}} : 2 r^2$$

$$O : O_1 = \frac{r^4 H^2 (H - 2r)}{(H - 2r)^2 (r^2 H - r^2 H + 2 r^3)} : 2 r^2$$

$$O : O_1 = \frac{r^4 H^2}{(H - 2r) \cdot 2 r^3} : 2 r^2$$

$$O : O_1 = \frac{r H^2}{2 (H - 2r)} : 2 r^2 = \frac{r H^2}{2 (H - 2r) \cdot 2 r^2}$$

$$O : O_1 = H^2 : 4 r (H - 2r)$$

oder:

$$1) \ldots O : O_1 = R (s + R) : 4 r^2$$

in welcher $R$ und $s$ noch näher bestimmt werden müssen.

Analog wie in Gleich. 2) der Aufgabe 346 erhält man zunächst:

$$2) \ldots s = R \cdot \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}$$

und die Gleich. 1) geht nach der Erklärung 321 über in:

$$3) \; O : O_1 = \frac{R^4}{R^2 - r^2} : 2 r^2$$

Aus den ähnlichen Dreiecken $AmS$ und $MCS$, siehe Figur 86, ergibt sich ferner:

$$Am : MC = Sm : SC$$

oder nach der Erkl. 322:

$$R : r = H : \sqrt{H^2 - 2 r H}$$

und hieraus erhält man:

$$R = \frac{r H}{\sqrt{H^2 - 2 r H}}$$

oder:

$$R^2 = \frac{r^2 H^2}{H^2 - 2 r H}$$

und

$$4) \ldots R^2 = \frac{r^2 H}{H - 2 r}$$

Substituiert man diesen Wert für $R^2$ in Gleich. 3), so ist:

$$a) \ldots O : O_1 = \frac{\frac{r^4 H^2}{(H - 2r)^2}}{\frac{r^2 H}{H - 2r} - r^2} : 2 r^2$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 323 für das gesuchte Verhältnis:

$$A) \ldots O : O_1 = H^2 : 4 r (H - 2 r) \, ^{*)}$$

---

Bezeichnet man ferner das Volumen des Kegels mit $V$, das der Kugel mit $V_1$, so besteht nach vorstehenden Formeln II und IV zur Bestimmung des Verhältnisses $V : V_1$, die Proportion:

$$V : V_1 = \frac{R^2 \pi H}{3} : \frac{4}{3} \pi r^3$$

---

*) Aus den allgemeinen Lösungen A) und B) ergibt sich, dass das Verhältnis der Oberflächen gleich dem Verhältnis der Volumina des Kegels und der Kugel ist.

oder:

$$5) \ldots V:V_1 = R^2H:4r^3$$

in welcher $R$ bezw. $R^2$ noch näher bestimmt werden muss, was analog wie vorhin geschieht. Setzt man diesen für $R^2$ gefundenen Wert aus Gleich. 4) in Gleich. 5) ein, so erhält man:

$$V:V_1 = \frac{r^2H^2}{H-2r}:4r^3$$

oder:

$$B) \ldots V:V_1 = H^2:4r(H-2r)\text{*)}$$

als **allgemeine** Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

*) Aus den allgemeinen Lösungen A) und B) ergibt sich, dass das Verhältnis der Oberflächen gleich dem Verhältnis der Volumina des Kegels und der Kugel ist.

---

**Aufgabe 348.** Wie gross muss die Höhe und der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels sein, wenn dessen Volumen $V = 301{,}5930$ cdm und das Volumen $V_1$ der diesem Kegel einbeschriebenen Kugel $= 113{,}0973$ cdm beträgt?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

$$\text{I. } V = \frac{R^2\pi H}{3} \text{ (s. Erkl. 50, S. 123)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II. } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (s. Erkl. 67, S. 29).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchte Höhe des Kegels mit $x$ und den gesuchten Radius seiner Grundfläche mit $y$, so hat man, da das Volumen $V$ gegeben ist, nach vorstehender Formel I, einmal die Bestimmungsgleichung:

$$V = \frac{y^2 \cdot \pi \cdot x}{3}$$

bezw. die reduzierte Gleichung:

$$1) \ldots x \cdot y^2 = \frac{3V}{\pi}$$

Da ferner das Volumen $V_1$ der dem Kegel einbeschriebenen Kugel gegeben ist, und man mittelst vorstehender Formel II:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

den Radius $r$ dieser Kugel aus der Gleichung:

$$a) \ldots r = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}}$$

finden kann, so muss zur Aufstellung einer zweiten Bestimmungsgleichung für $x$ und $y$ dieser Kugelradius $r$ in Betracht gezogen werden.

**Erkl. 324.** Nach nebenstehender Auflösung ist in Fig. 86:

$Am = y$

$MC = r$

$Sm = x$

$$SC = \sqrt{\overline{SM}^2 - \overline{MC}^2} = \sqrt{(Sm - Mm)^2 - \overline{MC}^2}$$
$$= \sqrt{(x-r)^2 - r^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 2rx + r^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2rx}$$

**Erkl. 325.** Umstehende Gleichung:

$$y:r = x:\sqrt{x^2 - 2rx}$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$y^2:r^2 = x^2:(x^2 - 2rx)$$
$$r^2x^2 = x^2y^2 - 2rxy^2$$

oder:

$$r^2x = xy^2 - 2ry^2$$

Da nun nach nebenstehender Gleichung 1)

$$xy^2 = \frac{3V}{\pi}$$

ist, so erhält man:

$$r^2x = \frac{3V}{\pi} - 2ry^2$$

oder:

$$r^2x + 2ry^2 = \frac{3V}{\pi}$$

$$rx + 2y^2 = \frac{3V}{r\pi}$$

**Erkl. 326.** Aus nebenstehenden Gleichungen

$$1) \ldots xy^2 = \frac{3V}{\pi}$$

$$2) \ldots rx + 2y^2 = \frac{3V}{r\pi}$$

erhält man $x$ und $y$, wie folgt:

Substituiert man den sich aus Gleich. 2) ergebenden Wert:

$$y^2 = \frac{3V}{2r\pi} - \frac{rx}{2}$$

in Gleich. 1), so erhält man:

$$\frac{3V}{2r\pi} \cdot x - \frac{r}{2} \cdot x^2 = \frac{3V}{\pi}$$

oder:

$$\frac{r}{2} \cdot x^2 - \frac{3V}{2r\pi} \cdot x = -\frac{3V}{\pi}$$

$$x^2 - \frac{3V}{r^2\pi} \cdot x = -\frac{6V}{r\pi}$$

$$x^2 - \frac{3V}{r^2\pi} \cdot x + \left(\frac{3V}{2r^2\pi}\right)^2 = -\frac{6V}{r\pi} + \left(\frac{3V}{2r^2\pi}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3V}{2r^2\pi}\right)^2 = -\frac{6V}{r\pi} + \frac{9V^2}{4r^4\pi^2}$$

$$x - \frac{3V}{2r^2\pi} = \pm\sqrt{\frac{-24Vr^3\pi + 9V^2}{4r^4\pi^2}}$$

$$x = \frac{3V}{2r^2\pi} \pm \frac{1}{2r^2\pi}\sqrt{3V(3V - 8r^3\pi)}$$

oder:

$$a) \ldots x = \frac{1}{2r^2\pi}\left[3V \pm \sqrt{3V(3V - 8r^3\pi)}\right]$$

Zur Berechnung von $y$ substituiere man den sich aus Gleich. 2) für $x$ ergebenden Wert:

$$x = \frac{3V}{r^2\pi} - \frac{2y^2}{r}$$

in Gleich. 1), wonach man erhält:

$$\left(\frac{3V}{r^2\pi} - \frac{2y^2}{r}\right)y^2 = \frac{3V}{\pi}$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$\frac{3V}{r^2\pi} \cdot y^2 - \frac{2}{r} \cdot y^4 = \frac{3V}{\pi}$$

$$\frac{2}{r} \cdot y^4 - \frac{3V}{r^2\pi} \cdot y^2 = -\frac{3V}{\pi}$$

$$y^4 - \frac{3V}{2r\pi} \cdot y^2 = -\frac{3rV}{2\pi}$$

$$(y^2)^2 - \frac{3V}{2r\pi} \cdot y^2 + \left(\frac{3V}{4r\pi}\right)^2 = -\frac{3rV}{2\pi} + \left(\frac{3V}{4r\pi}\right)^2$$

$$\left(y^2 - \frac{3V}{4r\pi}\right)^2 = -\frac{3rV}{2\pi} + \frac{9V^2}{16r^2\pi^2}$$

$$y^2 - \frac{3V}{4r\pi} = \pm\sqrt{\frac{-24r^3V\pi + 9V^2}{16r^2\pi^2}}$$

$$y^2 = \frac{3V}{4r\pi} \pm \frac{1}{4r\pi}\sqrt{9V^2 - 24r^3V\pi}$$

mithin:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{4r\pi} \cdot \left[3V \pm \sqrt{3V(3V - 8r^3\pi)}\right]}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AmS$ und $MCS$, siehe Figur 86, ergibt sich die Proportion:

$$Am : MC = Sm : SC$$

oder nach der Erkl. 324 die Gleichung:

$$y : r = x : \sqrt{x^2 - 2rx}$$

welche nach der Erkl. 325 reduziert, übergeht in:

$$2) \ldots rx + 2y^2 = \frac{3V}{r\pi}$$

Löst man nunmehr die Gleichungen 1) und 2) nach $x$ und $y$ auf, so erhält man nach der Erkl. 326:

$$3)\ x = \frac{1}{2r^2\pi}\left[3V \pm \sqrt{3V(3V - 8r^3\pi)}\right]$$

und

$$4)\ y = \sqrt{\frac{1}{4r\pi} \cdot \left[3V \pm \sqrt{3V(3V - 8r^3\pi)}\right]}$$

Setzt man endlich noch für $r$ den sich aus vorstehender Gleichung a) ergebenden Wert, so erhält man in Rücksicht der Erkl. 327, 328 und 329 für die gesuchte Höhe $x$:

$$x = \frac{2}{\sqrt[3]{36\pi \cdot V_1^2}}\left[3V \pm 3\sqrt{V(V - 2V_1)}\right]$$

oder:

$$A)\ x = \frac{6}{\sqrt[3]{36\pi \cdot V_1^2}}\left[V + \sqrt{V(V - 2V_1)}\right]$$

und für den gesuchten Grundflächenradius $y$:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt[3]{6\pi^2 \cdot V_1}} \cdot \left[3V \pm 3\sqrt{V(V - 2V_1)}\right]}$$

oder:

$$B)\ y = \sqrt{\frac{3}{2\sqrt[3]{6\pi^2 \cdot V_1}} \cdot \left[V \pm \sqrt{V(V - V_1)}\right]}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für $V$ und $V_1$ gegebenen Zahlenwerte erhält man zunächst:

$V + \sqrt{V(V - 2V_1)} =$
$301{,}593 + \sqrt{301{,}593\,(301{,}593 - 2 \cdot 113{,}0973)}$
$= 301{,}593 + \sqrt{301{,}593 \cdot 75{,}3984}$
$= 301{,}593 \pm 150{,}7966$ [s. Hülfsrechnung 1).]

mithin ist:

$\alpha) \ldots V \pm \sqrt{V(V - 2V_1)} = 452{,}3896$
oder: $= 150{,}7964$

Setzt man diese Werte in die allgemeine Gleichung A), so erhält man:

oder:

b) . . $y = \sqrt{\frac{1}{4r\pi}\cdot\left[3V \pm \sqrt{3V(3V-8r^3\pi)}\right]}$

da das negative Vorzeichen der ersten Wurzel keine Deutung zulässt.

**Erkl. 327.** Setzt man in dem Quotient:

$$\frac{1}{2r^2\pi}$$

[dies ist ein Faktor der umsteh. Gleichung 3)]

$r = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}}$, so erhält man:

$$\frac{1}{2r^2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt[3]{\frac{9V_1^2}{16\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9V_1^2\cdot 8\pi^3}{16\pi^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9V_1^2 4\pi}{8_2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{36\pi V_1^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{36\pi\cdot V_1^2}}$$

**Erkl. 328.** Setzt man in dem Quotient:

$$\frac{1}{4r\pi}$$

[dies ist ein Faktor der umsteh. Gleichung 4)]

$r = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}}$, so erhält man:

$$\frac{1}{4r\pi} = \frac{1}{4\pi\sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3V_1\cdot 4^3\pi^3}{4\pi}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{48\pi^2\cdot V_1}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{6\pi^2\cdot V_1}}$$

**Erkl. 329.** Setzt man in der Wurzel:

$$\sqrt{3V(3V-8r^3\pi)}$$

[dies ist eine Wurzel in jeder der umsteh. Gleich. 3) und 4)]

$r = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}}$, so erhält man:

$$\sqrt{3V\left(3V-8\pi\cdot\frac{3V_1}{4\pi}\right)} = \sqrt{3V(3V-6V_1)}$$

$$= \sqrt{9V(V-2V_1)}$$

$$= 3\sqrt{V(V-2V_1)}$$

$$x_1 = \frac{6\cdot 452{,}3896}{\sqrt[3]{36\cdot\pi\cdot 113{,}0973^2}} \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{6\cdot 150{,}7964}{\sqrt[3]{36\cdot\pi\cdot 113{,}0973^2}}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 2) und 4)

I. $\begin{cases} x_1 = 24 \text{ dm und} \\ x_2 = 8 \text{ dm} \end{cases}$

Setzt man ferner die mittelst der Gleich. $\alpha$) für $V \pm \sqrt{V(V-2V_1)}$ berechneten Werte in die allgemeine Gleichung B), so erhält man:

$$y_1 = \sqrt{\frac{3\cdot 452{,}3896}{2\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 113{,}0973}}}$$

und

$$y_2 = \sqrt{\frac{3\cdot 150{,}7964}{2\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 113{,}0973}}}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 5) und 7)

II. $\begin{cases} y_1 = 6 \text{ dm} \\ y_2 = 3{,}4641 \text{ dm } (= \sqrt{12}) \end{cases}$

**Hülfsrechnungen:**

1). $log\sqrt{301{,}593\cdot 75{,}3984} =$

$= \frac{1}{2}\cdot(log\, 301{,}593 \cdot log\, 75{,}3984)$

Nun ist: $log\, 301{,}593 = 2{,}4794169$
$+ 43{,}2$
$+ log\, 75{,}3984 = 1{,}8773598$
$+ 23{,}2$
$4{,}3567833$
$\cdot\frac{1}{2}$
$2{,}1783916$
$3725$
$191$
$172{,}8$
$18{,}2$
$17{,}2$

mithin:

$\sqrt{301{,}593\cdot 75{,}3984} = \underline{\underline{150{,}7966}}$

2). $log\, x_1 =$

$log\, 6 + log\, 452{,}3896 - log\sqrt[3]{36\cdot\pi\cdot 113{,}0973^2}$

Nun ist: $log\, 6 = 0{,}7781513$
$+ log\, 452{,}3896 = 2{,}6555034$
$+ 86{,}4$
$5{,}7$
$3{,}4336639$

$- log\sqrt[3]{36\cdot\pi\cdot 113{,}0973^2} = -2{,}0534523$
[s. Hülfsrechn. 3)]

$log\, x_1 = 1{,}3802116$
$2112$
$4$

mithin:

$x_1 = \underline{\underline{24{,}000}}$

**Hülfsrechnungen:**

3). $\log\sqrt[3]{36\cdot\pi\cdot 113{,}0973^2} =$

$$\frac{1}{3}(\log 36 + \log\pi + 2\cdot\log 113{,}0973)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl}
\log 113{,}0973 = & 2{,}0534242 \\
 & +\,268{,}8 \\
 & 11{,}5 \\ \hline
 & 2{,}0534522 \\
 & \cdot 2 \\ \hline
 & 4{,}1069044 \\
\log 36 = & 1{,}5563025 \\
\log\pi = & 0{,}4971499 \\ \hline
 & 6{,}1603568 \\
 & \cdot\frac{1}{3} \\ \hline
 & 2{,}0534523
\end{array}$$

4). $\log x_2 =$

$$\log 6 + \log 150{,}7964 - \log\sqrt[3]{36\cdot\pi\cdot 113{,}0973^2}$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl}
\log 6 = & 0{,}7781513 \\
+\log 150{,}7964 = & 2{,}1783725 \\
 & +\,172{,}8 \\
 & 11{,}5 \\ \hline
 & 2{,}9565422 \\
-\log\sqrt[3]{36\cdot\pi\cdot 113{,}0973^2} = & -\,2{,}0534523 \\
\text{[s. Hülfsrechn. 3)]} & \\ \hline
\log x_2 = & 0{,}9030899 \\
 & 46 \\ \hline
 & 53 \\
 & 48{,}6
\end{array}$$

mithin:

$x_2 = 7{,}99999$ oder abgerundet:

$\underline{\underline{x_2 = 8}}$

5). $\log y_1 = \frac{1}{2}\cdot$

$$\left[\log 3 + \log 452{,}3896 - \log 2\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 113{,}0973}\right]$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl}
\log 3 = & 0{,}4771213 \\
+\log 452{,}3896 = & 2{,}6555034 \\
 & +\,86{,}4 \\
 & 5{,}7 \\ \hline
 & 3{,}1326339 \\
-\log 2\cdot\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 113{,}0973} = & -\,1{,}5763311 \\
\text{[s. Hülfsrechn. 6)]} & \\ \hline
 & 1{,}5563028 \\
 & \cdot\frac{1}{2} \\ \hline
\log y_1 = & 0{,}7781514 \\
 & 1513
\end{array}$$

mithin:

$\underline{\underline{y_1 = 6{,}0000}}$

6). $\log 2\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 113{,}0973} =$

$$\log\sqrt[3]{48\pi^2\cdot 113{,}0973} =$$

$$\frac{1}{3}\cdot(\log 48 + 2\cdot\log\pi + \log 113{,}0973)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl}
\log\pi = & 0{,}4971499 \\
 & \cdot 2 \\ \hline
 & 0{,}9942998 \\
+\log 113{,}0973 = & 2{,}0534242 \\
 & +\,268{,}8 \\
 & 11{,}5 \\
+\log 48 = & 1{,}6812412 \\ \hline
 & 4{,}7289932 \\
 & \cdot\frac{1}{3} \\ \hline
 & 1{,}5763311
\end{array}$$

7). $\log y_2 = \frac{1}{2}\cdot$

$$\left[\log 3 + \log 150{,}7964 - \log 2\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 113{,}0973^2}\right]$$

Nun ist:

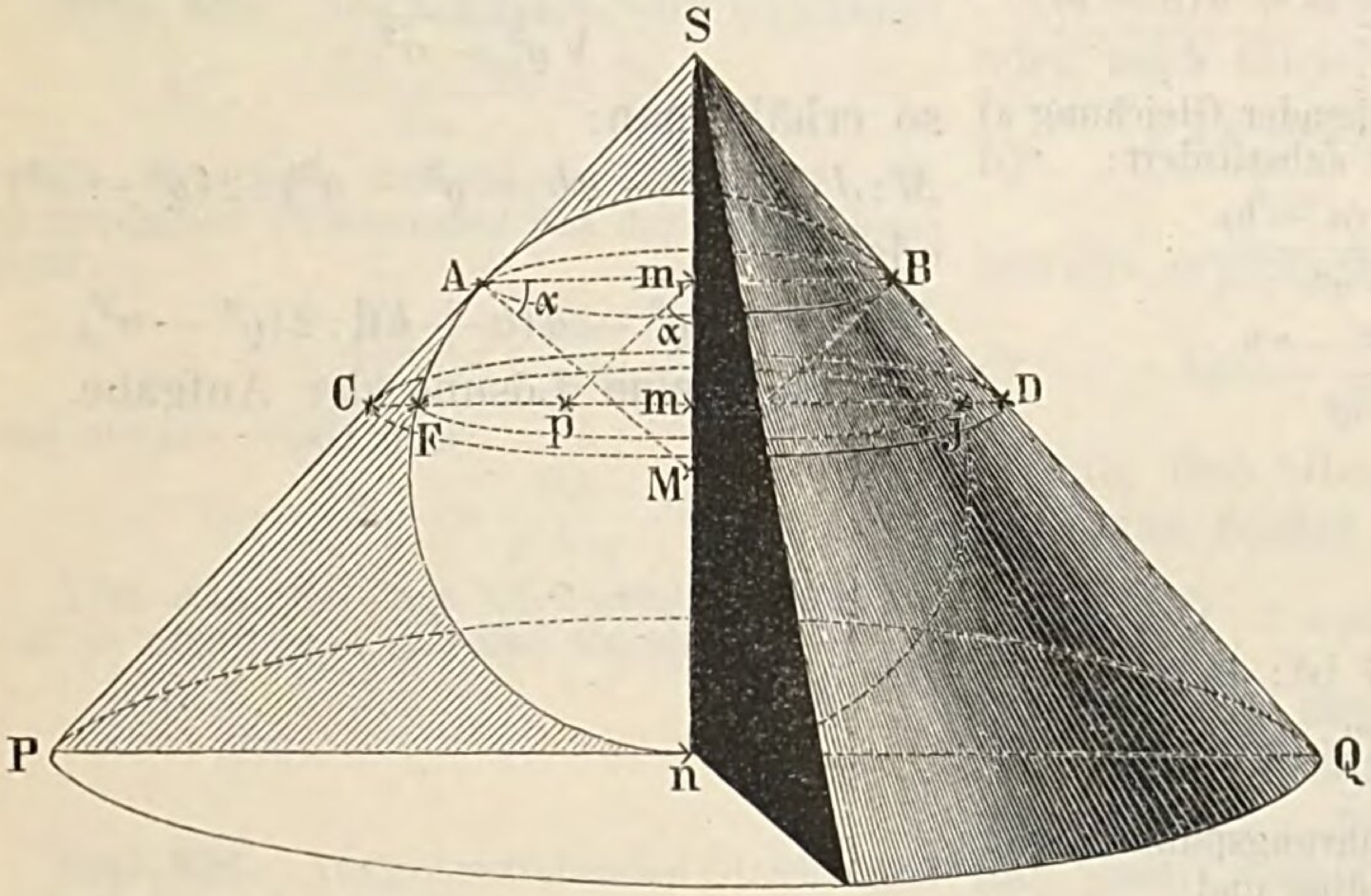
$$\begin{array}{rl}
\log 3 = & 0{,}4771213 \\
+\log 150{,}7964 = & 2{,}1783725 \\
 & +\,172{,}8 \\
 & 11{,}5 \\ \hline
 & 2{,}6555122 \\
-\log 2\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 113{,}0973} = & -\,1{,}5763311 \\
\text{[s. Hülfsrechn. 6)]} & \\ \hline
 & 1{,}0791811 \\
 & \cdot\frac{1}{2} \\ \hline
\log y_2 = & 0{,}5395905 \\
 & 5904
\end{array}$$

mithin:

$\underline{\underline{y_2 = 3{,}4641}}$

**Aufgabe 349.** Eine Kugel, deren Radius $= \varrho\ m$ gegeben ist, berührt die Mantelfläche eines geraden Kegels so, dass der Abstand der Ebene des Berührungskreises vom Mittelpunkt der Kugel $= a\ m$ beträgt. In welchem Verhältnis steht der Mantel des Kegelstumpfs, dessen einer Grundkreis jener Berührungskreis und dessen andrer Grundkreis der zu diesem parallele Kreis ist, welcher zwischen jenem Berührungskreis und dem Kugelmittelpunkt in dem Abstand $b\ m$ von letzterem liegt, zu dem Inhalt der zwischen diesen beiden Kreisebenen liegenden Kugelzone?

Figur 87.




**Erkl. 330.** Zieht man, siehe Figur 87, $m_1p \parallel AC$, so ist das Dreieck $pmm_1$ ähnlich dem Dreieck $Mm_1A$, weil

$$\sphericalangle pmm_1 = \sphericalangle Mm_1A = R$$

und nach der Erkl. 333:

$$\sphericalangle pm_1m = \sphericalangle MAm_1 \text{ ist.}$$

Aus der Aehnlichkeit jener Dreiecke erhält man die Proportion:

$$m_1p : MA = mm_1 : m_1A$$

oder, da $m_1p = AC = s$
$MA = \varrho$
$mm_1 = h$
$m_1A = r$ ist, die Proportion:

$$s : \varrho = h : r$$

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

I. $M = \pi s (R + r)$ (s. Erkl. 56)

Für eine Kugelzone:

II. $J = 2\pi r h$ (s. Erkl. 63).

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 87, durch die Axe $Sn$ des Kegels eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $SPQ$ und die Kugel in einem Kreis um $M$, welcher die Schenkel $SP$ und $SQ$ jenes Dreiecks berührt. Denkt man sich ferner parallel zur Ebene des Berührungskreises $AB$, dessen Abstand $Mm_1 = a$ sein soll, in dem gegebenen Abstande $Mm = b$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Kegel in dem Kreis $CD$, die Kugel in dem Kreis $FJ$ und es stellt $CDBA$ einen Durchschnitt des in Rede stehenden Kegelstumpfs und $FJBA$ einen Durchschnitt der in Rede stehenden Kugelzone dar.

Bezeichnet man nunmehr die Seitenlinie $AC$ des Kegelstumpfs mit $s$, die Radien $Cm$ und $Am_1$ seiner Grundkreise mit $R$ und $r$, den Mantel derselben mit $M$; bezeichnet man ferner die Höhe $mm_1$ der Kugelzone mit $h$, den Radius $MA = MF$ mit $\varrho$ und den Inhalt der Zone mit $J$, so hat man für das gesuchte Verhältnis nach vorstehenden Formeln, die Proportion:

$$M : J = \pi s (R + r) : 2\pi \varrho h$$

oder:

$$1) \ldots M : J = s(R + r) : 2\varrho h$$

Da nun nach der Erkl. 330:

$$s : \varrho = h : r \text{ ist,}$$

**Erkl. 331.** Aus dem rechtwinkligen Dreieck $Am_1M$, siehe Figur 87, erhält man:

$$Am_1 = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{Mm_1}^2}$$

oder: $$r = \sqrt{\varrho^2 - a^2}$$

**Erkl. 332.** Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $pmm_1$ und $Mm_1A$, siehe Fig. 87 und Erkl. 330, ergibt sich die Proportion:

$$pm : Mm_1 = mm_1 : Am_1$$

oder, da

$$pm = Cm - Cp = Cm - Am_1 = R - r$$
$$Mm_1 = a$$
$$mm_1 = Mm_1 - Mm = a - b$$

und $Am_1 = r$ ist, die Proportion:

$$(R - r) : a = (a - b) : r$$

und hieraus erhält man:

$$R - r = \frac{a(a-b)}{r}$$

$$R = r + \frac{a(a-b)}{r} = \frac{r^2 + a(a-b)}{r}$$

oder wenn man aus nebenstehender Gleichung a) den für $r$ gefundenen Wert substituiert:

$$R = \frac{\varrho^2 - a^2 + a(a-b)}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}$$

$$R = \frac{\varrho^2 - a^2 + a^2 - ab}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}$$

mithin:

$$R = \frac{\varrho^2 - ab}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}$$

**Erkl. 333.** In Figur 87 ist:

a) . . . $MA \perp pm_1$

weil $MA \perp AC$

nämlich ein nach dem Berührungspunkt $C$ der Tangente $SP$ gezogener Radius und

$mp \parallel AC$ ist.

Ferner ist:

b) . . . $Am \perp mm_1$

Nach der Erkl. 334 ist also:

$$\sphericalangle pm_1m = \sphericalangle MAm_1$$

**Erkl. 334.** Ein geometrischer Lehrsatz heisst:

„Stehen die Schenkel eines Winkels senkrecht auf den Schenkeln eines andern Winkels, so sind diese beiden Winkel gleich.“

so geht diese Proportion zunächst über in:

$$M : J = h(R + r) : 2rh$$

oder in:

2) . . . $M : J = (R + r) : 2r$

Da ferner:

a) . . . $r = \sqrt{\varrho^2 - a^2}$ (s. Erkl. 331)

und:

b) . . . $R = \dfrac{\varrho^2 - ab}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}$ (s. Erkl. 332)

ist, so erhält man aus Gleich. 2):

$$M : J = \left(\frac{\varrho^2 - ab}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}} + \sqrt{\varrho^2 - a^2}\right) : 2\sqrt{\varrho^2 - a^2}$$

multipliziert man schliesslich noch Zähler und Nenner des Quotienten rechts mit:

$$\sqrt{\varrho^2 - a^2}$$

so erhält man:

$$M : J = (\varrho^2 - ab + \varrho^2 - a^2) : 2(\varrho^2 - a^2)$$

oder:

$$M : J = [2\varrho^2 - a(a+b)] : 2(\varrho^2 - a^2)$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

---

**Aufgabe 350.** Durch eine Kugel wird eine Ebene gelegt, welche den darauf senkrechten Kugeldurchmesser in dem Verhältnis $p : q = 5 : 1$ teilt. Auf diese Schnittfläche wird im grösseren Kugelsegment ein gerader Kegel errichtet, dessen Spitze in der Kugeloberfläche liegt. Wenn das Volumen dieses

**Formeln:**

Für einen Kegel:

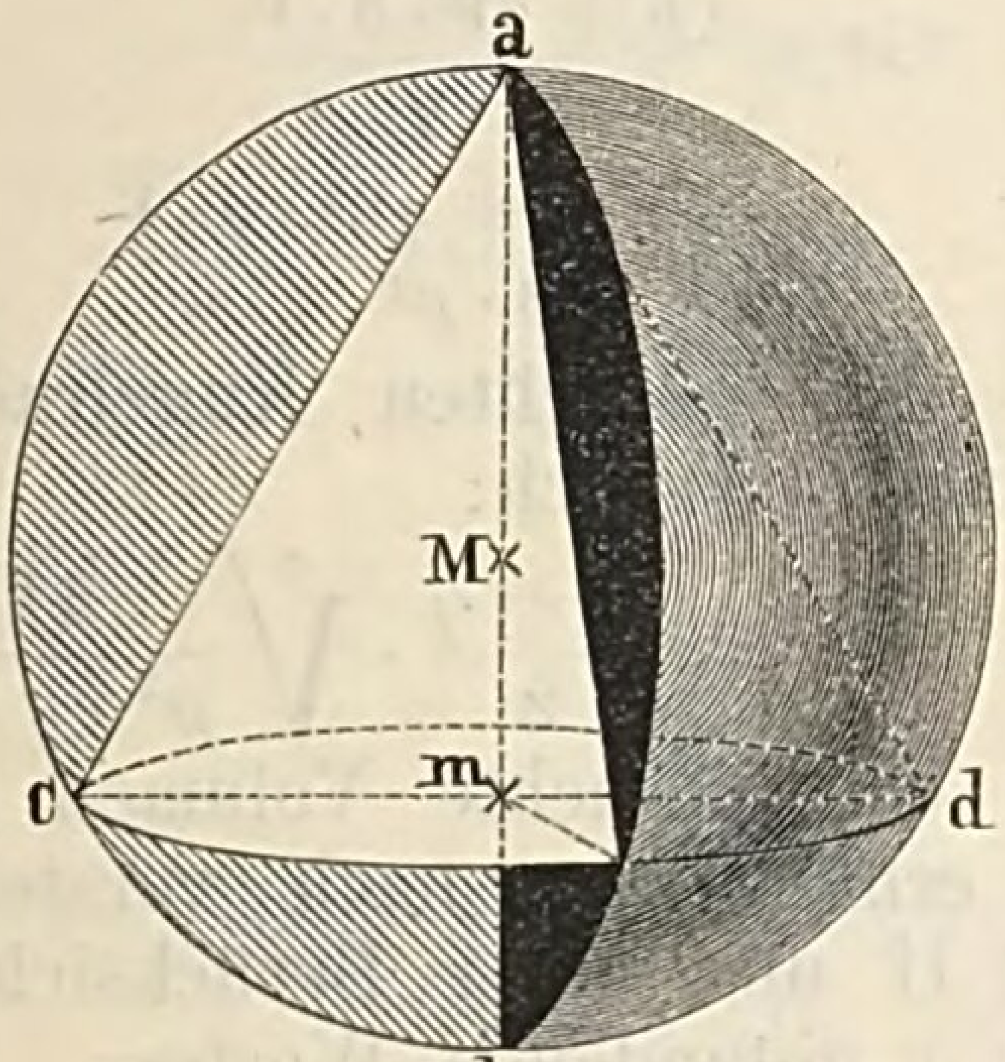
I. . . . $V = \dfrac{R^2 \cdot \pi \cdot H}{3}$ (s. Erkl. 50)

Für eine Kugel:

II. . . . $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67).

Kegels $K = 100$ cbm ist, wie gross ist dann der Radius und das Volumen der Kugel?

Figur 88.




**Erkl. 335.** Aus nebenstehender Gleichung:

$$\text{b)} \ldots \frac{2x - bm}{bm} = \frac{p}{q}$$

erhält man nach dem in der Erkl. 209 ausgesprochenen Summensatz aus der Proportionslehre:

$$\frac{2x}{p+q} = \frac{bm}{q}$$

und hieraus erhält man:

$$1) \ldots bm = \frac{2x}{p+q} \cdot q.$$

Löst man die obige Gleichung b) nach $bm$ auf, so erhält man dasselbe Resultat.

**Erkl. 336.** Aus nebenstehenden Gleichungen a) und c) ergibt sich:

$$H = am = 2x - \frac{2x}{p+q} \cdot q$$
$$= 2x\left(1 - \frac{q}{p+q}\right)$$
$$= 2x \cdot \frac{p+q-q}{p+q}$$
$$= 2x \cdot \frac{p}{p+q} = \frac{2x}{p+q} \cdot p$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Radius $x$ der Kugel beachte man, dass das Volumen des gedachten Kegels gegeben ist, dass man also zur Aufstellung einer Bestimmungsgleichung für $x$, die vorsteh. Formel I benutzen kann, wenn man die Dimensionen $R$ und $H$ des Kegels in den Radius $x$ der Kugel ausdrückt, was folgendermassen geschehen kann.

Aus der Figur 88 ergibt sich für die Höhe $H$ des Kegels:

$$\text{a)} \ldots H = am = ab - bm = 2x - bm$$

Ferner ist der Aufgabe gemäss:

$$\frac{am}{bm} = \frac{p}{q}$$

oder nach Gleichung a):

$$\text{b)} \ldots \frac{2x - bm}{bm} = \frac{p}{q}$$

hieraus ergibt sich nach der Erkl. 335:

$$\text{c)} \ldots bm = \frac{2x}{p+q} \cdot q$$

Aus den Gleichungen a) und c) erhält man ferner nach der Erkl. 336:

$$\text{d)} \ldots H = am = \frac{2x}{p+q} \cdot p$$

Verbindet man, siehe Fig. 88, $b$ mit $c$, so ist nach der Erkl. 215 das Dreieck $bca$ ein bei $c$ rechtwinkliges und man hat nach dem in der Erkl. 216 (oder 307) ausgesprochenen planimetrischen Satze, die Relation:

$$am : cm = cm : bm$$

oder:

$$\text{e)} \ldots \overline{am}^2 = am \cdot bm$$

und, wenn man $cm$ gleich dem Radius $R$ des Kegels und für $am$ und $bm$ die mittels der Gleichungen c) und d) gefundenen Werte setzt:

$$\text{f)} \ldots R^2 = \frac{4x^2}{(p+q)^2} \cdot p \cdot q$$

Mit Benutzung der vorstehenden Formel I. erhält man, wenn in derselben für $H$ und $R^2$ die mittels der Gleich. d) und f) gefundenen Werte substituiert werden, für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots V = \frac{4x^2}{(p+q)^2} \cdot p \cdot q \cdot \pi \cdot \frac{2x}{p+q} \cdot p : 3$$

Diese Gleichung reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$V = \frac{8x^3 \cdot p^2 \cdot q \cdot \pi}{(p+q)^3 \cdot 3}$$

$$x^3 = \frac{(p+q)^3 \cdot 3 \cdot V}{8 \cdot p^2 \cdot q \cdot \pi}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{(p+q))^3 \cdot 3 \cdot V}{8 \cdot p^2 \cdot q \cdot \pi}}$$

Für den gesuchten Kugelradius $x$ erhält man hiernach:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{p+q}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{p^2 \cdot q \cdot \pi}}$$

Für das gesuchte Volumen $y$ der Kugel erhält man nach vorstehender Formel II und unter Berücksichtigung des für $x$ gefundenen Wertes:

$$y = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{p+q}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{p^2 \cdot q \cdot \pi}}\right)^3$$

oder:

$$y = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{(p+q)^3}{8} \cdot \frac{3V}{p^2 \cdot q \cdot \pi}$$

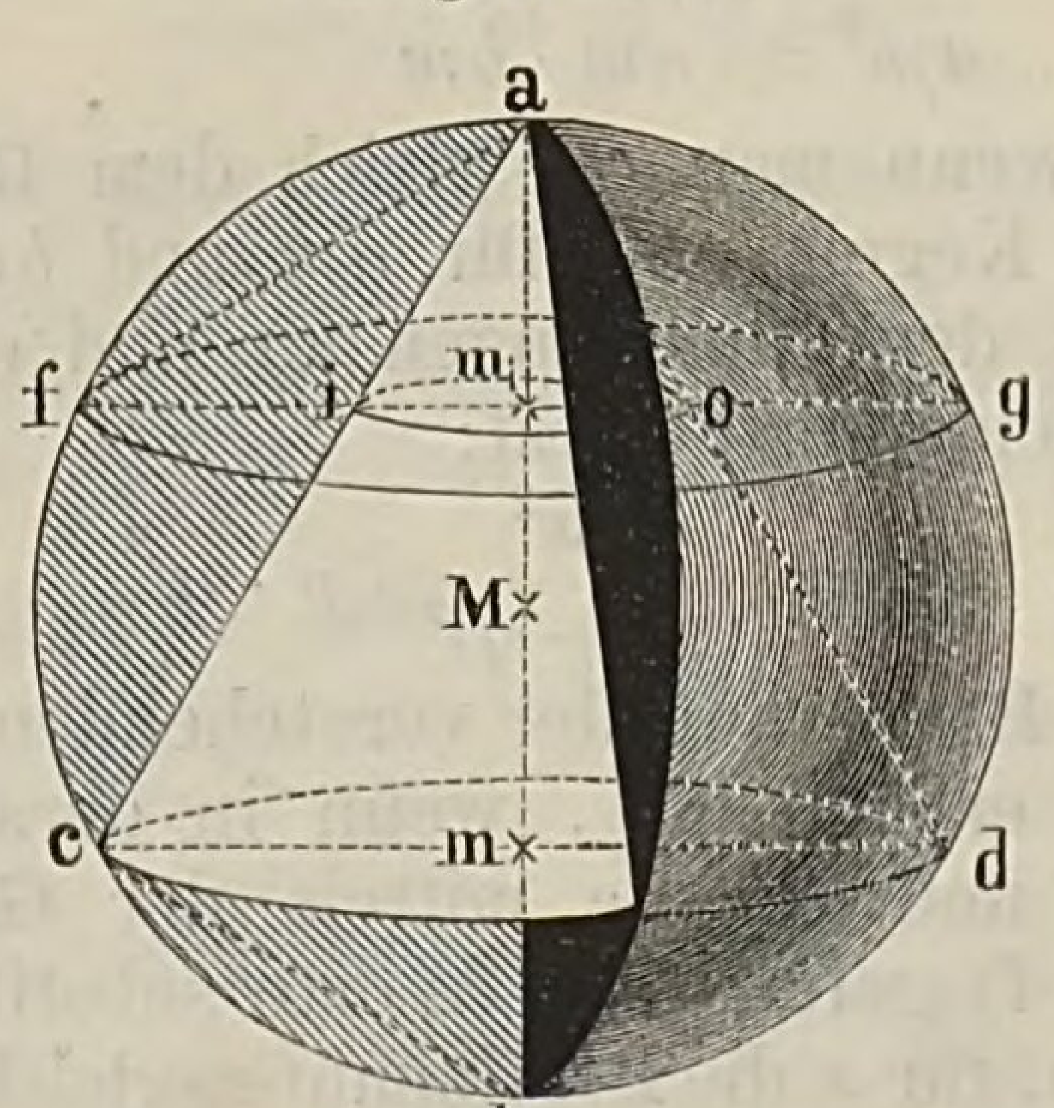
und

$$\text{B)} \ldots y = V \cdot \frac{(p+q)^3}{2p^2 \cdot q}$$

---

**Aufgabe 351.** Um einen geraden Kegel, dessen Radius $= r$ und dessen Höhe $= h$ gegeben ist, sei eine Kugel beschrieben. In welchem Abstand von der Grundfläche des Kegels kann man durch beide Körper eine zu derselben parallele Schnittfläche legen, dass die Schnittfigur der Kugel 2mal so gross als die des Kegels ist?

Figur 89.




**Auflösung.** Ist, siehe Figur 89, $fg$ die parallel der Grundfläche $cd$ des Kegels gelegt gedachte Schnittebene, so ist $mm_1$ gleich dem gesuchten Abstand $x$. Zur Aufstellung einer Bestimmungsgleichung für $x$ beachte man folgendes:

Bezeichnet man den unbekannten Radius $m_1 f$ mit $y$, den unbekannten Radius $m_1 i$ mit $z$, so soll die Schnittebene $fg$ so gelegt sein, dass der Aufgabe gemäss die Beziehung:

$$y^2 \cdot \pi = 2 \cdot z^2 \cdot \pi$$

stattfindet (siehe Erkl. 57).

Somit hat man zunächst die Gleichung:

$$1) \ldots y^2 = 2 \cdot z^2$$

Da ferner die Schnittebene $fg$ parallel $cd$ gelegt wurde, so muss $im_1 \parallel cm$ sein, woraus sich ergibt, dass die Dreiecke $am_1 i$ und $amc$ ähnlich sind. Aus

der Aehnlichkeit dieser Dreiecke ergibt sich die Relation:

$$im_1 : cm = cm_1 : am$$

Setzt man in derselben $im_1 = z$, $cm = r$, $am = h$ (siehe Erkl. 337) und $am_1 = am - m_1 m = h - x$, so erhält man die weitere Gleichung:

$$z : r = (h - x) : h$$

oder

$$2) \ldots z = \frac{r \cdot (h - x)}{h}$$

Da die Schnittebene $fg$ parallel $cd$ gelegt wurde, so muss auch die Sehne $fg$ des Kreises um $M$ senkrecht auf der Höhe $am$ des Kegels, bezw. senkrecht auf dem Durchmesser $ab$ des Kreises um $M$ stehen und man hat, da das gedachte Dreieck $afb$ ein bei $f$ rechtwinkliges ist, nach der Erkl. 215 die Relation.

**Erkl. 337.** In der Figur 89 stellt der Aufgabe 351 gemäss die Strecke $am$ die gegebene Höhe $h$ des Kegels, die Strecke $cm$ den gegebenen Radius $r$ derselben dar.

$$am_1 : fm_1 = fm_1 = m_1 b$$

Setzt man in derselben

$$am_1 = am - mm_1 = h - x$$

)nämlich gleich der Differenz der gegeb. Höhe $h = am$ des Kegels und des gesuchten senkrechten Abstandes $mm_1 = x$)

$fm_1 = y$ und

$m_1 b = mm_1 + mb = x + mb = x + w$

so erhält man die weitere Gleichung:

$$(h - x) : y = y : (x + w)$$

oder

$$3) \ldots y^2 = (x + w) \cdot (h - x)$$

In letzter Gleichung muss die neu eingeführte Unbekannte $w = mb$ noch näher bestimmt werden.

Nach der Erkl. 215 erhält man aus dem bei $c$ rechtwinkligen Dreieck $acb$, die Relation:

$$am : cm = cm : bm$$

Setzt man in derselben $am = h$, $cm = r$ und $bm = w$, so erhält man die dritte Bestimmungsgleichung:

$$4) \ldots h : r = r : w$$

Die gesuchte Grösse $x$ findet man aus den vier aufgestellten Bestimmungsgleichungen, wie folgt:

Aus Gleich. 4) erhält man:

$$5) \ldots w = \frac{r^2}{h}$$

Diesen Wert für $w$ in Gleich. 3) substituiert, gibt:

$$6) \ldots y^2 = \left(x + \frac{r^2}{h}\right) \cdot (h - x)$$

**Erkl. 338.** Die nebenstehende Gleich. 8) kann man durch $(h-x)$ dividieren. Enthält aber eine Gleichung einen Faktor, in welchem die Unbekannte vorkommt, so liefert dieser Faktor gleich Null gesetzt, ebenfalls einen Wurzelwert jener Gleichung. Man hat also für $x$ die weitere Bestimmungsgleichung:

$$a) \ldots h - x = 0$$

und hieraus ergibt sich:

$$x = h$$

Substituiert man ferner den sich aus Gleichung 2) für $z$ ergebenden Wert in Gleich. 1), so erhält man:

$$7) \ldots y^2 = \frac{2r^2(h-x)^2}{h^2}$$

und aus den erhaltenen Gleichungen 6) und 7) ergibt sich schliesslich für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$8) \ldots \left(x + \frac{r^2}{h}\right) \cdot (h-x) = \frac{2r^2(h-x)^2}{h^2}$$

Dividiert man diese Gleichung durch $(h-x)$ so erhält man:

$$9) \ldots x + \frac{r^2}{h} = \frac{2r^2(h-x)}{h^2} \text{ (s. Erkl. 338)}$$

und nach der Erkl. 338 für $x$ den Wurzelwert:

$$A) \ldots x_1 = h^{*})$$

Gleichung 9) weiter nach $x$ aufgelöst, ergibt der Reihe nach:

$$x + \frac{r^2}{h} = \frac{2r^2h}{h^2} - \frac{2r^2x}{h^2}$$

$$x + \frac{2r^2}{h^2}x = \frac{2r^2}{h} - \frac{r^2}{h}$$

$$x\left(1 + \frac{2r^2}{h^2}\right) = \frac{r^2}{h}$$

$$x \cdot \frac{h^2 + 2r^2}{h^2} = \frac{r^2}{h}$$

$$x = \frac{r^2 \cdot h^2}{h \cdot (h^2 + 2r^2)}$$

oder

$$B) \ldots x_2 = \frac{r^2 \cdot h}{h^2 + 2r^2}$$

*) Lässt der unter A) für $x_1$ gefundene Wert eine Deutung zu und welche?

---

**Aufgabe 352.** Man soll in eine gegebene Kugel mit dem Radius $r$ einen Kegel einbeschreiben, welcher

a) zu dem von der Grundfläche des Kegels liegenden Kugelsegment,

b) zu dem die Mantelfläche des Kegels umgebenden ringförmigen Teil der Kugel

in dem gegebenen Verhältnis $m:n$ steht. Wie gross ist in beiden Fällen der Abstand der Grundfläche des Kegels vom Mittelpunkt der Kugel?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

$$I. \ldots V = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 50).}$$

Für eine Kugel:

$$II. \ldots V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (s. Erkl. 67).}$$

Für ein Kugelsegment:

$$III. \ldots V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \text{ (s. Erkl. 151).}$$

**Auflösung.** Der gesuchte Abstand $Mm$, siehe Figur 88, der Kegelgrundfläche $cd$ vom Mittelpunkt $M$ der Kugel sei $= x$ (bezw. $y$). Der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichungen, aus welchen man für beide Fälle den

gesuchten Abstand $x$ (bezw. $y$) berechnen kann, besteht der Aufgabe gemäss darin, dass man das Volumen des Kegels, des betreff. Kugelsegments und des in Rede stehenden ringförmigen Teils der Kugel in $x$ (bezw. in $y$) ausdrückt, und die in der Aufgabe erwähnten Verhältnisse der Volumina zweier dieser Körper $= m:n$ setzt.

Das Volumen des Kegels drückt man folgendermassen in $x$ aus:

Für die Höhe $H$ des Kegels, siehe Fig. 88, hat man die Beziehung:

a) . . . $H = am = aM + Mm = r + x$

(da $aM$ der gegebene Radius der Kugel ist).

Für den Radius $R$ des Kegels hat man nach der Erkl. 215, die Beziehung:

$$am : cm = cm : bm$$

oder, da:

$$cm = R$$
$$am = r + x \text{ [siehe Gleich. a)] und}$$
$$bm = bM - Mm = r - x$$

gesetzt werden kann, die Beziehung:

$$(r + x) : R = R : (r - x)$$

hieraus erhält man:

b) . . . $R^2 = (r + x) \cdot (r - x)$

Für das Volumen $V$ des Kegels ergibt sich somit nach vorstehender Formel I:

$$V = \frac{(r + x) \cdot (r - x) \cdot \pi \cdot (r + x)}{3}$$

oder

1) . . . $V = \dfrac{(r + x)^2 \cdot (r - x) \cdot \pi}{3}$

Das Volumen des Kugelsegments $cbd$, siehe Figur 88, drückt man folgendermassen in $x$ aus:

Für die Höhe $h$ des Kugelsegments hat man die Beziehung:

c) . . . $h = bm = bM - mM = r - x$

Da ferner der Radius der diesem Segment zugehörigen Kugel gleich dem Radius $r$ der gegeb. Kugel ist, so hat man nach vorstehender Formel III. für das Volumen $V_1$ des Kugelsegments:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot (r - x)^2}{3} \cdot [3r - (r - x)]$$

oder

2) . . . $V_1 = \dfrac{\pi (r - x)^2}{3} \cdot (2r + x)$

Das Volumen $V_2$ des den Mantel des Kegels umgebenden ringförmigen Teils der Kugel findet man mittels der Betrachtung, dass derselbe gleich dem Volumen der ganzen Kugel, weniger dem Volumen des Kegels und weniger dem Volumen des Kugelsegments ist. Mit Benutzung der vorstehenden Formel II. und der Gleichungen 1) und 2) erhält man für das gesuchet Volumen $V_2$ jenes Körpers:

**Erkl. 339.** Die nebenstehende Gleichung:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{(r + x)^2 (r - x) \cdot \pi}{3} - \frac{\pi (r - x)^2 \cdot (2r + x)}{3}$$

kann man wie folgt reduzieren:

$$V_2 = \frac{\pi}{3}[4r^3 - (r^2 + 2rx + x^2) \cdot (r - x) - (r^2 - 2rx + x^2)(2r + x)]$$
$$= \frac{\pi}{3}[4r^3 - r^3 - 2r^2x - rx^2 + r^2x + 2rx^2 + x^3 - 2r^3 + 4r^2x - 2rx^2 - r^2x + 2rx^2 - x^3]$$
$$= \frac{\pi}{3}[r^3 + 2r^2x + rx^2]$$

oder

$$V_2 = \frac{\pi r}{3}(r^2 + 2rx + x^2)$$

und

$$V_2 = \frac{\pi r}{3}(r + x)^2$$

**Erkl. 340.** Umstehende Gleichung 4) reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$(r + x)^2 \cdot (r - x) : (r - x)^2 \cdot (2r + x) = m : n$$
$$(r + x)^2 : (r - x)(2r + x) = m : n$$
$$(r^2 + 2rx + x^2) : (2r^2 - 2rx + rx - x^2) = m : n$$
$$(r^2 + 2rx + x^2) : (2r^2 - rx - x^2) = m : n$$
$$nr^2 + 2rnx + nx^2 = 2mr^2 - rmx - mx^2$$
$$nx^2 + mx^2 + 2rnx + rmx = 2mr^2 - nr^2$$
$$x^2(m + n) + x \cdot r(2n + m) = r^2(2m - n)$$
$$x^2 + x \cdot \frac{r(2n + m)}{m + n} = \frac{r^2(2m - n)}{m + n}$$

$$x^2 + x \cdot \frac{r(2n+m)}{m+n} + \left(\frac{r(2n+m)}{2(m+n)}\right)^2$$

$$= \frac{r^2(2m-n)}{m+n} + \left(\frac{r(2n+m)}{2(m+n)}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{r(2n+m)}{2(m+n)}\right)^2 = \frac{r^2(2m-n)}{m+n} + \frac{r^2(2n+m)^2}{4(m+n)^2}$$

$$x + \frac{r(2n+m)}{2(m+n)} =$$

$$\pm\sqrt{\frac{4r^2(2m-n)(m+n) + r^2(2n+m)^2}{4(m+n)^2}}$$

$$x = -\frac{r(2n+m)}{2(m+n)}$$

$$\pm\sqrt{\frac{r^2(8m^2-4mn+8mn-4n^2+4n^2+4mn+m^2)}{4(m+n)^2}}$$

$$x = -\frac{r(2n+m)}{2(m+n)} \pm \frac{r}{2(m+n)}\sqrt{9m^2+8mn}$$

$$x = \frac{r}{2(m+n)}\left[-2n - m \pm \sqrt{m(9m+8n)}\right]$$

**Erkl. 341.** Nebenstehende Gleichung 5) reduziert und nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$(r+y)^2 \cdot (r-y) : r(r+y)^2 = m : n$$

$$(r-y) : r = m : n$$

$$nr - ny = mr$$

$$ny = nr - mr$$

oder

$$y = \frac{r(n-m)}{n}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{(r+x)^2(r-x)\cdot\pi}{3}$$

$$- \frac{\pi(r-x)^2 \cdot (2r+x)}{3}$$

oder nach der Erkl. 339:

$$3) \ldots V_2 = \frac{\pi r}{3}(r+x)^2$$

Nach dem in der Aufgabe unter a) gegebenen Verhältnis hat man mit Benutzung der vorstehenden Gleichungen 1) u. 2) für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$4) \frac{(r+x)^2 \cdot (r-x) \cdot \pi}{3} : \frac{\pi \cdot (r-x)^2}{3} \cdot (2r+x)$$

$$= m : n$$

und hieraus findet man nach der Erklärung 340 für $x$ den Wert:

$$A) \ldots x = \frac{r}{2(m+n)}$$

$$\cdot\left[-2n - m \pm \sqrt{m(9m+8n)}\right]$$

Nach dem in der Aufgabe unter b) gegebenen Verhältnis hat man mit Benutzung der vorstehenden Gleichungen 1) und 3) wenn man in denselben statt $x$ den Buchstaben $y$ substituiert, für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$5) \frac{(r+y)^2 \cdot (r-y) \cdot \pi}{3} : \frac{\pi r}{3}(r+y)^2 = m : n$$

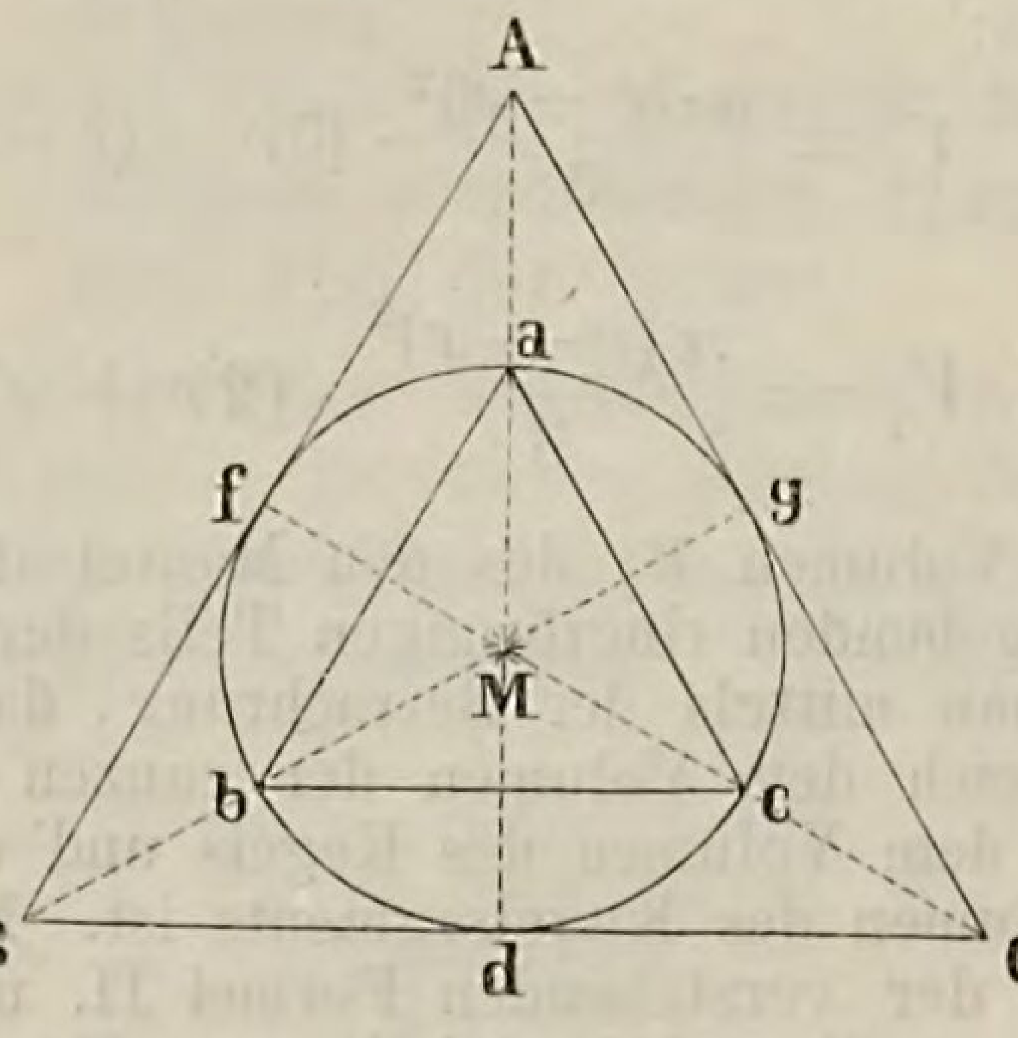
und hieraus findet man nach der Erklärung 341 für $y$ den Wert:

$$B) \ldots y = \frac{r(n-m)}{n}$$

---

**Aufgabe 353.** Um und in eine Kugel sei ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich ihre Oberflächen zur Oberfläche der Kugel?

Figur 90.




**Formeln:**

Für einen gleichseitigen Kegel:

$$\text{I.} \ldots O = 3 \cdot \pi \cdot R^2 \quad \text{(s. Erkl. 117)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II.} \ldots O = 4\pi r^2 \quad \text{(s. Erkl. 62).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch den Mittelpunkt $M$ der Kugel eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die Kugel in einem grössten Kreis und jeden der beiden Kegel in einem gleichseitigen Dreiecke (s. Erkl. 113), welches die jenem Kreis um- bezw. eingeschriebenen Dreiecke sind, siehe Figur 90.

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses drücke man die Oberfläche der beiden Kegel in den Radius $r$ der Kugel aus.

Nach vorstehender Formel I hat man für die Oberfläche $O_1$ des umschriebenen Kegels $ABC$, siehe Fig. 90, wenn man für dessen Grundflächenradius nach der Figur $= Bm_1$ setzt:

$$\text{a)} \ldots O_1 = 3\pi \cdot \overline{Bm_1}^2$$

in analoger Weise hat man für die Oberfläche $O_3$ des eingeschriebenen Kegels $abc$, wenn man nach der Figur für dessen Grundflächenradius $= bm$ setzt:

$$\text{b)} \ldots O_3 = 3\pi \cdot \overline{bm}^2$$

Da nun $Bm_1$ gleich der halben Seite des gleichseitigen Dreiecks $ABC$ und nach der Erkl. 342 eine Seite desselben in den Radius $r$ des eingeschriebenen Kreises, bezw. der Kugel ausgedrückt $= 2r\sqrt{3}$ ist, und da ferner $bm$ gleich der halben Seite des gleichseitigen Dreiecks $abc$, und nach den Erkl. 343 und 344 eine Seite desselben in den Radius $r$ des umschriebenen Kreises, bezw. der Kugel, ausgedrückt:

$$= r \cdot \sqrt{3}$$

ist, so gehen die Gleichungen a) und b) bezw. über in:

$$\text{c)} \ldots O_1 = 3\pi \cdot \left(\frac{2r\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

und

$$\text{d)} \ldots O_3 = 3\pi \cdot \left(\frac{r \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Da schliesslich noch nach vorstehender Formel II für die Oberfläche $O_2$ der Kugel die Relation besteht:

$$\text{e)} \ldots O_2 = 4\pi r^2$$

so erhält man nach den Gleichungen c), d) und e) für das gesuchte Verhältnis:

$$1) \ldots O_1 : O_2 : O_3 = 3\pi \cdot \left(\frac{2r\sqrt{3}}{2}\right)^2 : 4\pi r^2 : 3\pi \cdot \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$O_1 : O_2 : O_3 = 9r^2 : 4r^2 : \frac{9r^2}{4}$$

$$O_1 : O_2 : O_3 = 9 : 4 : \frac{9}{4}$$

und nach der Erkl. 82:

$$\text{A)} \ . \ O_1 : O_2 : O_3 = 36 : 16 : 9 = 6^2 : 4^2 : 3^2$$

---

**Erkl. 342.** Bezeichnet man die Seite eines regulären (gleichseitigen) Dreiecks mit $S_3$, den Radius des demselben eingeschriebenen Kreises mit $r$, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

$$1) \ldots S_3 = 2r \cdot \sqrt{3} \ ^*)$$

(siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

*) Diese Formel kann man sich auf leichte Weise ableiten, wenn man die in der Erkl. 310 ausgesprochenen planimetrischen Sätze berücksichtigt.

**Erkl. 343.** Bezeichnet man die Seite eines regulären (gleichseitigen) Dreiecks mit $s_3$, den Radius des demselben umgeschriebenen Kreises mit $R$, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

$$1) \ldots s_3 = R \cdot \sqrt{3} \ ^*)$$

(siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

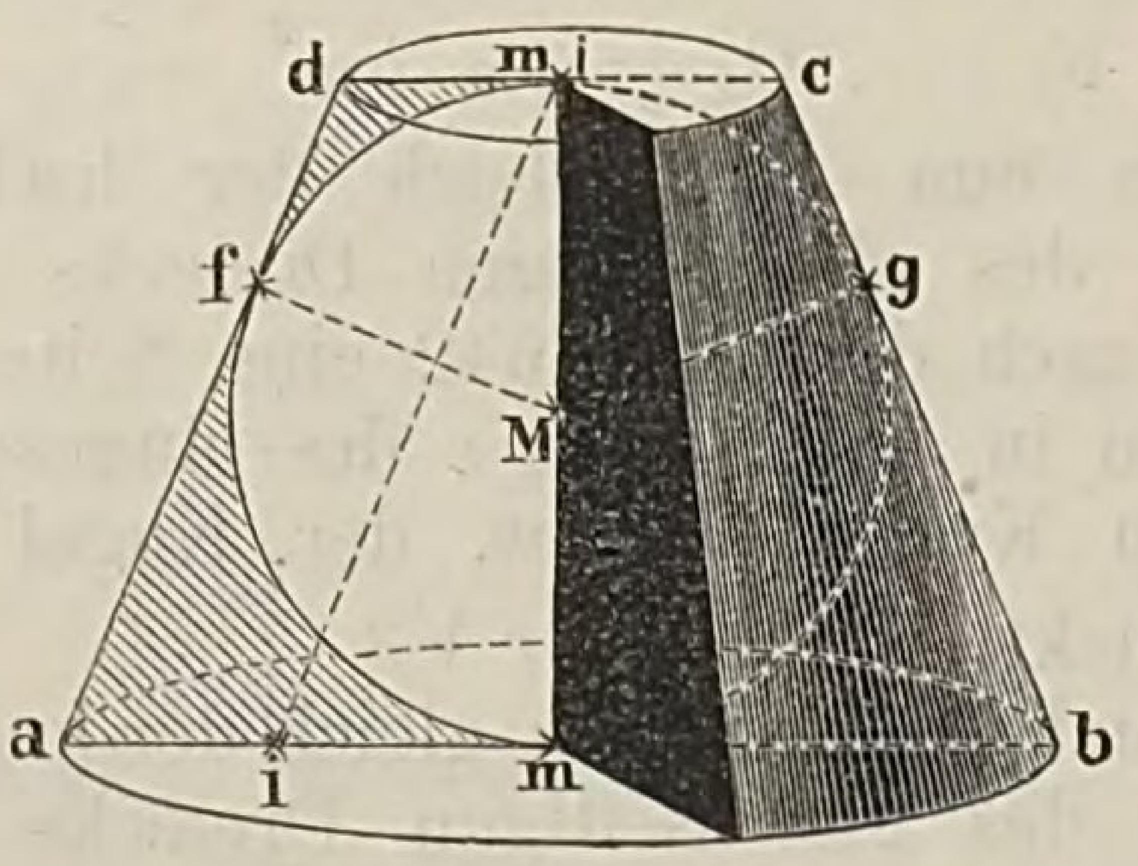
*) Diese Formel kann man sich auf leichte Weise ableiten, wenn man die in der Erkl. 310 ausgesprochenen planimetrischen Sätze berücksichtigt.

**Erkl. 344.** Da in nebenstehender Auflösung der Radius des Kreises um $M$ in Figur 90 mit $r$ bezeichnet wurde, so geht für diese Bezeichnung die in der Erkl. 343 aufgestellte Gleichung 1) über in:

$$s_3 = r \cdot \sqrt{3}$$

**Aufgabe 354.** Unter welchen Bedingungen kann man in einen geraden Kegelstumpf eine dessen Grundflächen und Mantel berührende Kugel konstruieren und wie gross ist der Radius dieser Kugel, wenn die Radien der Grundflächen des Kegelstumpfs bezw. $r = 9$ und $r_1 = 4$ dm betragen?

Figur 91.




**Erkl. 345.** Ein Antiparallelogramm ist ein Paralleltrapez $abcd$, siehe Figur 91, in welchem die nicht parallelen Seiten $ad$ und $bc$ einander gleich sind.

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

**Erkl. 346.** Nach dem planimetrischen Lehrsatze:

„Die Tangenten, welche man von einem Punkte an einen Kreis ziehen kann, sind gleich lang,“ ist in der Figur 91:

$$af = am = r$$

und

$$df = dm_1 = r_1$$

**Erkl. 347.** Nach dem Satz aus der Potenzenlehre:

„Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist gleich dem Produkte bestehend aus der Summe und der Differenz jener Zahlen,“ in Zeichen:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

kann man:

$$(r + r_1)^2 - (r - r_1)^2 = [(r + r_1) + (r - r_1)] \cdot [(r + r_1) - (r - r_1)]$$

setzen.

**Erkl. 348.** Bezeichnet man den Radius des dem Antiparallelogramm $abcd$, siehe Figur 91, einbeschriebenen Kreises mit $r$, die parallelen Seiten $ab$ und $cd$ des Antiparallelogramms bezw. mit $a$ und $b$, also die Hälften $am$ und $dm_1$ dieser Seiten, bezw. mit $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$, so ergibt sich nach nebenstehender Gleichung A), dass

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe $mm_1$ des Kegelstumpfs, siehe Figur 91, eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Kegelstumpf in dem Antiparallelogramm $abcd$ (siehe Erkl. 345). Ist der Kegelstumpf ein solcher, in welchem sich eine die Grundflächen und den Mantel des Stumpfs berührende Kugel konstruieren lässt, so muss jene Ebene die gedachte Kugel in einem grössten Kreis schneiden, welches der dem Antiparallelogramm $abcd$ einbeschriebene Kreis um $M$ ist.

Zur Aufstellung einer Beziehung, welche hiernach zwischen dem gesuchten Radius $x$ der gedachten Kugel und den Radien $r$ und $r_1$ der Grundflächen des Stumpfs besteht, ziehe man sich in der Figur 91 die Linie $im_1 \parallel ad$. Aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $imm_1$ ergibt sich die Relation:

$$\text{a)} \ldots \overline{mm_1}^2 = \overline{im_1}^2 - \overline{im}^2$$

Da nun:

$$\alpha) \ldots mm_1 = 2 \cdot x$$

(nämlich gleich dem Durchmesser $2x$ der gedachten Kugel bezw. gleich der Höhe des Antiparallelogramms $abcd$ oder des Stumpfs).

$$\beta)\ im = am - ai = am - dm_1 = r - r_1$$

und nach der Erkl. 346:

$$\gamma)\ im_1 = ad = af + fd = am + dm_1 = r + r_1$$

ist, so geht die unter a) aufgestellte Relation über in:

$$1) \ldots (2x)^2 = (r + r_1) - (r - r_1)^2$$

Hieraus findet man den gesuchten Kugelradius $x$ wie folgt:

$$(2x)^2 = [(r + r_1) + (r - r_1)] \cdot [(r + r_1) - (r - r_1)] \text{ (s. Erkl. 347)}$$

$$(2x)^2 = (r + r_1 + r - r_1)(r + r_1 - r + r_1)$$

$$(2x)^2 = 2r \cdot 2r_1 = 4 \cdot r \cdot r_1$$

$$2x = \pm\sqrt{4 \cdot r \cdot r_1}$$

$$2x = 2\sqrt{r \cdot r_1}$$

oder

$$\text{A)} \ldots x = \sqrt{r \cdot r_1} \text{ (s. Erkl. 348).}$$

zwischen dem Radius $r$ des diesem Antiparallelogramm einbeschriebenen Kreises und den parallelen Seiten $a$ und $b$ desselben die Relation besteht:

$$1) \ldots r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a \cdot b}$$

(Siehe auch Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$x = \sqrt{9 \cdot 4} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ dm}$$

---

**Aufgabe 355.** Wie gross sind die Radien der Grundflächen eines geraden Kegelstumpfs, in welchem sich eine Kugel mit dem gegebenen Radius $r$ konstruieren lässt; wenn vorausgesetzt wird, dass das Volumen der Kugel $n$ mal kleiner als das des Kegelstumpfs ist?

**Formeln:**

Für eine Kugel:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67)}$$

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{\pi H}{3} \cdot [R^2 + Rr + r^2] \quad \text{(s. Erkl. 53).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man die gesuchten Radien der Kegelgrundflächen mit $x$ und $y$, so hat man nach der Auflösung der vorigen Aufgabe zwischen jenen Radien und dem Radius $r$ der Kugel zunächst die Beziehung:

$$1) \ldots r = \sqrt{x \cdot y}$$

Der Sinn einer zweiten anzusetzenden Bestimmungsgleichung besteht darin, dass das Volumen des Kegelstumpfs $n$ mal grösser sein soll als das der Kugel.

Da nun die Höhe des Kegelstumpfs, siehe Figur 91, $= mm_1 = 2r$ ist, so hat man nach vorstehender Formel II für das Volumen $V$ des Stumpfes:

$$a) \ldots V = \frac{\pi \cdot 2r}{3} \cdot [x^2 + x \cdot y + y^2]$$

ferner hat man nach der Formel I für das Volumen $V_1$ der Kugel:

$$b) \ldots V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Wie vorhin erwähnt, besteht also die weitere Gleichung:

$$2) \ldots \frac{\pi \cdot 2r}{3}[x^2 + x \cdot y + y^2] = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) kann man nunmehr $x$ und $y$ wie folgt bestimmen:

Beide Gleichungen reduziert ergeben die einfacheren Gleichungen:

$$3) \ldots x \cdot y = r^2$$

und

$$4) \ldots x^2 + x \cdot y + y^2 = 2nr^2$$

**Erkl. 349.** Bei dem Auflösen quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten versuche man symmetrische Ausdrücke, z. B. die Summe und die Differenz der beiden Unbekannten herzustellen.

Hat man z. B. die nebenstehenden Gleichungen:

$$3) \ldots x \cdot y = r^2$$

und

$$4) \ldots x^2 + x \cdot y + y^2 = 2nr^2$$

und man addiert die Gleichung 3) zu Gleich. 4), so erhält man:

$$x^2 + 2 \cdot xy + y^2 = 2nr^2 + r^2$$

oder

$$(x + y)^2 = r^2(2n + 1)$$

$$x + y = \pm\sqrt{r^2(2n + 1)}$$

und, da das negative Vorzeichen für die Summe zweier Strecken keinen Sinn zulässt:

$$\alpha) \ldots x + y = r\sqrt{2n + 1}$$

Subtrahiert man hingegen das 3-fache der Gleich. 3) von Gleich. 4), so erhält man:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2nr^2 - 3r^2$$

oder

$$(x - y)^2 = r^2(2n - 3)$$

$$x - y = \pm\sqrt{r^2(2n - 3)}$$

und hieraus erhält man, wenn $x$ den Radius der grösseren Grundfläche bedeutet:

$$\beta) \; x - y = r \cdot \sqrt{2n - 3}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach der Erkl. 349 die zwei weiteren, einfacheren Gleichungen:

5) . . . $x+y=r\cdot\sqrt{2n+1}$

und

6) . . . $x-y=r\cdot\sqrt{2n-3}$

Durch Addition der Gleichungen 5) und 6) erhält man endlich für den gesuchten Radius $x$ der grösseren Grundfläche:

$$2x=r\cdot\sqrt{2n+1}+r\cdot\sqrt{2n-3}$$

oder

A) . . $x=\frac{r}{2}\cdot(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-3})$

und durch Subtraktion der Gleich. 6) von Gleich. 5) erhält man für den gesuchten Radius $y$ der kleineren Grundfläche:

$$2y=r\cdot(\sqrt{2n+1}-r\sqrt{2n-3})$$

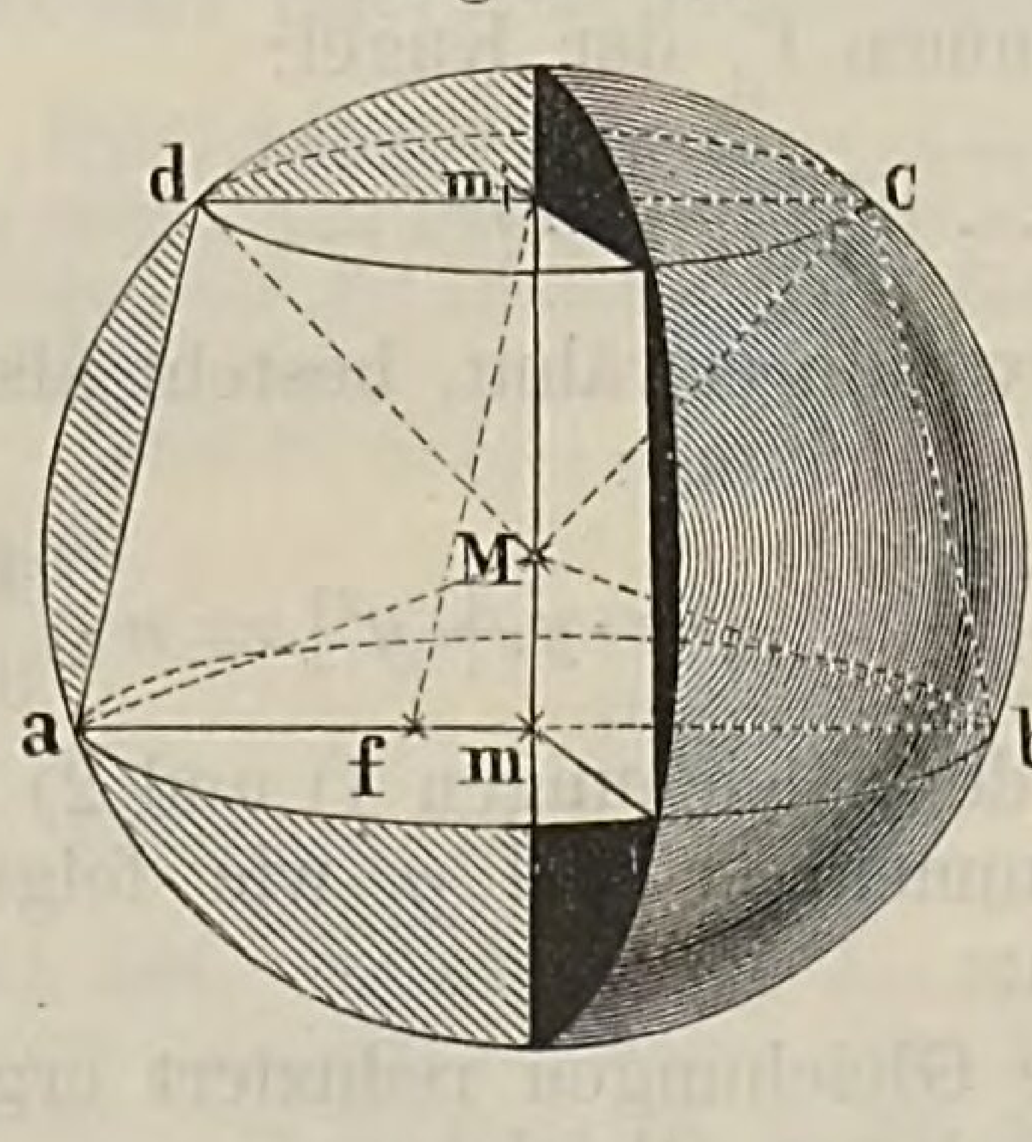
oder

B) . . $y=\frac{r}{2}\cdot(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-3})$

---

**Aufgabe 356.** Die Seitenlinie eines geraden Kegelstumpfs sei $=s$, seine Höhe $=H$ und der Mantel des Stumpfs sei gleich der Summe der Inhalte seiner Grundflächen. Wie gross ist der Radius und die Oberfläche derjenigen Kugel, welche man so um den Kegelstumpf konstruieren kann, dass die Grundflächen des Stumpfs Schnittkreise jener Kugel sind?

Figur 92.




**Formeln:**

Für einen geraden Kegelstumpf:

I. . . . $M=\pi\cdot s\cdot(R+r)$ (s. Erkl. 56)

Für eine Kugel:

II. . . . $O=4\pi r^2$ (s. Erkl. 62).

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe eines geraden Kegelstumpfs, um welchen eine Kugel so beschrieben ist, dass die Grundflächen des Stumpfs Schnittkreise der Kugel sind, eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Kegelstumpf nach einem Antiparallelogramm (siehe Erkl. 345) und die Kugel nach einem grössern Kreis, welches der diesem Antiparallelogramm umbeschriebene Kreis ist, siehe Figur 92.

Der Radius $Ma$ ($=Mb=Mc=Md$) dieses Kreises ist gleich dem gesuchten Radius $x$ der Kugel.

Um diesen Radius $x$ des dem Antiparallelogramm umbeschriebenen Kreises berechnen zu können, muss man zunächst die Bestimmungsstücke des ersteren aufsuchen, was wie folgt geschieht:

Die Seitenlinie $s$ des Kegelstumpfs, bezw. eine der nichtparallelen Seiten

**Erkl. 350.** Nebenstehende Gleichungen:

1) . . . $\pi s\cdot(y+z)=y^2\cdot\pi+z^2\cdot\pi$

2) . . . $(y-z)^2=s^2-H^2$

reduziert und nach $y$ und $z$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

3) . . . $y^2+z^2-sy-sz=0$

4) . . . $y-z=\sqrt{s^2-H^2}$ *)

Substituiert man den sich aus Gleichung 4) für $y$ ergebenden Wert:

5) . . . $y=z+\sqrt{s^2-H^2}$

in Gleichung 3), so erhält man:

$$(z+\sqrt{s^2-H^2})^2+z^2-s(z+\sqrt{s^2-H^2})-zs=0$$

oder

$$z^2+2z\sqrt{s^2-H^2}+s^2-H^2+z^2-sz-s\sqrt{s^2-H^2}-sz=0$$

$$2z^2+2z(\sqrt{s^2-H^2}-s)=s\sqrt{s^2-H^2}-s^2+H^2$$

$$z^2+z(\sqrt{s^2-H^2}-s)=\frac{s\sqrt{s^2-H^2}-s^2+H^2}{2}$$

$$z^2+z(\sqrt{s^2-H^2}-s)+\left(\frac{\sqrt{s^2-H^2}-s}{2}\right)^2=\frac{s\sqrt{s^2-H^2}-s^2+H^2}{2}+\left(\frac{\sqrt{s^2-H^2}-s}{2}\right)^2$$

$$\left(z+\frac{\sqrt{s^2-H^2}-s}{2}\right)^2=\frac{2s\sqrt{s^2-H^2}-2s^2+2H^2+s^2-H^2-2s\sqrt{s^2-H^2}+s^2}{4}$$

$$z+\frac{\sqrt{s^2-H^2}-s}{2}=\pm\sqrt{\frac{H^2}{4}}$$

$$z=-\frac{\sqrt{s^2-H^2}-s}{2}+\frac{H}{2}$$

oder

a) . . . $z=\frac{1}{2}(H+s-\sqrt{s^2-H^2})$

Setzt man diesen für $z$ gefundenen Wert in vorstehende Gleichung 5), so erhält man:

$$y=\frac{1}{2}(H+s-\sqrt{s^2-H^2})+\sqrt{s^2-H^2}$$

oder

$$y=\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sqrt{s^2-H^2}+\frac{2}{2}\sqrt{s^2-H^2}$$

und schliesslich:

b) . . . $y=\frac{1}{2}(H+s+\sqrt{s^2-H^2})$

**Erkl. 351.** Umstehende Gleichung:

7) . . . $H=\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2-z^2}$

kann man wie folgt nach $x$ auflösen; man setze:

$$y^2=a$$
$$z^2=b$$
$$x^2=u$$

und quadriere zunächst, man erhält:

$$H^2=u-a+u-b+2\cdot\sqrt{(u-a)(u-b)}$$

reduziert gibt:

$$H^2-2u+a+b=2\cdot\sqrt{(u-b(u-b)}$$

$$(H^2+a+b)-2u=2\sqrt{(u-a)(u-b)}$$

des Antiparallelogramms und die Höhe $H$ desselben sind gegeben; in der Fig. 92 ist also:

$$ad=s$$
$$mm_1=H$$

Ferner ist eine Beziehung zwischen der Mantelfläche des Stumpfs und den Grundflächen gegeben; bezeichnet man nämlich den Radius der grösseren Grundfläche mit $y$ und den der kleineren Grundfläche des Kegelstumpfs mit $z$, so hat man nach vorstehender Formel I, der Erkl. 57 und der Aufgabe gemäss, für $y$ und $z$, d. s. die halben Längen $am$ und $dm_1$ der parallelen Seiten $ab$ und $cd$ des Antiparallelogramms, die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $\pi\cdot s\cdot(y+z)=y^2\cdot\pi+z^2\cdot\pi$

Zur Aufstellung einer zweiten Bestimmungsgleichung für $y$ und $z$ ziehe man in Figur 92 $m_1f \parallel ad$; in dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $fmm_1$ ist alsdann:

$$fm_1=ad=s$$
$$mm_1=H$$
$$fm=am-af=am-dm=y-z$$

und man hat die Relation:

$$\overline{fm}^2=\overline{fm_1}^2-\overline{mm_1}^2$$

oder die zweite Bestimmungsgleichung

2) . . . $(y-z)^2=s^2-H^2$

Aus den Gleichungen 1) und 2) findet man nach der Erkl. 350:

3) . $am=y=\frac{1}{2}(H+s+\sqrt{s^2-H^2})$

4) . $dm_1=z=\frac{1}{2}(H+s-\sqrt{s^2-H^2})$

Zur Bestimmung des gesuchten Radius $Ma=Md=a$ hat man in den bei $m$ und $m_1$ rechtwinkligen Dreiecken $amM$ und $dm_1M$:

$$\overline{mM}^2=\overline{aM}^2-\overline{am}^2$$

und

$$\frac{H^2 + a + b}{2} - u = \sqrt{(u-a)(u-b)}$$

abermals quadriert, gibt:

$$\left(\frac{H^2 + a + b}{2}\right)^2 - u\cdot(H^2 + a + b) + u^2 = (u-a)(u-b)$$

reduziert gibt:

$$\left(\frac{H^2 + a + b}{2}\right)^2 - u(H^2 + a + b) + u^2 = u^2 - au - bu + ab$$

Diese Gleichung nach $u$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$au + bu - u(H^2 + a + b) = ab - \left(\frac{H^2 + a + b}{2}\right)^2$$

$$u(a + b - H^2 - a - b) = ab - \left(\frac{H^2 + a + b}{2}\right)^2$$

$$u \cdot - H^2 = ab - \frac{(H^2 + a + b)^2}{4}$$

oder

$$u = -\frac{ab}{H^2} + \frac{(H^2 + a + b)^2}{4H^2}$$

Setzt man hierin für $u$, $a$ u. $b$ seine früheren Werte, so erhält man:

$$x^2 = -\frac{y^2 \cdot z^2}{H^2} + \frac{(H^2 + y^2 + z^2)^2}{4H^2}$$

$$x = \pm\frac{1}{2H}\sqrt{(H^2 + y^2 + z^2)^2 - 4y^2z^2}$$

oder noch weiter reduziert:

$$x = \frac{1}{2H}\sqrt{(H^2 + y^2 + z^2)^2 - (2yz)^2}$$

$$x = \frac{1}{2H}\sqrt{(H^2 + y^2 + z^2 + 2yz)(H^2 + y^2 + z^2 - 2yz)}$$

mithin:

$$\text{a)}\quad x = \frac{1}{2H}\sqrt{[H^2 + (y+z)^2][H^2 + (y-z)^2]}$$

**Erkl. 352.** Aus umstehenden Gleichungen:

$$3)\ .\ .\ y = \frac{1}{2}\left(H + s + \sqrt{s^2 - H^2}\right)$$

$$4)\ .\ .\ z = \frac{1}{2}\left(H + s - \sqrt{s^2 - H^2}\right)$$

$$8)\quad x = \frac{1}{2H}\sqrt{[H^2 + (y+z)^2]\cdot[H^2 + (y-z)^2]}$$

erhält man der Reihe nach:

$$x = \frac{1}{2H}\cdot\sqrt{[H^2 + (H+s)^2]\cdot[H^2 + (\sqrt{s^2 - H^2})^2]}$$

$$x = \frac{1}{2H}\sqrt{[H^2 + (H+s)^2]\cdot(H^2 + s^2 - H^2)}$$

oder

$$\text{a)}\ .\ .\ .\ x = \frac{s}{2H}\cdot\sqrt{H^2 + (H+s)^2}$$

$$\overline{m_1M}^2 = \overline{dM}^2 - \overline{dm_1}^2$$

oder

$$5)\ .\ .\ .\ mM = \sqrt{x^2 - y^2}$$

und

$$6)\ .\ .\ .\ m_1M = \sqrt{x^2 - z^2}$$

Da nun:

$$nM + m_1M = H$$

nämlich gleich der gegebenen Höhe des Stumpfs, bezw. des Antiparallelogramms $abcd$ ist, so erhält man durch Addition der Gleichungen 5) und 6) für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$7)\ .\ .\ .\ H = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 - z^2}$$

Löst man diese Gleichung nach $x$ auf, so erhält man nach der Erkl. 351:

$$8)\quad x = \frac{1}{2H}\sqrt{[H^2 + (y+z)][H^2 + (y-z)^2]}$$

Substituiert man nunmehr in diese Gleichung die nach den Gleichungen 3) und 4) für $y$ und $z$ gefundenen Werte, so erhält man nach der Erkl. 352 für den gesuchten Radius $x$ der Kugel:

$$\text{A)}\ .\ .\ .\ x = \frac{s}{2H}\cdot\sqrt{H^2 + (H+s)^2}$$

Für die Oberfläche $O$ dieser Kugel hat man nach vorstehender Formel II und in Rücksicht des soeben für $x$ gefundenen Wertes:

$$O = 4\pi\cdot\left(\frac{s}{2H}\cdot\sqrt{H^2 + (H+s)^2}\right)^2$$

oder

$$O = 4\pi\cdot\frac{s^2}{4H^2}\cdot[H^2 + (H+s)^2]$$

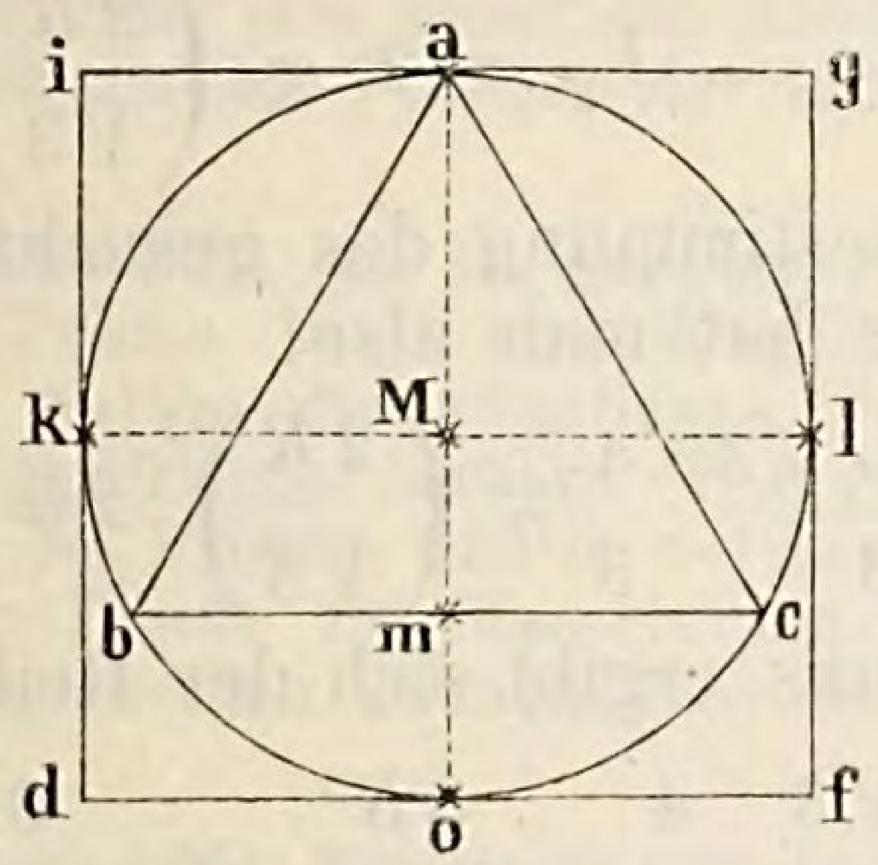
$$O = \frac{\pi s^2}{H^2}(H^2 + H^2 + 2Hs + s^2)$$

mithin:

$$\text{B)}\ .\ .\ .\ O = \frac{\pi s^2}{H^2}\cdot(2H^2 + 2Hs + s^2)$$

**Aufgabe 357.** Ein gleichseitiger Kegel sei einer Kugel und diese einem gleichseitigen geraden Cylinder einbeschrieben. In welchem Verhältnis stehen die Volumina dieser Körper?

Figur 93.




**Formeln:**

Für einen gleichseitigen Kegel:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{\pi \cdot R^3 \cdot \sqrt{3}}{3} \quad \text{(s. Erkl. 116).}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67)}$$

Für einen gleichseitigen Cylinder:

$$\text{III.} \ldots V = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \quad \text{(s. Erkl. 118).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe des der Kugel einbeschriebenen Kegels eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Kegel in einem gleichseitigen Dreieck $abc$, siehe Figur 93, die Kugel in einem grössten Kreis um $M$, welches der diesem Dreieck umbeschriebene Kreis ist, und den Cylinder in einem Quadrat $dfgi$, welches letzterem Kreis umbeschrieben ist.

Um nun das gesuchte Verhältnis auffinden zu können, muss man die Volumina der drei Körper in ein und dasselbe Bestimmungsstück ausdrücken. Bezeichnet man den Grundflächenradius $bm$ des Kegels mit $R$, so hat man nach vorstehender Formel I für das Volumen $V$ des gedachten gleichseitigen Kegels:

$$1) \ldots V = \frac{\pi \cdot R^3 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Da ferner nach der Erkl. 343 zwischen der Seite $s_3$ eines regulären (gleichseitigen) Dreiecks und dem Radius $R$ des demselben umschriebenen Kreises die Relation besteht:

$$s_3 = R_3 \cdot \sqrt{3}$$

so hat man, wenn man nach der Fig. 93,

$$s_3 = bc = 2 \cdot bm = 2R$$

und $\quad R_3 = Mo = Mk = r$

setzt:

$$2R = r \cdot \sqrt{3}$$

oder

$$a) \ldots r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Für das Volumen $V_1$ der Kugel hat man somit nach vorstehender Formel II:

$$2) \ldots V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Da schliesslich der Grundflächenradius $dm_1 = ia$ des gleichseitigen Cylinders $= kM$, nämlich gleich dem Radius $r$ der demselben einbeschriebenen Kugel ist, so hat man in Rücksicht der Gleich. a) und nach vorstehender Formel III für das Volumen $V_2$ des Cylinders:

$$3) \ldots V_2 = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses hat man also:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{\pi R^3 \cdot \sqrt{3}}{3} : \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3 : 2\pi\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{R^3 \cdot \sqrt{3}}{3} : \frac{4}{3} \cdot \frac{8R^3}{3 \cdot \sqrt{3}} : 2 \cdot \frac{8R^3}{3 \cdot \sqrt{3}}$$

oder

$$V : V_1 : V_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{32}{9 \cdot \sqrt{3}} : \frac{16}{3 \cdot \sqrt{3}}$$

Multipliziert man noch die Glieder auf der rechten Seite dieser laufenden Proportion mit $9 \cdot \sqrt{3}$, so erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$A) \ldots V : V_1 : V_2 = 9 : 32 : 48$$

---

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 358.** Der hohle Raum eines rechteckigen Kastens hat genau die Gestalt eines Würfels, dessen Kante $a = 5{,}4$ dm misst. In diesen Kasten kann eine Kugel gelegt werden, welche die sämtlichen inneren Flächen des geschlossenen Kastens berührt. Welches ist der Kubikinhalt des durch die Kugel nicht ausgefüllten Raumes des Kastens?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 324.

---

**Aufgabe 359.** Man soll die Oberfläche einer Kugel berechnen, welche einem Würfel, dessen Kante $a = 21{,}68$ cm misst, einbeschrieben werden kann.

---

**Aufgabe 360.** Man soll die Oberfläche und das Volumen eines Würfels berechnen, welcher einer Kugel, deren Radius $r = 1$ m ist, einbeschrieben werden kann.

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 325.

---

**Aufgabe 361.** Die Oberfläche der einem Würfel umschriebenen Kugel beträgt 144 qdm. Wie gross ist der Radius der diesem Würfel eingeschriebenen Kugel und wie verhalten sich die Volumnia der beiden Kugeln?

---

**Aufgabe 362.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen der Kugel, welche man einem rechtwinkligen Parallelopipedon umschreiben kann, dessen an einer Ecke zusammenstossende Kanten $a$, $b$ und $c$, bezw. $=1$, 2 und 3 m sind?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 326.

---

**Aufgabe 363.** Um ein rechtwinkliges || ppd, dessen Kanten $a$, $b$ und $c$, bezw. $=2$, 3 und 4 m sind, wird eine Kugel beschrieben. In welchem Verhältnis teilt eine durch die Kanten $b$ und $c$ gelegte Ebene das Volumen der Kugel?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 326.

---

**Aufgabe 364.** In ein gerades, regulär-dreiseitiges Prisma kann eine Kugel konstruiert werden, welche die sämtlichen Begrenzungsflächen des Prismas berührt. Wie gross ist das Volumen des Prismas und in welchem Verhältnis steht der Inhalt des Mantels zur Summe der Inhalte der beiden Grundflächen des Prismas?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 327.

---

**Aufgabe 365.** Von einem geraden dreiseitigen Prisma kennt man die Inhalte $J_1$, $J_2$ und $J_3$ der Seitenflächen und den Inhalt $g$ jeder der Grundflächen. Wie gross ist der Radius der diesem Prisma umbeschriebenen Kugel?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 328.

---

**Aufgabe 366.** Von einem geraden, regulär-dreiseitigen Prisma, dessen Seitenflächen zusammen denselben Inhalt haben wie die beiden Grundflächen, kennt man die Grundkante $a$; welches ist das Volumen der ihm umbeschriebenen Kugel?

---

**Aufgabe 367.** In ein gerades, regulär-sechsseitiges Prisma kann man eine Kugel einbeschreiben; wie verhält sich der Radius dieser Kugel zu dem Radius der Kugel, welche man diesem Prisma umbeschreiben kann?

**Andeutung.** Analog den gelösten Aufgaben 327 und 328.

---

**Aufgabe 368.** Wie gross ist der Radius einer Kugel, welche man einer geraden vierseitigen Pyramide, deren sämtliche Kanten $=a$ sind, einbeschreiben kann?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 330.

---

**Aufgabe 369.** Um eine Kugel, deren Radius $=r$ gegeben ist, wird eine gerade Pyramide konstruiert, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Diagonale $=3\,r$ ist. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide?

---

**Aufgabe 370.** Einer Kugel, deren Radius $r=25$ cm gegeben ist, soll eine gerade vierseitige Pyramide, deren Grundfläche $=200$ qcm Inhalt haben soll, einbeschrieben werden. Welches ist das Volumen dieser Pyramide?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 332.

---

**Aufgabe 371.** Die Seitenkante einer geraden vierseitigen Pyramide betrage $\frac{3a}{\sqrt{2}}$, wenn eine Grundkante derselben $=a$ ist. Wie gross ist der Radius der dieser Pyramide umbeschriebenen Kugel?

**Aufgabe 372.** Die Höhe einer sechsseitigen geraden Pyramide, welche einer Kugel, deren Radius $r = 4\sqrt{3}$ ist, eingeschrieben werden kann, ist $= \frac{3}{4}$ des Durchmessers dieser Kugel. Wie gross ist der Radius einer Kugel, die mit jener Pyramide gleiches Volumen hat?

---

**Aufgabe 373.** Einer geraden vierseitigen Pyramide, deren Grundkante $= a$ und deren Seitenkante $= \frac{3}{2}\, a$ ist, soll eine Kugel um- und eine andre Kugel einbeschrieben werden. Wie gross sind die Radien dieser beiden Kugeln?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 334.

---

**Aufgabe 374.** Aus dem Volumen $V$ einer geraden vierseitigen Pyramide, deren Höhe doppelt so gross als die Diagonale ihrer Grundfläche ist, soll man den Radius der ein- und den Radius der umbeschriebenen Kugel berechnen.

---

**Aufgabe 375.** Die Seiten der Grund- und der Deckfläche eines geraden sechsseitigen Pyramidenstumpfs, dessen Höhe $= a\sqrt{2}$ ist, seien mit $2a$ und $a$ gegeben. Dieser Stumpf wird zu einer vollständigen Pyramide ergänzt und um die Ergänzungspyramide eine Kugel beschrieben; welches ist der Radius und die Oberfläche dieser Kugel?

---

**Aufgabe 376.** In eine Kugel, deren Durchmesser mit $d$ gegeben ist, kann man einen geraden Pyramidenstumpf konstruieren, dessen grössere Grundfläche ein Quadrat mit der Diagonale $= 2d$ ist. Welches ist die Oberfläche dieses Pyramidenstumpfs?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 335.

---

**Aufgabe 377.** Wie gross ist das Volumen $V$ einer Kugel, in welche man einen geraden Cylinder, dessen Radius $r$ und dessen Höhe $H$ gegeben ist, beschreiben kann?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 336.

---

**Aufgabe 378.** Der Radius einer Kugel ist $r$ ($= 10$ m), in dieselbe soll ein gerader Cylinder beschrieben werden, dessen Oberfläche sich zu der Oberfläche der Kugel wie $m:n$ ($= 1:2$) verhalte. Wie gross ist das Volumen dieses Cylinders?

---

**Aufgabe 379.** Der Radius $r$ einer Kugel ist gegeben; man soll die Höhe eines Segments desselben bestimmen, dessen Volumen gleich der Hälfte des Volumens eines der Kugel einbeschriebenen geraden Cylinders ist, welcher mit jenem Segment denselben Grundkreis zur Basis hat.

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 337.

---

**Aufgabe 380.** Um einen geraden Cylinder, dessen Höhe $H = 25$ cm und dessen Grundflächenradius $r = 7$ cm beträgt, soll eine Kugel beschrieben werden. In welchem Verhältnis steht der Mantel dieses Cylinders zu dem Inhalt der den Cylinder umgebenden Kugelzone?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 338.

**Aufgabe 381.** In eine Kugel, deren Radius $r$ gegeben, soll man einen geraden Cylinder beschreiben, dessen Volumen zu dem Volumen eines der über den Grundflächen des Cylinders liegenden Kugelsegmente im Verhältnis $m:n$ steht. In welchem Abstand vom Mittelpunkte der Kugel kommen die Grundflächen des Cylinders zu liegen?

---

**Aufgabe 382.** Um einen geraden Cylinder, dessen Höhe $n = 1^1/_2$ mal so gross ist als der Radius seiner Grundfläche, wird eine Kugel beschrieben. In welchem Verhältnis steht das Volumen der von den Grundflächen des Cylinders eingeschlossenen Kugelschicht (körperlichen Kugelzone) zu dem Volumen eines solchen Kugelsegments, welches einen Grundkreis des Cylinders zur Basis hat?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 339.

---

**Aufgabe 383.** Von einem geraden Kegel kennt man die Höhe $H$ und den Radius $R$ seiner Grundfläche; wie gross ist der Radius der Kugel, welche den Mantel und die Grundfläche des Kegels berührt?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 341.

---

**Aufgabe 384.** Von einem geraden Kegel ist die Höhe $H = 9$ dm und der Radius $R$ seiner Grundfläche mit 4,2 dm gegeben. Wie gross ist der Radius der diesem Kegel einbeschriebenen Berührungskugel?

---

**Aufgabe 385.** Der Radius $R$ der Grundfläche eines geraden Kegels und die Seitenlinie $s$ desselben sind gegeben; wie gross ist der Inhalt des Kreises, in welchem dieser Kegel von einer demselben einbeschriebenen Kugel berührt wird?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 343.

---

**Aufgabe 386.** Der Radius $R$ der Grundfläche eines geraden Kegels und die Seitenlinie $s$ desselben sind gegeben; in welchem Verhältnis steht der Inhalt des Kreises, in welchem dieser Kegel von einer demselben einbeschriebenen Kugel berührt wird zu dem Inhalt eines grössten Kreises dieser Kugel?

---

**Aufgabe 387.** Der Axenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck, mit der Seite $s = 2r$; wie gross ist das Volumen und die Oberfläche der demselben einbeschriebenen Berührungskugel?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 344.

---

**Aufgabe 388.** Einer Kugel, deren Volumen $V = 50$ cdm beträgt, wird ein gleichseitiger Kegel umbeschrieben; wie gross ist das Volumen desselben?

---

**Aufgabe 389.** Einem geraden Kegel, dessen Höhe $H = 3$ m und dessen Seitenlinie $s = 6$ m misst, ist eine Berührungskugel einbeschrieben; wie gross ist das Volumen des Raumes, welcher zwischen den Begrenzungsflächen des Kegels und der Oberfläche der Kugel liegt?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 345.

**Aufgabe 390.** In einen geraden Kegel, dessen Volumen $V = 10$ cbm und dessen Höhe $H = 11$ m beträgt, ist eine Berührungskugel beschrieben; wie gross ist das Volumen und die Oberfläche der Kugel?

**Aufgabe 391.** Um eine Kugel, deren Radius $= r$ ist, wird ein Kegel beschrieben, dessen Grundfläche den Radius $\varrho$ hat. Welches ist die Höhe und die Seitenlinie des Kegels?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 346.

**Aufgabe 392.** Der Durchmesser einer Kugel sei $= d$; wie gross ist die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Höhe $= H$ ist und welcher jener Kugel umbeschrieben werden kann?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 347.

**Aufgabe 393.** Wie gross ist die Höhe und der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels, dessen Volumen $= a^3$ ist und in welchem man eine Berührungskugel mit dem Radius $r$ beschreiben kann?

**Aufgabe 394.** Die Oberfläche der einem geraden Kegel einbeschriebenen Berührungskugel sei $= \frac{2}{3}$ der Mantelfläche des Kegels; wie gross ist der Radius der Kugel, wenn der Radius der Kegelgrundfläche $= R$ gegeben ist?

**Aufgabe 395.** In einem geraden Kegel ist eine Kugel beschrieben, welche die Begrenzungsflächen des Kegels berührt. Legt man durch den Berührungskreis der Kegel- und der Kugelfläche eine Ebene, so verhält sich die Mantelfläche des durch diese Ebene abgeschnittenen Kegels zum Inhalt der durch diese Ebene von der Kugel abgeschnittenen kleineren Calotte, wie $(2 + \sqrt{5}) : 2$. In welchem Verhältnis steht das Volumen des Kegels zum Volumen der Kugel?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 349.

**Aufgabe 396.** Einer Kugel ist ein senkrechter Kegel einbeschrieben, dessen Höhe $\frac{1}{4}$ des Kugeldurchmessers beträgt und dessen Inhalt $= 1$ cbm ist. Wie gross ist der Inhalt und die Oberfläche der Kugel und welchen Winkel $\alpha$ bilden die Seitenlinien des Kegels mit der Axe?

**Andeutung.** Die Lösung dieser und der folgenden Aufgaben bis 403 geschieht analog den gelösten Aufgaben 350—352.

**Aufgabe 397.** Einer Kugel vom Halbmesser $r = 8$ dm ist ein gerader Kegel einbeschrieben, dessen Höhe dem Durchmesser der Basis gleich ist; wie gross ist die Oberfläche und das Volumen des Kegels?

**Aufgabe 398.** In einer Kugel wird ein gerader Kegel eingeschrieben, so dass dessen Höhe vom Mittelpunkt der Kugel stetig geteilt wird, das Verhältnis der beiden Körper ist zu berechnen?

**Andeutung.** In Figur 88 soll die Proportion stattfinden:

$$am : aM = aM : Mm$$
$$[h : r = r : (h - r)]$$

**Aufgabe 399.** In einer Kugel von gegebenem Radius $r$ soll ein gerader Kegel konstruiert werden, dessen Grundflächenradius sich zu seiner Höhe wie $m : n$ $(= 1 : 2)$ verhalte. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen bezw. die Volumina der beiden Körper zueinander?

**Aufgabe 400.** Einer Kugel sei ein gerader Kegel umbeschrieben, dessen Höhe doppelt so gross ist als der Durchmesser der Kugel. In welchem Verhältnis stehen die Gesamt-Oberflächen bezw. die Volumina beider Körper zueinander?

---

**Aufgabe 401.** In eine Kugel, deren Radius $r$ (= 10 m) ist, sei ein gerader Kegel so einbeschrieben, dass er mit dem anliegenden Kugelabschnitt gleiches Volumen hat. Wie gross ist die Höhe des Kegels?

---

**Aufgabe 402.** Ein gerader Kegel ist durch seine Höhe und den Radius seiner Basis gegeben. Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen der diesem Kegel ein- bezw. umbeschriebenen Kugel?

**Andeutung.** Analog den gelösten Aufgaben 341 und 350.

---

**Aufgabe 403.** Um und in eine Kugel sei ein gleichseitiger Kegel beschrieben, wie verhalten sich die Volumina beider Kegel zum Volumen der Kugel?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 353.

---

**Aufgabe 404.** Eine Kugel wird von einem Kegelstumpf ganz umhüllt, so, dass sie von dessen Mantel-, Grund- und Deckfläche berührt wird. Der Kugelradius $r$ ist = 3,5 m, der Radius $\varrho$ der kleineren Grundfläche des Kegels = 2,8 m; wie gross ist die Mantelfläche des Kegels?

**Andeutung.** In betreff der Auflösung dieser und der folgenden Aufgaben bis Aufgabe 409 beachte man die gelösten Aufgaben 354 und 355.

---

**Aufgabe 405.** Das Volumen eines geraden Kegelstumpfs, welcher einer Kugel vom Radius $r$ umschrieben ist, soll berechnet werden. Die kleinere Grundfläche des Kegelstumpfs soll gleich der Hälfte der grösseren Grundfläche sein.

---

**Aufgabe 406.** Welche Länge muss die Seitenlinie eines geraden Kegelstumpfs haben, dessen Grundflächenradien bezw. = 1 dm und 2 dm sind, um in demselben eine Kugel beschreiben zu können; und welches ist die Oberfläche und das Volumen der gedachten Kugel?

**Andeutung.** Man beachte, dass nach der Erkl. 346 in der Figur 91 die Strecke $ad = am + dm_1$, dass nämlich die Seitenlinie gleich der Summe der Radien der Grundkreise ist.

---

**Aufgabe 407.** Bei einem geraden Kegelstumpf, in welchen sich eine Kugel einbeschreiben lässt, beträgt der Mantel 3 mal so viel als die Differenz $d$ der beiden Grundflächen. Wie verhält sich das Volumen der einbeschriebenen Kugel zum Volumen des Stumpfs?

---

**Aufgabe 408.** Wie gross ist das Volumen eines geraden Kegelstumpfs, welcher einer Kugel vom Radius $R$ = 10 dm so eingeschrieben ist, dass die kleinere Grundfläche gleich der Hälfte der grösseren ist und dass die grössere Grundfläche um den vierten Teil ihres Radius vom Mittelpunkt der Kugel absteht?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 356.

---

**Aufgabe 409.** Zu einer Kugel wird der sie vollständig umhüllende Cylinder und Kegel konstruiert; wie verhalten sich die Kubikinhalte und die Oberflächen dieser drei Körper?

**Andeutung.** In betreff der Auflösung der Aufgaben 409 bis 411 beachte man die gelöste Aufgabe 357.

---

**Aufgabe 410.** In eine Kugel mit dem Radius $r$ ist ein senkrechter Cylinder eingeschrieben, dessen Oberfläche $= \frac{3}{4}$ der Kugelfläche ist. Ueber der einen Grundfläche des Cylinders ist in dem grösseren Kugelabschnitt ein gerader Kegel konstruiert, dessen Spitze in der Kugelfläche liegt; wie gross ist der Inhalt und die Oberfläche dieses Kegels und wie gross der Radius der Kugel, die sich in dem Kegel beschreiben lässt?

**Aufgabe 411.** Ein gleichseitiger Kegel sei einer Kugel und diese einem gleichseitigen geraden Cylinder einbeschrieben. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der drei Körper?

# VII.

# Aufgaben über die fünf konvexen regulären Polyeder in Verbindung mit der um- und eingeschriebenen, sowie derjenigen Kugel, welche sämtliche Kanten berührt.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 412.** In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der drei Kugeln zu einander, von denen die erste die Seitenflächen eines regulären Tetraeders berührt, die zweite durch die Halbierungspunkte der Kanten und die dritte durch die Ecken des Tetraeders geht?

**Formel:**

Für eine Kugel:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67)}$$

$$\text{II.} \ldots O = 4\pi r^2 \quad \text{(s. Erkl. 62)}$$

Für einen Tetraeder:

$$\left.\begin{aligned} \text{III.} \ldots r &= \frac{k}{12}\cdot\sqrt{6} \\ \text{IV.} \ldots \varrho &= \frac{k}{4}\cdot\sqrt{2} \\ \text{V.} \ldots R &= \frac{k}{4}\cdot\sqrt{6} \end{aligned}\right\} \text{(s. Erkl. 353).}$$

**Erkl. 353.** Bezeichnet man die Kante eines **regulären Tetraeders** mit $k$, dessen Höhe mit $H$, die Oberfläche mit $O$, das Volumen mit $V$, den Radius der Kugel, welche durch sämtliche Ecken des Tetraeders geht mit $R$, den Radius der Kugel, welche durch die Mitten sämtlicher Kanten geht mit $\varrho$ und den Radius der Kugel, welche die sämtlichen Begrenzungsflächen des Tetraeders berührt mit $r$, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

$$1) \ldots H = \frac{k}{3}\cdot\sqrt{6}$$

$$2) \ldots O = k^2\cdot\sqrt{3}$$

$$3) \ldots V = \frac{k^3}{12}\cdot\sqrt{2}$$

**Auflösung.** Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses muss man zunächst die Oberflächen der gedachten drei Kugeln in ein und dasselbe Bestimmungsstück des Tetraeders ausdrücken. Da man mittels vorstehender Formeln III bis V die Radien jener Kugeln in die Kante $k$ des Tetraeders ausdrücken kann, so hat man nach vorstehender Formel II für die Oberfläche $O$ der Kugel, welche die Seitenflächen des Tetraeders berührt:

$$\text{a)} \ldots O = 4\pi\cdot\left(\frac{k}{12}\sqrt{6}\right)^2$$

4) . . . $R = \frac{k}{4} \cdot \sqrt{6}$

5) . . . $\varrho = \frac{k}{4} \cdot \sqrt{2}$

6) . . . $r = \frac{k}{12} \cdot \sqrt{6}$

Siehe Kleyers Lehrbücher der Stereometrie, speziell das 1. Buch der Körperberechnungen, Abschnitt: Das Tetraeder.

für die Oberfläche $O_1$ der Kugel, welche durch die Halbierungspunkte der Kanten des Tetraeders geht:

b) . . . $O_1 = 4\pi \cdot \left(\frac{k}{4} \cdot \sqrt{2}\right)^2$

und für die Oberfläche $O_2$ der Kugel, welche durch die Ecken des Tetraeders geht:

c) . . . $O_2 = 4\pi \cdot \left(\frac{k}{4} \sqrt{6}\right)^2$

Für das gesuchte Verhältnis besteht hiernach die Relation:

$$O : O_1 : O_2 = 4\pi\left(\frac{k}{12} \sqrt{6}\right)^2 : 4\pi\left(\frac{k}{4} \sqrt{2}\right)^2 : 4\pi\left(\frac{k}{4} \sqrt{6}\right)^2$$

Durch Reduktion nach der Erkl. 82 erhält man hieraus:

$$O : O_1 : O_2 = \frac{k^2 \cdot (\sqrt{6})^2}{12^2} : \frac{k^2 \cdot (\sqrt{2})^2}{4^2} : \frac{k^2 \cdot (\sqrt{6})^2}{4^2} = \frac{6}{12 \cdot 12} : \frac{2}{4 \cdot 4} : \frac{6}{4 \cdot 4} = \frac{1}{24} : \frac{1}{8} : \frac{3}{8}$$

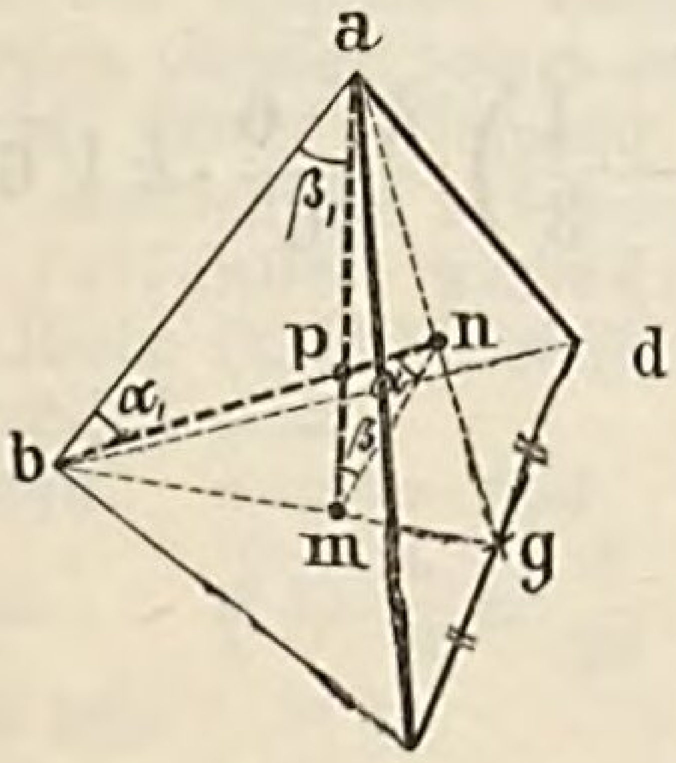
Das gesuchte Verhältnis der Oberflächen ist also:

$$O : O_1 : O_2 = 1 : 3 : 9$$

---

**Aufgabe 413.** In welchem Verhältnis wird das Volumen einer Kugel durch eine erweiterte Begrenzungsfläche eines ihr einbeschriebenen regulären Tetraeders geteilt?

Figur 94.




**Formeln:**

Für ein Tetraeder:

I. . . . $H = \frac{k}{3} \sqrt{6}$

II. . . . $R = \frac{k}{4} \sqrt{6}$

(s. Erkl. 353)

Für ein Kugelsegment:

III. . . . $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ (s. Erkl. 151).

**Auflösung.** Denkt man sich eine Begrenzungsfläche eines regulären Tetraeders, z. B. die Fläche $acd$ in Fig. 94 erweitert, so teilt dieselbe die dem Tetraeder umschrieben gedachte Kugel in zwei Kugelsegmente, von welchen das eine die Höhe $bn$, das andre die Höhe $2R - bn$ hat, wenn der Radius der gedachten Kugel durch $R$ bezeichnet wird.

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses muss man die Volumina der beiden Kugelsegmente in ein und dasselbe Bestimmungsstück des Tetraeders ausdrücken, was wie folgt geschieht:

Für den Radius $R$ der Kugel hat

man nach vorstehender Formel II die Relation:

$$\text{a)} \ldots R = \frac{k}{4}\sqrt{6}$$

Für die Höhe $bn$ des grösseren Kugelsegments, welche gleich der Höhe des Tetraeders ist, hat man nach vorstehen- Formel I die Relation:

$$\text{b)} \ldots bn = H = \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

Für die Höhe $2R - bn$ des kleineren Kugelsegments, hat man nach den Relationen a) und b) die Beziehung:

$$2R - bn = 2 \cdot \frac{k}{4}\sqrt{6} - \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

oder:

$$\text{c)} \ldots 2R - bn = \frac{k \cdot \sqrt{6}}{6}$$

Mit Benutzung der vorstehenden Formel III erhält man für das gesuchte Verhältnis, wenn das Volumen des grösseren Segments mit $V$, das des kleineren mit $V_1$ bezeichnet wird:

$$\text{1)} \ldots V : V_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{k}{3}\sqrt{6}\right)^2}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{k}{4}\sqrt{6} - \frac{k}{3}\sqrt{6}\right) : \frac{\pi\left(\frac{k \cdot \sqrt{6}}{6}\right)^2}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{k}{4}\sqrt{6} - \frac{k \cdot \sqrt{6}}{6}\right)$$

oder:

$$V : V_1 = \frac{k^2 \cdot 6}{9} \cdot k\sqrt{6}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) : \frac{k^2 \cdot 6}{36} \cdot k\sqrt{6}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)$$

$$V : V_1 = \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{12} : \frac{1}{36} \cdot \frac{7}{12}$$

mithin:

$$\text{A)} \ldots V : V_1 = 20 : 7$$

---

**Aufgabe 414.** In eine Kugel, deren Kubikinhalt $= V$ gegeben ist, sei ein reguläres Tetraeder, in dieses eine zweite Kugel, in diese ein zweites Tetraeder u. s. f. bis ins Unendliche einbeschrieben. Wie gross ist die Summe der Volumina der Kugeln; wie gross die der Tetraeder?

**Formeln:**

Für einen Tetraeder:

$$\text{I.} \ldots R = \frac{k}{4} \cdot \sqrt{6}$$

$$\text{II.} \ldots r = \frac{k}{12} \cdot \sqrt{6}$$

$$\text{III.} \ldots V = \frac{k^3}{12} \cdot \sqrt{2}$$

(s. Erkl. 353)

Für eine Kugel:

$$\text{IV.} \ldots V = \frac{4}{3}\pi r^3$$ (s. Erkl. 67).

**Erkl. 354.** Nebenstehende Gleichung 1) reduziert gibt der Reihe nach:

$$x = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(R_1^3 + \frac{R_1^3}{3^3} + \frac{R_1^3}{3^6} + \dots\right)$$

$$\text{a)} \dots x = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots\right)$$

In dieser Form kann man das Bildungsgesetz der in der Klammer enthaltenen aufeinanderfolgenden Glieder sofort erkennen. Die Glieder der in dieser Klammer enthaltenen Summe bilden nämlich die aufeinanderfolgenden Glieder einer fallenden unendlichen geometrischen Reihe (s. Erkl. 356),
deren Anfangsglied $a = 1$
deren Gliederzahl $n = \infty$ und
deren Quotient $9 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ (nämlich ein echter Bruch ist).

Mit Benutzung der in der Erkl. 357 angeführten Summenformel erhält man für die Summe $s$ der in vorstehender Klammer enthaltenen Glieder:

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{27}{27 - 1} = \frac{27}{26}$$

Die vorstehende Gleichung a) geht somit über in:

$$x = \frac{4}{3}\pi R_1^3 . \frac{27}{26}$$

$$\text{b)} \dots x = \frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 26}\pi \cdot R_1^3$$

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Summen der Volumina der gedachten Kugeln und der Tetraeder, drücke man zunächst die Radien dieser Kugeln, bezw. die Kanten dieser Tetraeder in den Radius der Kugel aus, deren Kubikinhalt der Aufgabe gemäss mit $V$ gegeben ist. Bezeichnet man den Radius der ersten Kugel, d. i. die Kugel, deren Kubikinhalt mit $V$ gegeben ist durch: $R_1$, so erhält man aus vorstehender Formel I für die Kante $k_1$ des ersten Tetraeders, d. i. dasjenige Tetraeder, welches man sich in diese Kugel eingeschrieben denken kann:

$$\text{a)} \dots k_1 = \frac{4R_1}{\sqrt{6}} .$$

Für den Radius $R_2$ der zweiten Kugel, d. i. diejenige Kugel, welche dem soeben erwähnten ersten Tetraeder eingeschrieben gedacht werden kann, erhält man aus vorstehender Formel II, wenn man in derselben:

$$r = R_2 \text{ und } k = k_1 = \frac{4R_1}{\sqrt{6}} \text{ setzt:}$$

$$\text{b)} \dots R_2 = \frac{R_1}{3}$$

Für die Kante $k_2$ des zweiten Tetraeders. d. i. dasjenige Tetraeder, welches der soeben erwähnten Kugel eingeschrieben gedacht werden kann, erhält man aus vorstehender Formel I, wenn man in derselben

$$k = k_2 \text{ und } R = R_2 = \frac{R_1}{3} \text{ setzt:}$$

$$\text{c)} \dots k_2 = \frac{4R_1}{3 \cdot \sqrt{6}}$$

Für den Radius $R_3$ der dritten Kugel, d. i. diejenige Kugel, welche dem soeben erwähnten zweiten Tetraeder eingeschrieben gedacht werden kann, erhält man aus vorstehender Formel II, wenn man in derselben

$$r = R_3 \text{ und } k = k_2 = \frac{4R_1}{3 \cdot \sqrt{6}} \text{ setzt:}$$

$$\text{d)} \dots R_3 = \frac{R_1}{9}$$

Für die Kante $k_3$ des dritten Tetraeders, d. i. dasjenige Tetraeder,

**Erkl. 355.** Nebenstehende Gleichung 2) reduziert gibt der Reihe nach:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left( \frac{4^3 \cdot R_1^3}{(\sqrt{6})^3} + \frac{4^3 \cdot R_1^3}{3^3 \cdot (\sqrt{6})^3} + \frac{4^3 \cdot R_1^3}{9^3 \cdot (\sqrt{6})^3} + \dots \right)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{4^3 \cdot R_1^3}{(\sqrt{6})^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9^3} + \dots \right)$$

$$y = \frac{16 R_1^3 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{6}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{(3^2)^3} + \dots \right)$$

$$y = \frac{16 R_1^3 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 6 \cdot \sqrt{6}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots \right)$$

$$y = \frac{16 R_1^3}{18} \cdot \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots \right)$$

$$y = \frac{8 R_1^3}{9} \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots \right)$$

$$\text{a)} \dots y = \frac{8 R_1^3}{27} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots \right)$$

Analog wie in der Erkl. 354 erhält man für die Summe der in der Klammer stehenden geometrischen Reihe $= \frac{27}{26}$, mithin ist:

$$y = \frac{8 R_1^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 27}{27 \cdot 26}$$

oder

$$\text{b)} \dots y = \frac{4 \sqrt{3}}{13} \cdot R_1^3$$

**Erkl. 356.** In betreff der geometrischen Reihen findet man ausführliches in Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

**Erkl. 357.** Bezeichnet man mit $a$ das Anfangsglied, mit $q$ den Quotient, mit $n$ die Anzahl und mit $s$ die Summe aller Glieder einer geometrischen Reihe, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

$$1) \dots s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Für den Fall, dass die geometrische Reihe eine fallende geometrische unendliche Reihe, dass also $q$ ein echter Bruch und $n = \infty$ ist, geht diese Formel (da $q^n = 0$ wird) über in:

$$2) \dots s = \frac{a}{q - 1}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Reihen.

welches der soeben erwähnten Kugel eingeschrieben gedacht werden kann, erhält man aus vorstehender Formel I, wenn man in dieselben:

$$k = k_3 \text{ und } R = R_3 = \frac{R_1}{9} \text{ setzt:}$$

$$\text{e)} \dots k_3 = \frac{4 R_1}{9 \cdot \sqrt{6}}$$

u. s. f., u. s. f.

Mittels wiederholter Benutzung der vorstehenden Formel IV erhält man für die Summe $x$ der Kubikinhalte der erwähnten Kugeln:

$$1) \dots x = \frac{4}{3} \pi R_1^3 + \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{R_1}{3}\right)^3 + \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{R_1}{9}\right)^2 + \dots$$

und mittels wiederholter Benutzung der vorstehenden Formel III erhält man für die Summe $y$ der Kubikinhalte der erwähnten Tetraeder:

$$2) \dots y = \frac{\left(\frac{4 R_1}{\sqrt{6}}\right)^3}{12} \cdot \sqrt{2} + \frac{\left(\frac{4 R_1}{3 \sqrt{6}}\right)^3}{12} \cdot \sqrt{2} + \frac{\left(\frac{4 R_1}{9 \cdot \sqrt{6}}\right)^3}{12} \cdot \sqrt{2} + \dots$$

Nach den Erkl. 354 und 355 gehen die somit für $x$ und $y$ aufgestellten Bestimmungsgleichungen zunächst bezügl. über in:

$$3) \dots x = \frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 26} \cdot \pi \cdot R_1^3$$

$$4) \dots y = \frac{144 \cdot R_1^3}{13 \cdot \sqrt{6}}$$

Da nun nicht der Radius $R_1$ der ersten Kugel, sondern das Volumen $V$ gegeben ist und man nach der vorstehenden Formel 4) für diesen Radius $R_1$, bezw. für die dritte Potenz desselben:

$$\text{f)} \dots R_1^3 = \frac{3 V}{4 \pi}$$

erhält, so erhält man in Rücksicht dessen aus den Gleichungen 3) und 4) für die gesuchten Werte $x$ und $y$;

$$x = \frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 26} \cdot \pi \cdot \frac{3 V}{4 \pi}$$

oder

$$\text{A)} \; \ldots \; x = \frac{27}{26} \cdot V$$

und

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{13} \cdot \frac{3V}{4\pi}$$

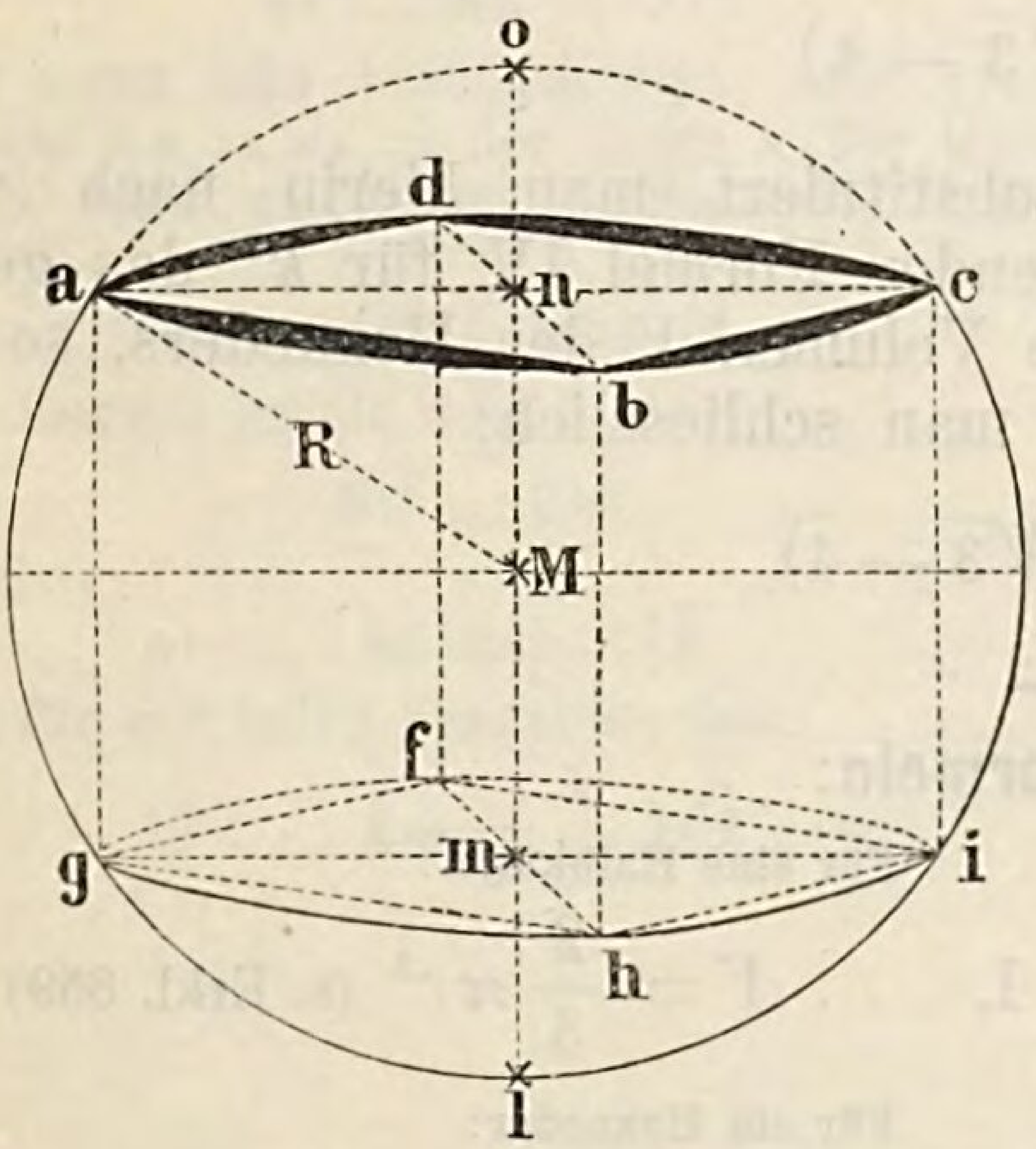
oder

$$\text{B)} \; \ldots \; y = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{13 \cdot \pi} \cdot V$$

---

**Aufgabe 415.** Denkt man sich durch die Eckpunkte eines regulären Hexaeders eine Kugel gelegt und eine Grenzfläche des Hexaeders erweitert, so schneidet dieselbe ein Kugelsegment ab; welches ist das Volumen dieses Segments, wenn das des Hexaeders mit $V$ gegeben ist?

Figur 95.




**Erkl. 358.** Bezeichnet man die Kante eines **regulären Hexaeders** mit $k$, dessen Körperdiagonale mit $D$, die Oberfläche mit $O$, das Volumen mit $V$, den Radius der Kugel, welche durch sämtliche Ecken des Hexaeders geht mit $R$, den Radius der Kugel, welche durch die Mitten sämtlicher Kanten geht mit $\varrho$ und den Radius der Kugel, welche die sämtlichen Begrenzungsflächen des Tetraeders berührt mit $r$, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

$$1) \; \ldots \; D = k \cdot \sqrt{3}$$

$$2) \; \ldots \; O = 6 \cdot k^2$$

$$3) \; \ldots \; V = k^3$$

$$4) \; \ldots \; R = \frac{k}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$5) \; \ldots \; \varrho = \frac{k}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$6) \; \ldots \; r = \frac{k}{2}$$

**Formeln:**

Für ein Kugelsegment:

$$\text{I.} \; \ldots \; V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \quad \text{(s. Erkl. 151)}$$

Für ein Hexaeder:

$$\left.\begin{array}{l} \text{II.} \; \ldots \; R = \frac{k}{2}\sqrt{3} \\ \text{III.} \; \ldots \; r = \frac{k}{2} \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 358)}$$

$$\text{IV.} \; \ldots \; V = k^3$$

**Auflösung.** Ist, siehe Fig. 95, $abcd$ die erweitert gedachte Begrenzungsfläche des Hexaeders, so muss man zur Berechnung des Volumens $x$ des durch dieselbe abgeschnittenen Kugelsegments $abcdo$, nach vorstehender Formel I zunächst den Radius $aM = R$ der dem Hexaeder umschrieben gedachten Kugel und die Höhe $h = on$ des Segments bestimmen, bezw. in die Kante $k$ des Hexaeders, dessen Volumen $V$ gegeben ist, ausdrücken. Nach vorstehender Formel II erhält man für den Radius $R$ der Kugel:

$$\text{a)} \; \ldots \; R = \frac{k}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Da ferner die Höhe $h = on$ des Kugelsegments $= Mo - Mn$, nämlich gleich der Differenz $R - r$ der Radien $R$ u. $r$ der dem Hexaeder um-, bezw. eingeschriebenen Kugel ist, so erhält man mit Benutzung der vorstehenden Formeln II und III für die Höhe $h = on$ des Segments:

$$\text{b)} \; \ldots \; h = \frac{k}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Nach der Formel I ergibt sich somit für das gesuchte Volumen $x$ des Seg-

Siehe Kleyers Lehrbücher der Stereometrie, speziell das Buch der Körperberechnungen, Abschnitt: das Hexaeder.

ments in die Kante $k$ des Hexaeders ausgedrückt:

$$x = \frac{\pi \cdot \left(\frac{k}{2}(\sqrt{3}-1)\right)^2}{3}\left(3 \cdot \frac{k}{2}\sqrt{3} - \frac{k}{2}(\sqrt{3}-1)\right)$$

oder

$$x = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{k^2}{4} \cdot (\sqrt{3}-1)^2 \cdot \left[\frac{k}{2} \cdot (3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)\right]$$

$$x = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{k^2}{4} \cdot \frac{k}{2} \cdot (3 - 2\sqrt{3} + 1) \cdot (2\sqrt{3} + 1)$$

$$x = \frac{\pi \cdot k^3}{24} \cdot (4 - 2\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{3} + 1)$$

$$x = \frac{\pi \cdot k^3}{24} \cdot (8\sqrt{3} - 12 + 4 - 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi \cdot k^3}{24} \cdot (6\sqrt{3} - 8)$$

$$1) \ldots x = \frac{\pi \cdot k^3}{12}(3\sqrt{3} - 4)$$

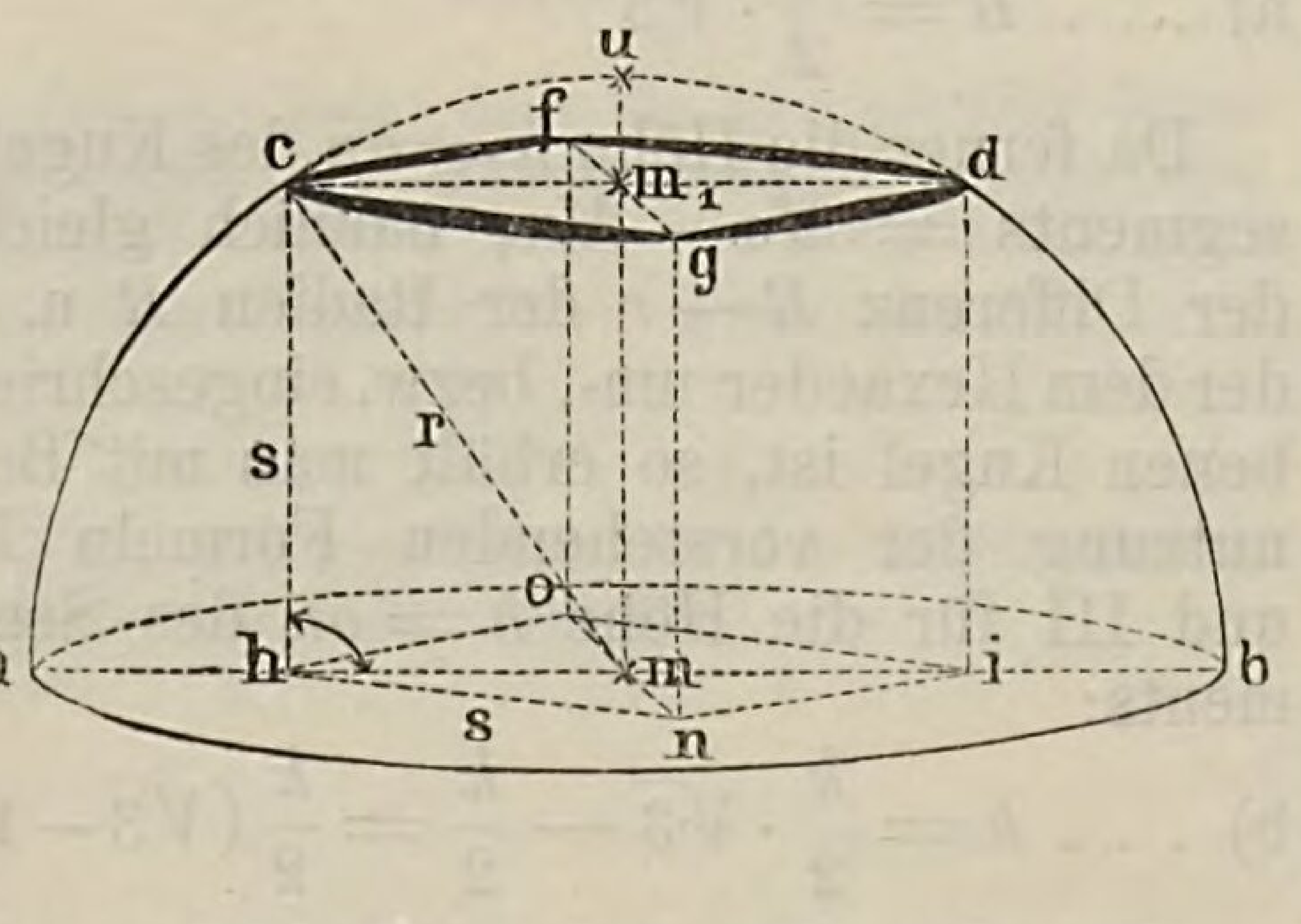
Substituiert man hierin nach vorstehender Formel IV für $k^3$ das gegebene Volumen $V$ des Hexaeders, so erhält man schliesslich:

$$A) \ldots x = \frac{\pi \cdot V}{12} \cdot (3\sqrt{3} - 4)$$

---

**Aufgabe 416.** In eine Halbkugel vom Radius $r$ sei ein reguläres Hexaeder eingeschrieben, in dieses eine Kugel und in letztere ein reguläres Tetraeder. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der vier Körper?

Figur 96.




**Formeln:**

Für eine Halbkugel:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 359)}$$

Für ein Hexaeder:

$$\left.\begin{array}{l}\text{II.} \ldots V = k^3 \\ \text{III.} \ldots r = \frac{k}{2}\end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 358)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{IV.} \ldots V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67)}$$

Für ein Tetraeder:

$$\left.\begin{array}{l}\text{V.} \ldots R = \frac{k}{4} \cdot \sqrt{6} \\ \text{VI.} \ldots V = \frac{k^3}{12} \cdot \sqrt{2}\end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 353).}$$

**Auflösung.** Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses muss man die Volumina der gedachten vier Körper in ein und dasselbe Bestimmungsstück,

**Erkl. 359.** Bezeichnet man den Radius einer Kugel mit $r$, den Durchmesser mit $d$, das Volumen derselben mit $V$, die Oberfläche mit $O$, so hat man nach den Erkl. 67 und 62 die Relationen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}$$

und

$$O = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

Hieraus erhält man für das Volumen $V$ und die Oberfläche $O$ einer Halbkugel die Relationen:

$$a) \ldots V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{12}$$

$$b) \ldots O = 2\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{2}$$

**Erkl. 360.** Zwischen der Diagonale $hi$ des Quadrats $hnio$, siehe Figur 96, und den Seiten $hn$ und $ni$ hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatz, da das Dreieck $hni$ ein bei $n$ rechtwinkliges ist, die Relation:

$$\overline{hi}^2 = \overline{hn}^2 + \overline{ni}^2$$

oder wenn man berücksichtigt, dass $hn = ni$ ist und $hn = ni =$ der Seite $s$ des Quadrats $hnio$, bezw. gleich der Kante $k$ des Hexaeders ist:

$$\overline{hi}^2 = k^2 + k^2$$

und hieraus erhält man:

$$\overline{hi}^2 = 2k^2$$

oder

$$a) \ldots hi = k \cdot \sqrt{2}$$

und für die halbe Diagonale $hm$:

$$b) \ldots hm = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

z. B. in den Radius $r$ der gegebenen Halbkugel ausdrücken.

Nach vorstehender Formel I erhält man für das Volumen $V$ der gegebenen Halbkugel:

$$1) \ldots V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Zur Berechnung des Volumens $V_1$ des Hexaeders nach vorstehender Formel II muss man zunächst die Kante $k$ desselben in den Radius $r$ der Halbkugel ausdrücken.

In dem bei $h$ rechtwinkligen Dreieck $mhc$, siehe Figur 96, ist

$$cm = r$$

$$ch = k \text{ (nämlich gleich der Kante des Hexaeders)}$$

und nach der Erkl. 360 ist:

$$mh = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

mithin erhält man nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$\overline{nc}^2 = \overline{ch}^2 + \overline{nh}^2$$

oder

$$a) \ldots r^2 = k^2 + \left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

woraus sich:

$$r^2 = k^2 + \frac{k^2}{4}\cdot 2 = \frac{2k^2}{2} + \frac{k^2}{2} = \frac{3}{2}k^2$$

oder

$$k^2 = \frac{2\cdot r^2}{3}$$

$$k = r\sqrt{\frac{2}{3}} = r\sqrt{\frac{6}{9}}$$

und

$$b) \ldots k = \frac{r}{3}\sqrt{6}$$

ergibt.

Nach vorstehender Formel II erhält man somit für das Volumen $V_1$ des Hexaeders:

$$V_1 = \left(\frac{r}{3}\sqrt{6}\right)^3 = \frac{r^3}{3^3}(\sqrt{6})^3 = \frac{r^3}{27}(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{6} = \frac{r^3}{27}\cdot 6 \cdot \sqrt{6}$$

oder

$$2) \ldots V_1 = \frac{2}{9}\cdot r^3 \cdot \sqrt{6}$$

Zur Berechnung des Volumens $V_2$ der dem Hexaeder eingeschriebenen Kugel aus dem gegebenen Radius $r$ der Halbkugel verfahre man wie folgt:

Nach vorstehender Formel III besteht zwischen dem Radius $r_1$ jener Kugel und der Kante $k$ des Hexaeders die Relation:

$$r_1 = \frac{k}{2}$$

Substituiert man hierin den mittels der Gleichung b) für $k$ gefundenen Wert, so erhält man:

$$\text{c)} \ldots r_1 = \frac{r}{6} \sqrt{6}$$

und nach vorstehender Formel IV für das Volumen $V_2$ jener Kugel:

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left( \frac{r}{6} \sqrt{6} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{r^3}{6^3} \cdot (\sqrt{6})^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{r^3}{36 \cdot 6} \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{6}$$

$$= \frac{\pi r^3}{3 \cdot 9 \cdot 6} \cdot 6 \cdot \sqrt{6}$$

oder

$$3) \ldots V_2 = \frac{\pi \cdot r^3}{27} \cdot \sqrt{6}$$

Zur Berechnung des Volumens $V_3$ des der letzten Kugel einbeschriebenen Tetraeders aus dem gegebenen Radius $r$ der Halbkugel verfahre man, wie folgt:

Nach umstehender Formel V besteht zwischen dem Radius $r_1$ der vorhin erwähnten Kugel und der Kante $k_1$ des demselben einbeschriebenen Tetraeders, die Relation:

$$r_1 = \frac{k_1}{4} \cdot \sqrt{6}$$

Substituiert man hierin den mittels der Gleichung c) für $r_1$ gefundenen Wert, so erhält man:

$$\frac{r}{6} \sqrt{6} = \frac{k_1}{4} \cdot \sqrt{6}$$

oder

$$\text{d)} \ldots k_1 = \frac{2}{3} r$$

und für das Volumen $V_3$ des Tetraeders nach umstehender Formel VI:

$$V_3 = \frac{\left( \frac{2}{3} r \right)^3}{12} \cdot \sqrt{2} = \frac{2^3 \cdot r^3}{3^3 \cdot 12} \cdot \sqrt{2} = \frac{8 r^3}{27 \cdot 12} \sqrt{2}$$

oder

$$4) \ldots V_3 = \frac{2 r^3}{81} \cdot \sqrt{2}$$

Mittels der Gleichungen 1) bis 4) erhält man endlich für das gesuchte Verhältnis der Volumina der vier Körper:

$$V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = \frac{2}{3}\pi r^3 : \frac{2}{9} r^3 \cdot \sqrt{6} : \frac{\pi r^3}{27} \sqrt{6} ; \frac{2 r^3}{81} \sqrt{2}$$

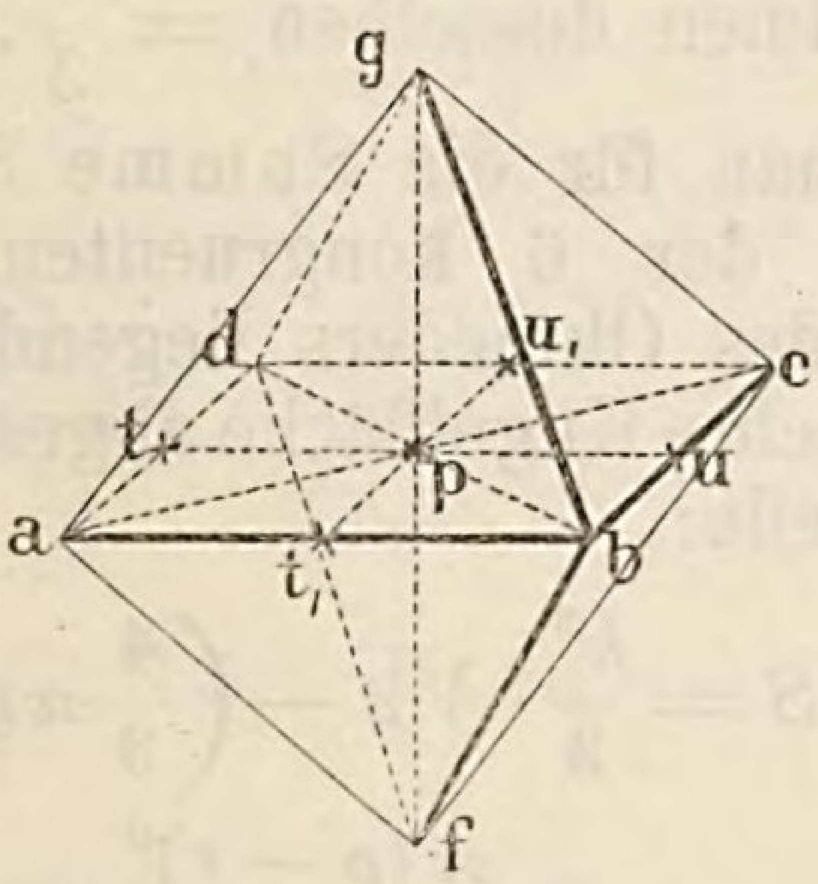
oder nach gehöriger Reduktion:

$$V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 54\pi : 18\sqrt{6} : 3\pi\sqrt{6} : 2\sqrt{2}$$

---

**Aufgabe 417.** In ein reguläres Oktaeder, dessen Kante $= k$ ist, sei eine Kugel so konstruiert, dass die Kugelfläche die Kanten des Oktaeders berührt; wie gross sind die Kubikinhalte der Körperteile des Oktaeders, die in den Ecken des Oktaeders durch die Kugelfläche abgeschnitten werden?

Figur 97.




**Erkl. 361.** Bezeichnet man die Kante eines **regulären Oktaeders** mit $k$, dessen Körperdiagonale mit $D$, die Oberfläche mit $O$, das Volumen mit $V$, den Radius der Kugel, welche durch sämtliche Ecken des Oktaeders geht mit $R$, den Radius der Kugel, welche durch die Mitten sämtlicher Kanten geht mit $\varrho$ und den Radius der Kugel, welche die sämtlichen Begrenzungsflächen des Oktaeders berührt mit $r$, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

1) . . . $D = k \cdot \sqrt{2}$

2) . . . $O = 2 \cdot k^2 \cdot \sqrt{3}$

3) . . . $V = \frac{k^3}{3} \cdot \sqrt{2}$

4) . . . $R = \frac{k}{2} \cdot \sqrt{2}$

5) . . . $\varrho = \frac{k}{2}$

6) . . . $r = \frac{k}{6} \cdot \sqrt{6}$

Siehe Kleyers Lehrbücher der Stereometrie, speziell das 1. Buch der Körperberechnungen, Abschnitt: das Oktaeder.

**Formeln:**

Für ein Kugelsegment:

I. . . . $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ (s. Erkl. 151)

Für eine Kugel:

II. . . . $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67)

Für ein Oktaeder:

III. . . . $V = \frac{k^3}{3} \cdot \sqrt{2}$

IV. . . . $\varrho = \frac{k}{2}$

V. . . . $r = \frac{k}{6} \cdot \sqrt{6}$

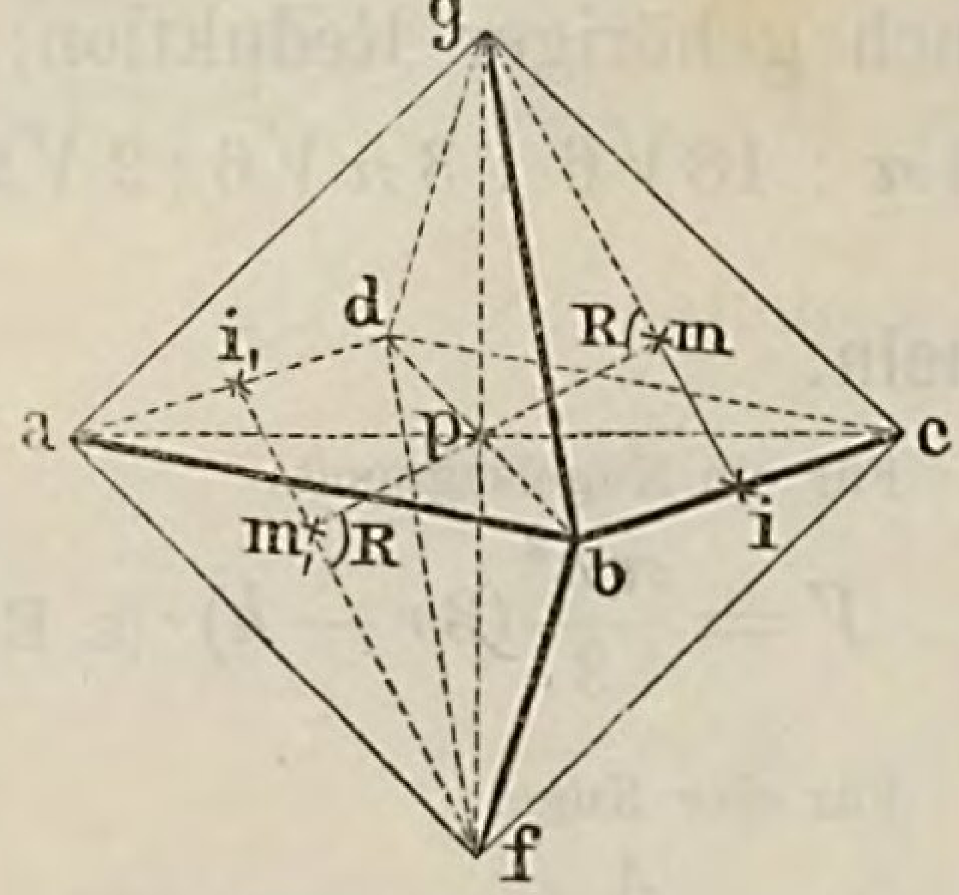
(III–V: s. Erkl. 361).

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Fig. 97, um $p$ als Mittelpunkt mit der Strecke $pt$ $(= pu = pu_1 = pt_1)$ als Radius eine Kugel konstruiert, so ist dies diejenige Kugel, welche die sämtlichen Kanten des Oktaeders berührt.

Zur Berechnung der Kubikinhalte der Körperteile des Oktaeders, die in den sechs Ecken desselben liegen und von der Kugelfläche der soeben erwähnten Kugel abgeschnitten werden, beachte man folgendes:

Die 8 Begrenzungsflächen des Oktaeders schneiden auf der gedachten, die Kanten des Oktaeders berührenden Kugel, deren Radius mit $\varrho$ bezeichnet sei, 8 kongruente Kugelsegmente ab. Die Höhe eines jeden dieser Segmente ist gleich der Differenz des Radius $\varrho$ der Kugel und dem senkrechten Abstand, z. B. dem Abstand $pm$ in Figur 98, des Mittelpunkts $p$ von einer Begrenzungsfläche des Oktaeders. Da jener senkrechte Abstand $(pm)$ gleich dem Radius der dem Oktaeder eingeschriebenen Kugel ist, so hat man, wenn dieser Radius durch $r$ bezeichnet wird, nach vorstehender Formel I für das Volumen $V$ eines dieser Kugelsegmente die Relation:

Figur 98.




**Erkl. 362.** Nebenstehende Gleichung 1) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x = \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{k^3}{3}\sqrt{2} - \left[\frac{4\pi\cdot k^3}{3\cdot 8} - \frac{8\pi}{3}\left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{6}\sqrt{6} + \frac{k^2}{6}\right)\cdot\left(k + \frac{k}{6}\cdot\sqrt{6}\right)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{k^3}{3}\sqrt{2} - \left[\frac{\pi k^3}{6} - \frac{8\pi}{3}\left(\frac{5k^2}{12} - \frac{2k^2}{12}\sqrt{6}\right)\cdot\left(\frac{6k}{6} + \frac{k}{6}\sqrt{6}\right)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{k^3}{3}\sqrt{2} - \left(\frac{\pi k^3}{6} - \frac{8\pi k^2\cdot k}{3\cdot 12\cdot 6}(5 - 2\sqrt{6})\cdot\sqrt{(6 + \sqrt{6})}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{k^3}{3}\sqrt{2} - \frac{\pi k^3}{6}\left(1 - \frac{2}{9}\cdot(30 - 12\sqrt{6} + 5\sqrt{6} - 12)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{k^3}{3}\sqrt{2} - \frac{\pi k^3}{6}\cdot\left(\frac{9}{9} - \frac{2}{9}(18 - 7\sqrt{6})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{k^3}{3}\sqrt{2} - \frac{\pi k^3}{54}\cdot(9 - 38 + 14\sqrt{6})\right]$$

$$= \frac{k^3}{18}\left[\sqrt{2} - \frac{\pi}{18}(14\sqrt{6} - 27)\right]$$

$$V = \frac{\pi\cdot(\varrho - r)^2}{3}\cdot[3\varrho - (\varrho - r)]$$

oder

$$\text{a)} \ldots V = \frac{\pi\cdot(\varrho - r)^2}{3}\cdot(2\varrho + r)$$

Für das Volumen $V_1$ des Teils der die Kanten des Oktaeders berührenden Kugel, welcher innerhalb des Oktaeders zu liegen kommt, hat man somit und nach der umstehenden Formel II:

$$\text{b)}\ V_1 = \frac{4}{3}\pi\varrho^3 - 8\cdot\frac{\pi(\varrho - r)^2}{3}\cdot(2\varrho + r)$$

Da nun die Kante des Oktaeders $= k$, also nach der umstehenden Formel III das Volumen desselben $= \frac{k^3}{3}, \sqrt{2}$ ist, so erhält man für die Summe $S$ der Volumina der 6 kongruenten, an den Ecken des Oktaeders liegenden, durch die gedachte Kugelfläche abgeschnittenen Körperteile:

$$\text{c)} \ldots S = \frac{k^3}{3}\cdot\sqrt{2} - \left(\frac{4}{3}\pi\varrho^3 - 8\cdot\frac{\pi(\varrho - r)^2}{3}\cdot(2\varrho + r)\right)$$

und man hat zur Bestimmung des gesuchten Volumens $x$ eines jener Körperteile die Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)} \ldots x = \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{k^3}{3}\cdot\sqrt{2} - \left(\frac{4}{3}\pi\varrho^3 - \frac{8\pi(\varrho - r)^2}{3}\cdot(2\varrho + r)\right)\right]$$

oder die Radien $\varrho$ und $r$ nach umstehenden Formeln IV und V in die gegebene Kante $k$ des Oktaeders ausgedrückt:

$$1) \ldots x = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{k^3}{3}\sqrt{2} - \left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{k}{2}\right)^3 - \frac{8\pi\left(\frac{k}{2} - \frac{k}{6}\sqrt{6}\right)^2}{3}\cdot\left(2\cdot\frac{k}{2} + \frac{k}{6}\sqrt{6}\right)\right]\right)$$

Reduziert man den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung, wie in der Erkl. 362 gezeigt ist, so erhält man für das gesuchte Volumen $x$:

$$x = \frac{k^3}{18}\left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{18}(14\sqrt{6} - 27)\right)$$

**Aufgabe 418.** In ein und dieselbe Kugel sei ein reguläres Oktaeder und ein Würfel beschrieben. Wie verhalten sich die Radien der diesen Körpern einbeschriebenen Kugeln zueinander?

Welchen Lehrsatz kann man nach nebenstehender Auflösung aufstellen?

**Formeln:**

Für ein Hexaeder:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I.} \ldots R = \frac{k}{2}\sqrt{3} \\ \text{II.} \ldots r = \frac{k}{2} \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 358)}$$

Für ein Oktaeder:

$$\left.\begin{array}{l} \text{III.} \ldots R = \frac{k}{2}\sqrt{2} \\ \text{IV.} \ldots r = \frac{k}{6}\sqrt{6} \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 361).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man mit $R$ den Radius einer Kugel, mit $k$ die Kante des regulären Hexaeders, bezw. mit $k_1$ die Kanten des regulären Oktaeders, welches jener Kugel einbeschrieben gedacht werden kann, so hat man nach vorstehender Formel I für die Kante $k$ des Hexaeders:

$$\text{a)} \ldots k = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

und nach vorstehender Formel III für die Kante $k_1$ des Oktaeders:

$$\text{b)} \ldots k_1 = \frac{2R}{\sqrt{2}}$$

Ferner hat man nach vorstehender Formel II für den Radius $r$ der jenem Hexaeder einbeschriebenen Kugel:

$$\text{c)} \ldots r = \frac{k}{2}$$

und nach vorstehender Formel IV für den Radius $r_1$ der jenem Oktaeder einbeschriebenen Kugel:

$$\text{d)} \ldots r_1 = \frac{k_1}{6}\sqrt{6}$$

In Rücksicht der mittels den Gleichungen a) und b) für $k$ und $k_1$ gefundenen Werte erhält man für das gesuchte Verhältnis der Radien $r$ und $r_1$:

$$1) \ldots r : r_1 = \frac{2R}{2 \cdot \sqrt{3}} : \frac{2R}{\sqrt{2} \cdot 6} \cdot \sqrt{6}$$

Diese Proportion reduziert, gibt der Reihe nach:

$$r : r_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{6}}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} : \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} : \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{6}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} : \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{6}$$

oder

A) . . . $r : r_1 = 1 : 1$

Hieraus ergibt sich:

„Denkt man sich in eine Kugel ein reguläres Hexaeder (oder Oktaeder) konstruiert, so ist die diesem Hexaeder (oder Oktaeder) einbeschriebene Kugel zugleich auch die demjenigen Oktaeder (oder Hexaeder) einbeschriebene Kugel, welches man sich in ersterer Kugel konstruiert denken kann.“

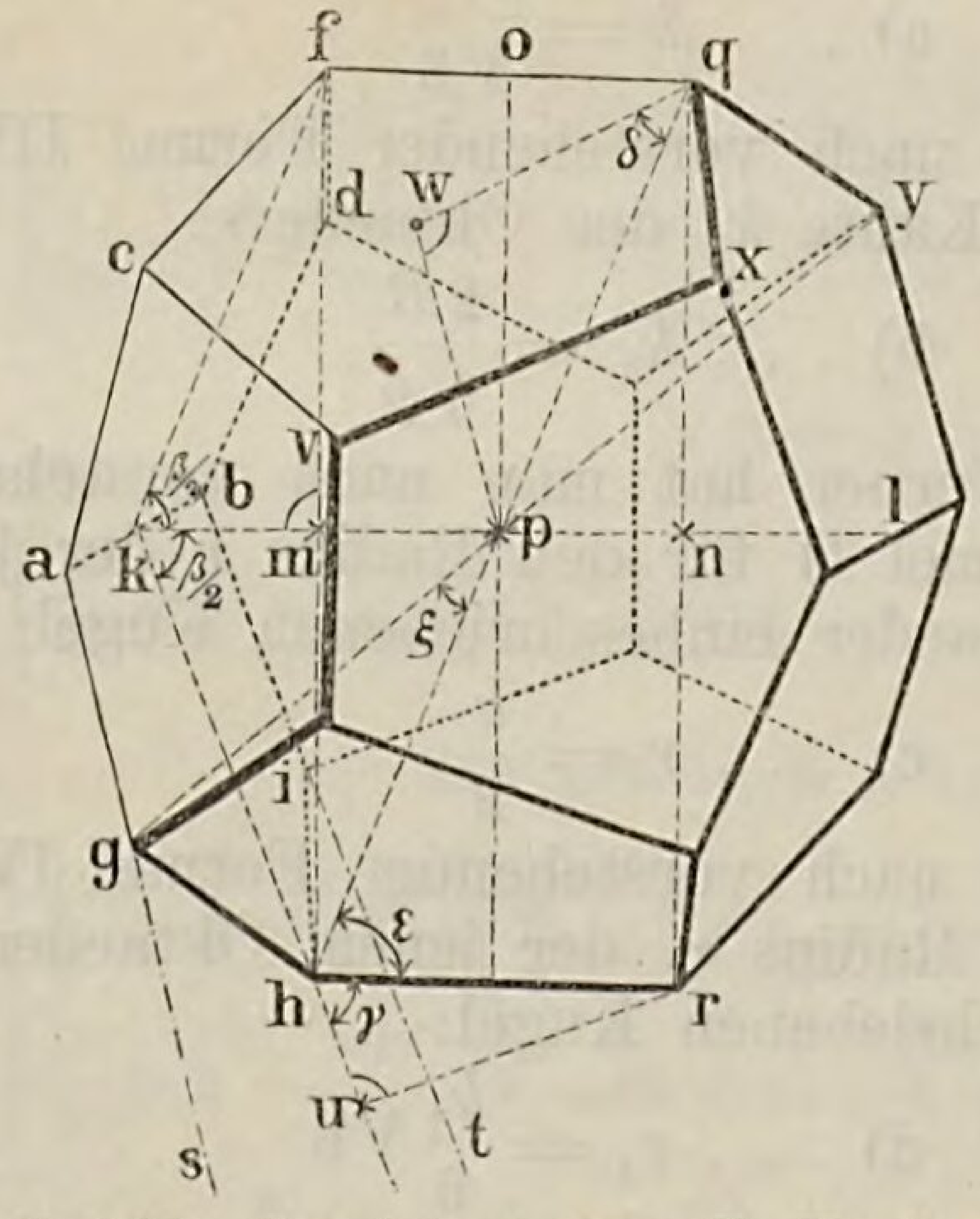
oder

„Die Radien der Kugeln, welche man in solche reguläre Hexaeder und Oktaeder einbeschrieben denken kann, deren umschriebene Kugeln gleiche Radien haben, sind einander gleich.“

---

**Aufgabe 419.** Man soll das Verhältnis der Rauminhalte zweier regulären Dodekaeder bestimmen, welche einer Kugel mit dem Radius $r$ um-, bezw. einbeschrieben seien.

Figur 99.




**Erkl. 363.** Bezeichnet man die Kante eines **regulären Dodekaeders** mit $k$, dessen grösste Körperdiagonale mit $D$, die Oberfläche mit $O$, das Volumen mit $V$, den Radius der Kugel, welche durch sämtliche Ecken des Dodekaeders geht mit $R$, den Radius der Kugel, welche durch die Mitten sämtlicher Kanten geht mit $\varrho$ und den Radius der Kugel, welche die sämtlichen Begrenzungsflächen des Dodekaeders berührt mit $r$, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

1) $D = \frac{k}{2}(1 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3} = \frac{k}{2}\sqrt{18 + 6 \cdot \sqrt{5}}$

2) $O = 3k^2 \cdot \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$

3) $V = \frac{k^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$

**Formeln:**

Für ein Dodekaeder:

I. . . . $r = \frac{k}{4} \cdot \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$

II. . . . $R = \frac{k}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$

III. . . . $V = \frac{k^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$

(s. Erkl. 363).

**Auflösung.** Bezeichnet man die Kante des Dodekaeders, welches der Kugel, deren Radius $= r$ ist, umschrieben werden kann, mit $k$, so erhält man für diese Kante $k$ nach vorstehender Formel I:

a) . . . $k = \frac{4 \cdot r}{\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}}$

Bezeichnet man ferner die Kante des Dodekaeders, welches jener Kugel einbeschrieben werden kann, mit $k_1$, so erhält man für diese Kante $k_1$ nach vorstehender Formel II:

b) . . . $k_1 = \frac{4 \cdot r}{\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}$

Substituiert man diese für $k$ und $k_1$ gefundenen Werte in vorstehender Formel III, so erhält man für das Verhältnis der Volumen $V$ und $V_1$ beider Dodekaeder:

4) $R = \frac{k}{4}(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3} = \frac{k}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$

5) $\varrho = \frac{k}{4}\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \frac{k}{4}(3+\sqrt{5})$

6) $r = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} = \frac{k}{4}\cdot\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}$

Siehe Kleyers Lehrbücher der Stereometrie, speziell das 1. Buch der Körperberechnungen, Abschnitt: Das Dodekaeder.

**Erkl. 364.** Hat man in dem Nenner eines Bruches, eines Quotienten, ein Binomium, welches eine oder zwei Quadratwurzeln enthält, so kann man den Nenner r a t i o n a l machen, d. h. die in demselben vorkommenden Quadratwurzeln wegschaffen, indem man den in der Erkl. 347 ausgesprochenen Satz:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

anwendet.

**Erkl. 365.** Nach der Formel:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

erhält man für:

$$\begin{aligned}(5-2\sqrt{5})^3 &= 5^3 - 3\cdot 5^2\cdot 2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot 5\cdot(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{5})^3 \\ &= 125 - 90\sqrt{5} + 300 - 40\sqrt{5} \\ &= 425 - 130\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$1)\ \ldots\ V:V_1 = \left(\frac{4\cdot r}{\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}}\right)^3\cdot\frac{15+7\sqrt{5}}{4} : \left(\frac{4\cdot r}{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}\right)^3\cdot\frac{15+7\sqrt{5}}{4}$$

Diese Proportion reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V:V_1 = \left(\frac{4\cdot r}{\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}}\right)^3 : \left(\frac{4\cdot r}{\sqrt{18+6\cdot\sqrt{5}}}\right)^3$$

$$= \left(\frac{4r}{\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}} : \frac{4r}{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}\right)^3$$

$$= \left(\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{\frac{5(18+6\sqrt{5})}{50+22\sqrt{5}}}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5(18+6\sqrt{5})\cdot(50-22\sqrt{5})}{(50+22\sqrt{5})(50-22\sqrt{5})}}\right)^3$$

(s. Erkl. 364)

$$= \left(\sqrt{\frac{5\cdot(900+300\sqrt{5}-396\sqrt{5}-660)}{2500-2420}}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5(240-96\sqrt{5})}{80}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{240-96\sqrt{5}}{16}}\right)^3$$

$$= \sqrt{(15-6\sqrt{5})^3} = \sqrt{[3(5-2\sqrt{5})]^3}$$

$$= \sqrt{3^3(5-2\sqrt{5})^3} = 3\sqrt{3(5-2\sqrt{5})^3}$$

(s. Erkl. 365)

$$= 3\sqrt{3(425-130\sqrt{5})}$$

oder

$$V:V_1 = 3\sqrt{15(85-26\sqrt{5})} : 1$$

---

**Aufgabe 420.** In eine Kugel ist ein reguläres Ikosaeder konstruiert. In welchem Verhältnis wird die Oberfläche der Kugel durch eine erweiterte Begrenzungsfläche des Ikosaeders geteilt, und welches sind die 5 ersten Näherungswerte des gefundenen Verhältnisses?

**Formeln:**

Für eine Calotte:

I. . . . $J = 2\pi r h$ (s. Erkl. 63)

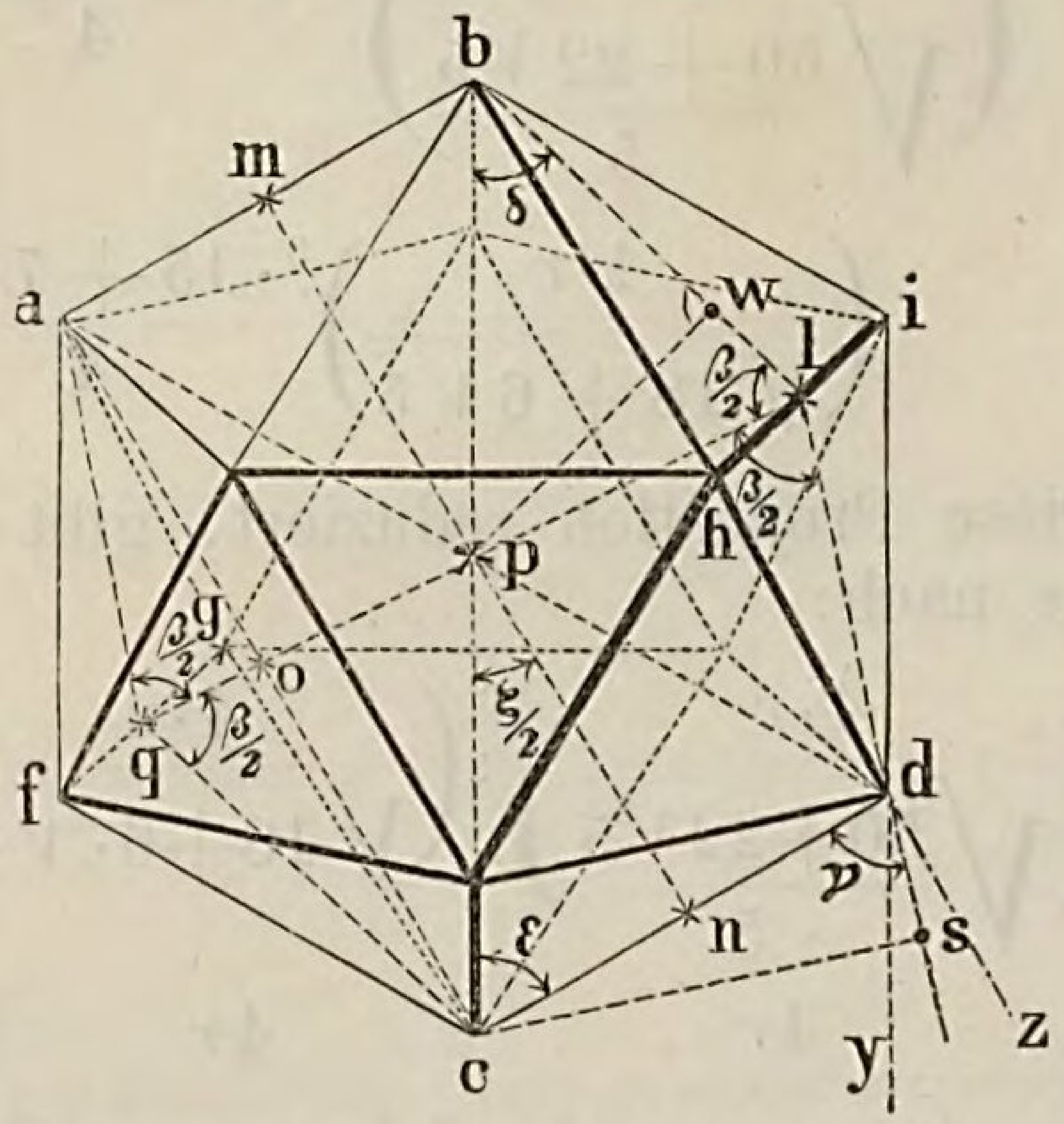
Für ein Ikosaeder:

II. . . . $r = \frac{k}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}}$

III. . . . $R = \frac{k}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

(s. Erkl. 366).

Figur 100.




**Erkl. 366.** Bezeichnet man die Kante eines **regulären Ikosaeders** mit $k$, dessen grösste Körperdiagonale mit $D$, die Oberfläche mit $O$, das Volumen mit $V$, den Radius der Kugel, welche durch sämtliche Ecken des Ikosaeders geht mit $R$, den Radius der Kugel, welche durch die Mitten sämtlicher Kanten geht mit $\varrho$ und den Radius der Kugel, welche die sämtlichen Begrenzungsflächen des Ikosaeders berührt mit $r$, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

1) . . . $D = \frac{k}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

2) . . . $O = 5k_1^2\sqrt{3}$

3) . . . $V = \frac{5}{12}k^3\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \frac{5}{12}k^3(3+\sqrt{5})$

4) . . . $R = \frac{k}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

5) . . . $\varrho = \frac{k}{4}(1+\sqrt{5})$

6) . . . $r = \frac{k}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}} = \frac{k}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15})$

Siehe Kleyers Lehrbücher der Stereometrie, speziell das 1. Buch der Körperberechnungen, Abschnitt: Das Ikosaeder:

**Erkl. 367.** Die Gleichung:

$$r = \frac{4R}{12\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{42+18\sqrt{5}}$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$r = \frac{R}{3}\cdot\sqrt{\frac{42+18\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{R}{3}\cdot\sqrt{\frac{21+9\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{R}{3}\cdot\sqrt{\frac{(21+9\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}$$ (siehe Erkl. 364)

$$= \frac{R}{3}\cdot\sqrt{\frac{105+45\sqrt{5}-21\sqrt{5}-45}{25-5}}$$

**Auflösung.** Denkt man sich eine Begrenzungsfläche eines regul. Ikosaeders, z. B. die Fläche $bhi$ in Fig. 100 erweitert, so teilt dieselbe die Oberfläche der dem Ikosaeder umschriebenen Kugel in zwei Calotten, von welchen die kleinere die Höhe $h$:

a) . . . $h = pb - pw = R - r$

die grössere die Höhe $h_1$:

b) $h_1 = bc - h = 2R - (R-r) = R + r$

hat, wenn $R$ den Radius der gegebenen Kugel. bezw. den Radius der dem Ikosaeder umschriebenen, $r$ den Radius der demselben einbeschriebenen Kugel bedeutet.

Mit Benutzung der vorstehenden Formel I erhält man somit für den Inhalt $J$ der kleineren Calotte:

c) . . . $J = 2\pi R\cdot(R-r)$

und für den Inhalt $J_1$ der grösseren Calotte:

d) . . . $J_1 = 2\pi R(R+r)$

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses der Inhalte $J$ und $J_1$ muss man noch den Radius $r$ der dem Ikosaeder einbeschriebenen Kugel in den Radius $R$ der gegebenen Kugel ausdrücken, dies geschieht wie folgt:

Nach der umstehenden Formel II hat man für den Radius $r$ in Bezug auf die Kante $k$ des Ikosaeders:

e) . . . $r = \frac{k}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}}$

ferner ergibt sich aus vorstehender Formel III für die Kante $k$ in bezug auf den Radius $R$, die Beziehung:

f) . . . $k = \frac{4R}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

Aus den Gleichungen e) und f) folgt:

$$r = \frac{4R}{12\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{42+18\sqrt{5}}$$

oder nach der Erkl. 367:

g) . . . $r = \frac{R}{3}\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}$

Aus den Gleichungen c) und d) erhält man für das Verhältnis der Inhalte $J$ und $J_1$ zunächst:

$$= \frac{R}{3} \cdot \sqrt{\frac{60 + 24\sqrt{5}}{20}}$$

oder

a) $$r = \frac{R}{3}\sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5}}{5}}$$

**Erkl. 368.** Nebenstehende Gleichung 1) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{J}{J_1} = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}}{3 + \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}}$$

$$= \frac{\left(3 - \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}\right)\left(3 - \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}\right)}{\left(3 + \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}\right)\left(3 - \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}\right)}$$

(s. Erkl. 364)

$$= \frac{9 - 6\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} + \frac{15+6\sqrt{5}}{5}}{9 - \frac{15+6\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{45 - 30\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} + 15 + 6\sqrt{5}}{45 - 15 - 6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{60 - 30\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} + 6\sqrt{5}}{30 - 6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10 - 5\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(10 - 5\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{5}\right)(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}$$ (s. Erkl. 364)

$$= \frac{50 - 25\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} + 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 5\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{5}}{25 - 5}$$

$$= \frac{50 + 15\sqrt{5} - 5\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} \cdot (5 + \sqrt{5})}{20}$$

$$= \frac{10 + 3\sqrt{5} - \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})^2}}{4}$$

$$J:J_1 = 2\pi R(R - r) : 2\pi R \cdot (R + r)$$

oder

h) . . . $J:J_1 = (R - r):(R + r)$

Substituiert man hierin den Wert für $r$ aus Gleichung g), so erhält man für das gesuchte Verhältnis:

1) . . . $$\frac{J}{J_1} = \frac{R - \frac{R}{3}\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}}{R + \frac{R}{3}\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}}$$

oder nach gehöriger Reduktion, siehe Erkl. 368:

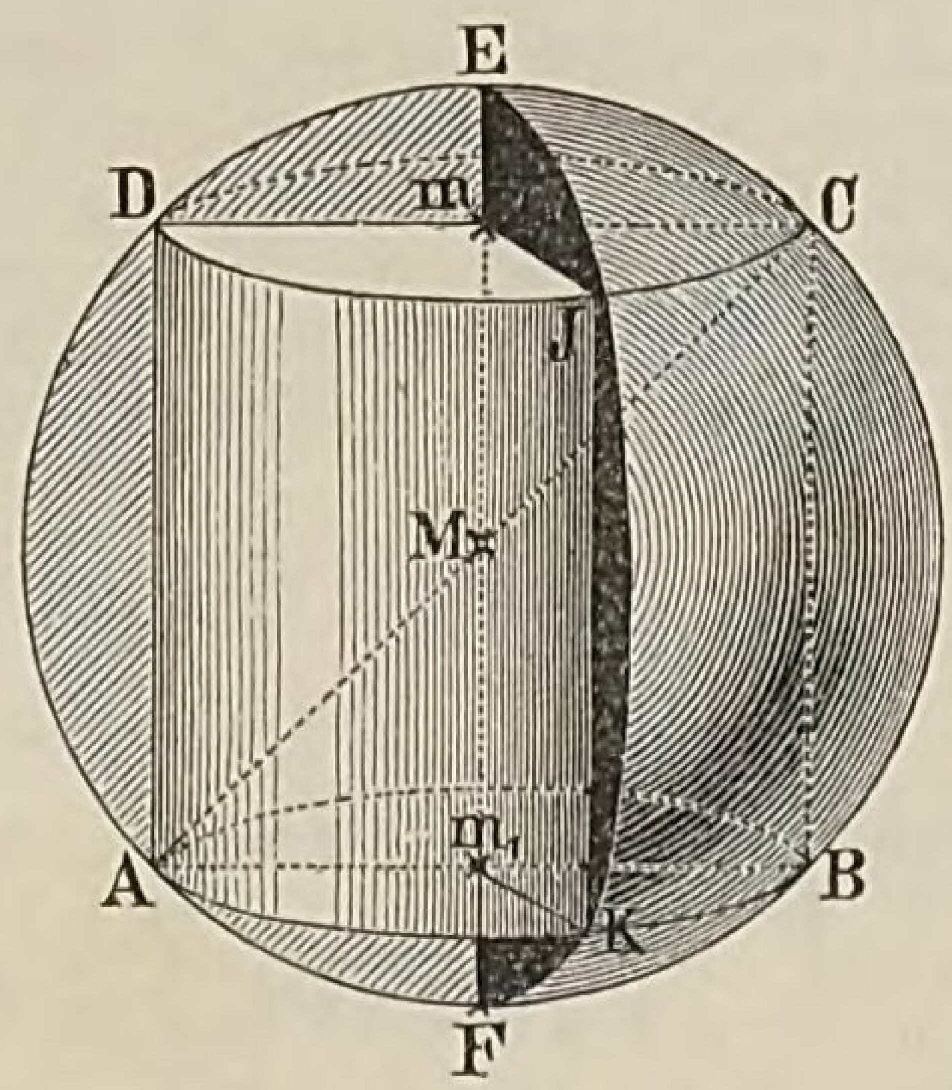
A) . . . $J:J_1 = (10 + 3\sqrt{5} - \sqrt{150 + 66\sqrt{5}}):4$

$$=\left(10+3\sqrt{5}-\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}\cdot(25+10\sqrt{5}+5)}\right):4$$
$$=\left(10+3\sqrt{5}-\sqrt{(15+6\sqrt{5})\cdot(6+2\sqrt{5})}\right):4$$
$$=(10+3\sqrt{5}-\sqrt{90+36\sqrt{5}+30\sqrt{5}+60}):4$$
$$=(10+3\sqrt{5}-\sqrt{150+66\sqrt{5}}):4$$

---

**Aufgabe 421.** In eine Kugel mit dem Radius $r$ ist ein solcher senkrechter Cylinder einbeschrieben, in welchem der Radius der Grundfläche sich zur Höhe wie $\sqrt{3}:3\sqrt{2}$ verhält. Wie gross ist der Radius einer Kugel, in welcher das einbeschriebene reguläre Tetraeder mit jenem Cylinder gleichen Inhalt hat?

Figur 101.




**Erkl. 369.** Aus nebenstehenden Gleichungen

a) . . . $R:H=\sqrt{3}:3\sqrt{2}$

b) . . . $H^2+(2R)^2=(2r)^2$

kann man wie folgt $R$ und $H$ bestimmen:

Aus Gleichung a) erhält man:

c) . . . $R=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot H$

Setzt man diesen Wert für $R$ in Gleich. b) ein, so erhält man:

$$H^2+4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot H\right)^2=4r^2$$

oder

$$H^2+\frac{4\cdot 3}{9\cdot 2}\cdot H^2=4r^2$$

$$H^2\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)=4r^2$$

$$\frac{5}{3}\cdot H^2=4r^2$$

$$H^2=\frac{12}{5}r^2$$

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

I. . . . $V=R^2\cdot\pi\cdot H$ (s. Erkl. 33)

Für ein Tetraeder:

II. . . . $R=\frac{k}{4}\sqrt{6}$

III. . . . $V=\frac{k^3}{12}\sqrt{2}$

(s. Erkl. 353).

**Auflösung.** Bezeichnet man den Radius der Grundfläche des der Kugel einbeschriebenen Cylinders mit $R$, dessen Höhe mit $H$, so hat man gemäss der Aufgabe:

a) . . . $R:H=\sqrt{3}:3\sqrt{2}$

Ferner ergibt sich aus dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $ADC$, siehe Figur 101, wenn man berücksichtigt, dass $AC$ gleich dem doppelten gegebenen Kugelradius $r$ ist, die weitere Relation:

b) . . . $H^2+(2R)^2=(2r)^2$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man nach der Erkl. 369:

c) . . . $H=\frac{2}{5}r\sqrt{15}$

und

d) . . . $R=\frac{1}{5}r\sqrt{10}$

Nach vorstehender Formel I erhält man somit für das Volumen $V$ des Cylinders:

$$V=\left(\frac{1}{5}r\sqrt{10}\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{2}{5}r\sqrt{15}$$
$$=\frac{1}{25}r^2\cdot 10\cdot\pi\cdot\frac{2}{5}r\sqrt{15}$$

oder

1) . . . $V=\frac{4}{25}r^3\pi\sqrt{15}$

Bezeichnet man ferner den gesuchten Radius der Kugel, in welcher das einbeschriebene reguläre Tetraeder gleich

mithin:

$$d) \ldots H = r\cdot\sqrt{\frac{12}{5}} = 2r\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}r\sqrt{15}$$

für $R$ erhält man hiernach aus Gleichung c)

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{5}r\sqrt{15} = \frac{2}{15}r\sqrt{\frac{45}{2}}$$

$$= \frac{2}{15}r\cdot 3\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}r\sqrt{\frac{10}{4}}$$

oder

$$e) \ldots R = \frac{1}{5}r\sqrt{10}$$

dem soeben berechneten Volumen ist, mit $x$, so hat man nach vorstehender Formel II für die Kante $k$ des gedachten Tetraeders:

$$e) \ldots k = \frac{4x}{\sqrt{6}}$$

und somit nach vorstehender Formel III für das Volumen $V$ des Tetraeders:

$$2) \ldots V = \left(\frac{4x}{\sqrt{6}}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$3) \ldots \left(\frac{4x}{\sqrt{6}}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{4}{25}r^3\pi\sqrt{15}$$

Aus dieser Gleichung findet man $x$ wie folgt:

$$\frac{64x^3}{(\sqrt{6})^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{4}{25}r^3\pi\sqrt{15}$$

$$\frac{16x^3}{6\cdot\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{25}r^3\pi\sqrt{15}$$

$$x^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 6}{25\cdot 16}r^3\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

$$x^3 = \frac{9}{50}\cdot r^3\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{15\cdot 6}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{50}\cdot r^3\cdot\pi\cdot\sqrt{45}} = r\sqrt[3]{\frac{27}{50}\pi\sqrt{5}}$$

oder

$$x = 3r\sqrt[3]{\frac{\pi}{50}\sqrt{5}}$$

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 422.** Der Radius einer Kugel sei $= R$, wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des dieser Kugel einbeschriebenen regul. Tetraeders?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind mittels der in der Erkl. 353 angeführten Formeln und analog den gelösten Aufgaben 412 und 413 zu lösen.

**Aufgabe 423.** Die Oberfläche eines regulären Tetraeders sei $= O$. Wie gross ist die Oberfläche der demselben umschriebenen Kugel?

**Aufgabe 424.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen der Kugel, in welche ein reguläres Tetraeder mit der Kante $k$ einbeschrieben werden kann?

**Aufgabe 425.** Die Oberfläche eines regulären Tetraeders beträgt 2 qm weniger als die Oberfläche der dem Tetraeder umschriebenen Kugel; wie gross ist die Kante des Tetraeders und wie gross ist der Radius jener Kugel?

**Aufgabe 426.** In welchem Verhältnis wird die Oberfläche einer Kugel durch eine erweiterte Begrenzungsfläche eines ihr einbeschriebenen regulären Tetraeders geteilt?

**Aufgabe 427.** Wie verhält sich das Volumen eines regul. Tetraeders, welches einer Kugel mit dem Radius $r$ einbeschrieben ist, zu dem Volumen eines derselben Kugel umschriebenen regul. Tetraeders?

**Aufgabe 428.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, in welche man ein reguläres Hexaeder mit der Kante $k$ einschreiben kann?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind mittels der in der Erkl. 358 angeführten Formeln und analog der gelösten Aufgabe 415 zu lösen.

**Aufgabe 429.** Man berechne das Volumen und die Oberfläche eines regulären Hexaeders, um welches man eine Kugel mit dem Radius $R$ konstruieren kann?

**Aufgabe 430.** Von einem regulären Hexaeder kennt man das Volumen $V$; wie gross ist die Oberfläche und der Radius der die Seitenflächen berührenden Kugel?

**Aufgabe 431.** Wie verhalten sich die Volumina und die Oberflächen der drei Kugeln, von welchen die 1. die Seitenflächen eines regulären Hexaeders berührt, die 2. durch die Mitten der Kanten und die 3. durch die Eckpunkte des Hexaeders geht?

**Aufgabe 432.** In einer Kugel sei ein reguläres Hexaeder einbeschrieben und eine Seitenfläche desselben erweitert gedacht; in welchem Verhältnis teilt diese erweiterte Seitenfläche das Volumen der Kugel?

**Aufgabe 433.** Um ein reguläres Hexaeder von 72 qm Oberfläche hat man eine Kugel beschrieben. Wie gross ist ihr Volumen, ihre Oberfläche und wie gross ist das Volumen eines derjenigen Segmente, welche durch die erweiterten Grenzflächen abgeschnitten werden?

**Aufgabe 434.** Denkt man sich durch die Eckpunkte eines regulären Hexaeders eine Kugel gelegt und jede Grenzfläche des Hexaeders erweitert, so wird das Volumen der Kugel ausser dem Hexaeder noch in zwei Arten von Körpern geteilt, nämlich in solche Zweiecke, welche nicht von grössten Kreisen der Kugel begrenzt werden und in Kugelsegmente von denen jedem vier jener Zweiecke weggenommen zu denken sind. Wie gross ist jeder dieser Körper, wenn die Kante des Hexaeders $= k$ ist?

**Aufgabe 435.** Wie verhält sich das Volumen eines regulären Hexaeders, welches einer Kugel mit dem Radius $r$ einbeschrieben ist zu dem Volumen eines derselben Kugel umschriebenen regul. Hexaeders?

**Aufgabe 436.** In einer Halbkugel vom Radius $r = 9$ dm hat man ein regul. Hexaeder, in dieses eine Kugel und in letzterer ein reguläres Tetraeder einbeschrieben. Man soll das Volumen des letzten Körpers berechnen.

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 416.

**Aufgabe 437.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen eines regulären Oktaeders, um welches man eine Kugel mit dem gegeb. Radius $R$ konstruieren kann?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind mittels der in der Erkl. 361 aufgestellten Formeln und analog den gelösten Aufgaben 416—421 zu lösen.

**Aufgabe 438.** Den Kubikinhalt eines regulären Oktaeders zu berechnen, welches einer Kugel mit dem Radius $r$ umschrieben ist.

**Aufgabe 439.** Welches ist die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, wenn die Kante des derselben einbeschriebenen regul. Oktaeders $= k$ ist?

**Aufgabe 440.** Ein reguläres Oktaeder sei einer Kugel einbeschrieben; wie gross ist das Verhältnis der Volumina beider Körper und welches sind die 4 ersten Näherungswerte des gesuchten Verhältnisses?

**Aufgabe 441.** Ein reguläres Oktaeder, dessen Oberfläche $= 10$ qcm beträgt, ist einer Kugel einbeschrieben; man soll die Oberfläche der Kugel berechnen und das Verhältnis der Volumina beider Körper durch die ersten 6 Näherungswerte bestimmen.

**Aufgabe 442.** Man berechne das Verhältnis der Kugelabschnitte, in welche eine Kugel durch die erweiterte Seitenfläche eines ihr einbeschriebenen regul. Oktaeders zerlegt wird.

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 413 und mittels Benutzung der in der Erkl. 361 aufgestellten Formeln.

**Aufgabe 443.** In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen und die Volumina der drei Kugeln, von welchen die 1. die Seitenflächen eines regul. Oktaeders berührt, die 2. durch die Mitten der Kanten und die 3. durch die Ecken des Oktaeders geht?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 412 und mit Hülfe der in der Erkl. 361 aufgestellten Formeln.

**Aufgabe 444.** Der Radius einer Kugel sei $= r$; in welchem Verhältnis stehen die Volumina der dieser Kugel ein- und umbeschriebenen regul. Oktaeder?

**Aufgabe 445.** In eine Kugel, deren Kubikinhalt $= V$ ist, sei ein reguläres Oktaeder, in dieses eine 2. Kugel, in diese ein 2. Oktaeder u. s. f. bis ins Unendliche einbeschrieben. Wie gross ist die Summe der Volumina der Kugeln; wie gross die der Oktaeder?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 414 und mittels Benutzung der in der Erkl. 361 angeführten Formeln.

**Aufgabe 446.** Das Volumen eines regul. Oktaeders sei $V = 500$ ccm; wie gross ist das Volumen eines regul. Tetraeders, welches sich mit jenem Oktaeder in ein und dieselbe Kugel beschreiben lässt?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind durch Verbindung der in den Erkl. 358, 359 u. 361 angeführten Formeln zu lösen.

**Aufgabe 447.** In welchem Verhältnis steht das Volumen eines regul. Oktaeders zu dem eines regul. Tetraeders, wenn beide regul. Polyeder einer und derselben Kugel mit dem Radius $r$ umschrieben sind?

**Aufgabe 448.** Man soll den Radius derjenigen Kugel berechnen, für welche das um dieselbe beschriebene reguläre Oktaeder denselben Rauminhalt hat, als das in eine Kugel mit dem Radius $r$ beschriebene reguläre Tetraeder.

**Aufgabe 449.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, für welche das einbeschriebene regul. Oktaeder dasselbe Volumen hat, wie das in die Kugel vom Radius $r$ beschriebene Tetraeder?

**Aufgabe 450.** Um ein reguläres Hexaeder mit der Kante $k$, ist eine Kugel beschrieben; in diese ein regul. Tetraeder; um dieses wieder eine Kugel, und um diese Kugel endlich ein reguläres Oktaeder. Wie gross ist das Volumen des Oktaeders?

**Aufgabe 451.** In einer Halbkugel mit dem Radius $r$ ist ein Würfel, um diesen eine Kugel, um diese ein Oktaeder, um letzteres wieder eine Kugel, und in diese endlich ein regul. Tetraeder beschrieben, welches Volumen hat letzter Körper?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 416.

**Aufgabe 452.** Man soll die Oberfläche und das Volumen einer Kugel berechnen, in welche man ein reguläres Dodekaeder konstruieren kann, dessen Kante $= k$ ist?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind mit Hülfe der in der Erkl. 363 angeführten Formeln zu lösen.

**Aufgabe 453.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen eines regul. Dodekaeders, um welches man eine Kugel mit dem Radius $R$ beschreiben kann?

**Aufgabe 454.** Von einem regul. Dodekaeder kennt man den Radius $r$ der demselben einbeschriebenen Kugel $= 5$ dm; wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des Dodekaeders?

**Aufgabe 455.** Welches ist die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, in welche man ein reguläres Ikosaeder konstruieren kann, dessen Kante $= k$ ist?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind mit Hülfe der in der Erkl. 366 angeführten Formeln zu lösen.

**Aufgabe 456.** Man soll das Volumen und die Oberfläche eines regul. Ikosaeders berechnen, welches in eine Kugel mit dem Radius $R$ einbeschrieben werden kann.

**Aufgabe 457.** In welchem Verhältnis stehen die Volumina zweier regul. Ikosaeder, welche einer Kugel mit dem gegeb. Radius $r$ um- bezw. einbeschrieben sind?

**Aufgabe 458.** In ein und dieselbe Kugel sei ein reguläres Dodekaeder und ein reguläres Ikosaeder beschrieben. In welchem Verhältnis stehen die Radien der diesen regul. Polyedern einbeschriebenen Kugeln zu einander?

Welchen Lehrsatz kann man aus der sich ergebenden Auflösung ableiten?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 418 und mit Hülfe der in den Erkl. 363 und 366 angeführten Formeln.

**Aufgabe 459.** In einer Kugel mit dem Radius $r$ ist ein senkrechter Cylinder einbeschrieben, in welchem der Radius der Grundfläche sich zur Höhe wie $\sqrt{3} : 3\sqrt{2}$ verhält. Wie gross ist der Radius einer Kugel, für welche das umschriebene reguläre Oktaeder gleiche Oberfläche mit jenem Cylinder hat?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind analog der gelösten Aufgabe 421 zu lösen.

**Aufgabe 460.** In eine Kugel mit dem Radius $r$, ist ein senkrechter Kegel einbeschrieben, dessen Grundfläche $= \frac{1}{10}$ der Oberfläche jener Kugel ist; wie gross ist
a) die Höhe des Kegels und wie verhält sich
b) der Inhalt desselben zu dem Inhalte des in jene Kugel einbeschriebenen regul. Tetraeders, wenn man den Inhalt des Kegels $= 1$ setzt?

---

**Aufgabe 461.** Um ein reguläres Tetraeder mit der Kante $k$ ist eine Kugel beschrieben, und diese Kugel ist von einer Ebene durchschnitten, welche $\frac{5}{24}$ der Kugelfläche zum Inhalt hat. Ueber dieser Ebene sind in beiden Kugelsegmenten senkrechte Kegel errichtet, deren Spitzen in der Kugelfläche liegen; und in diesen Doppelkegel endlich ist eine Kugel konstruiert, welche beide Kegelflächen tangiert. Wie gross ist der Radius dieser Kugel?

# VIII.
# Aufgaben über die einfachen geometrischen Körper in gegenseitiger Verbindung.

(Berechnung von zusammengesetzten, ineinandergestellten und ineinandergeschobenen Körpern, zentrale oder neutrale Durchbohrungen etc.)

## a). Gelöste Aufgaben.

### 1. Das Prisma in Verbindung mit dem Prisma.

**Aufgabe 462.** In ein gerades Prisma mit quadratischer Basis sei ein andres so konstruiert, dass seine Eckpunkte in den Mitten der Grundkanten des ersteren liegen. In das hierdurch erhaltene zweite gerade Prisma mit quadratischer Basis sei ein drittes so konstruiert, wie das zweite in dem ersten u. s. f. bis ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Kubikinhalte der unendlich vielen, auf diese Weise konstruiert gedachten Prismen, wenn die Höhe $H$ und die Grundkante $a$ des ersten Prismas gegeben ist?

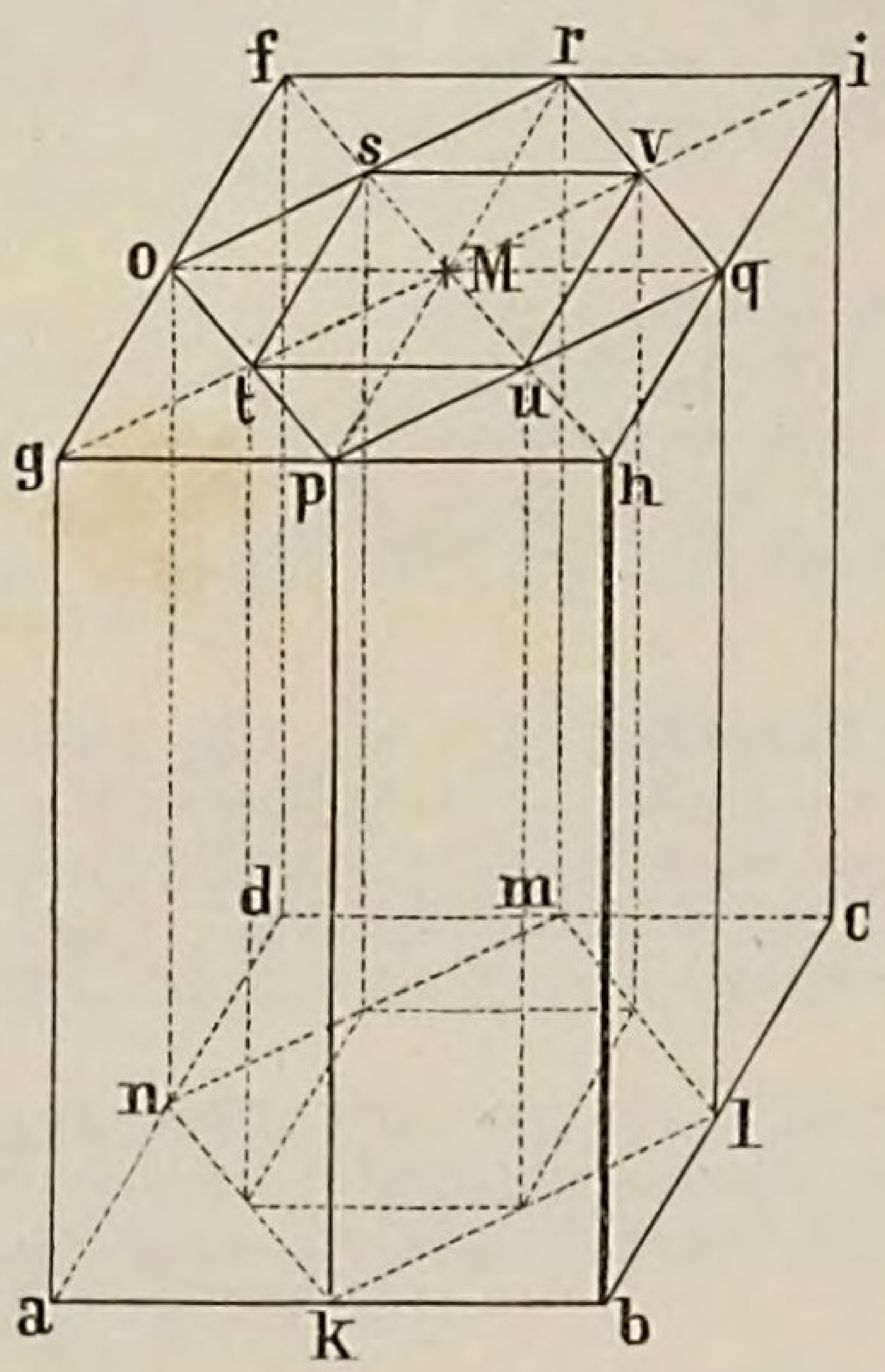
**Formel:**

$$V = G \cdot H$$

(s. Erkl. 1).

**Auflösung.** Verbindet man die Mitten der Seiten des Quadrats $abcd$ oder des Quadrats $ghif$, siehe Fig. 102, so erhält man nach der Erkl. 370 das Quadrat $klmn$ bezw. das Quadrat $pqro$. Verbindet man ferner die Mitten der Rechteckseiten $ab$ und $gh$, bezw. der Seiten $bc$ und $hi$ etc., so stehen diese Verbindungslinien nach der Erkl. 371 senkrecht auf jenen Rechteckseiten und

Figur 102.




**Erkl. 370.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man die Mitten der vier Seiten eines Quadrats, so bilden diese Verbindungslinien wiederum die Seiten eines Quadrats."

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.

**Erkl. 371.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man die Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks, so ist diese Verbindungslinie parallel den beiden andren Seiten und somit auch senkrecht auf jenen beiden ersten Seiten."

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.

**Erkl. 372.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Steht eine Ebene (in Fig. 102 z. B. die Ebene $abhg$) senkrecht auf einer zweiten Ebene ($abcd$ oder $ghif$), und steht eine in jener Ebene liegende Linie ($pk$) senkrecht auf der Durchschnittslinie ($ab$) der beiden Ebenen, so steht auch jene Linie ($pk$) senkrecht auf der zweiten Ebene ($abcd$, bezw. $klmn$)."

Siehe Kleyers Lehrbücher der Stereometrie, 1. Band.

nach der Erkl. 372 auch senkrecht auf den Flächen $abcd$ und $ghif$, bezw. senkrecht auf den Quadraten $klmn$ und $pqro$. Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass das nach der Aufgabe in das gegebene Prisma konstruierte zweite Prisma wiederum ein gerades quadratisches Prisma sein muss. Dasselbe gilt von den in analoger Weise konstruiert gedachten weitern Prismen.

Zur Berechnung der gesuchten Summe $x$ der Volumina sämtlicher in das gegebene Prisma konstruiert gedachten, unzähligen Prismen verfahre man wie folgt:

Bezeichnet man die Inhalte der Grundflächen der gedachten Prismen der Reihe nach mit $y_1, y_2, y_3 \ldots$, die Höhe des gegebenen Prismas, d. i. zugleich die gemeinschaftliche Höhe jener gedachten Prismen mit $H$, so erhält man unter wiederholter Benutzung der vorstehenden Formel für die gesuchte Summe $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$x = y_1 \cdot H - y_2 \cdot H + y_3 \cdot H + \ldots$$

oder

$$1) \ldots x = H \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

Zur Bestimmung der Inhalte $y_1, y_2, y_3$ der Grundflächen der gedachten aufeinanderfolgenden Prismen beachte man, dass dieselben Quadrate sind und dass man somit nur deren Seiten in die gegebene Grundkante $a$ des ersteren Prismas auszudrücken hat.

Aus dem gleichschenkligen, bei $b$ rechtwinkligen Dreieck $kbl$ erhält man für die mit $a_1$ bezeichnete Grundkante $kl$ der ersten der gedachten Prismen:

$$\overline{kl}^2 = \overline{kb}^2 + \overline{bl}^2$$

$$\overline{kl}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

oder

$$a) \ldots a_1 = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

In analoger Weise erhält man für die mit $a_2$ bezeichnete Grundkante des zweiten jener Prismen:

$$b) \ldots a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ oder } = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = a \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

In analoger Weise erhält man für die mit $a_3$ bezeichnete Grundkante des dritten jener Prismen:

c) . . . $a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $a \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = a \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3$ u. s. f.

Für die Inhalte $y_1, y_2, y_3 \ldots$ ergibt sich somit der Reihe nach:

$$2) \ldots y_1 = a_1{}^2 = \left(a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} a^2$$

$$3) \ldots y_2 = a^2{}_2 = \left[a \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2\right]^2 = \left(a \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} \cdot a^2$$

$$4) \ldots y_3 = a^2{}_3 = \left[a \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3\right]^2 = a^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2\right]^3 = a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} \cdot a^2 \text{ u. s. f.}$$

**Erkl. 373.** Die in nebenstehender Gleich. 6) vorkommende Summenreihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ ist eine fallende, unendliche, geometrische Reihe, deren Anfangsglied $a = \frac{1}{2}$, deren Quotient $q = \frac{1}{2}$ (nämlich ein echter Bruch) und deren Gliederzahl $n = \infty$ ist (s. Erkl. 356). Für die Summe $s$ der Glieder dieser Reihe hat man somit nach der in Erkl. 357 angeführten Summenformel:

$$s = \frac{a}{1-q}$$

die Relation:

$$a) \ldots s = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

woraus man:

$$b) \ldots s = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

erhält.

In Rücksicht der für $y_1, y_2, y_3 \ldots$ gefundenen Werte geht die vorstehende Gleichung 1) über in:

$$5) \,.\, x = H \cdot \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2^2} a^2 + \frac{1}{2^3} a^2 + \cdots\right)$$

und hieraus ergibt sich der Reihe nach wie folgt:

$$6) \,.\, x = a^2 \cdot H \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right)$$

$$x = a^2 \cdot H \cdot 1 \quad \text{(s. Erkl. 373)}$$

oder

$$A) \ldots x = a^2 \cdot H$$

d. h. die Summe der Volumen der in das gegebene Prisma eingezeichneten unendlich vielen Prismen ist gleich dem Volumen des gegebenen Prismas.

---

## 2. Die Pyramide in Verbindung mit der Pyramide.

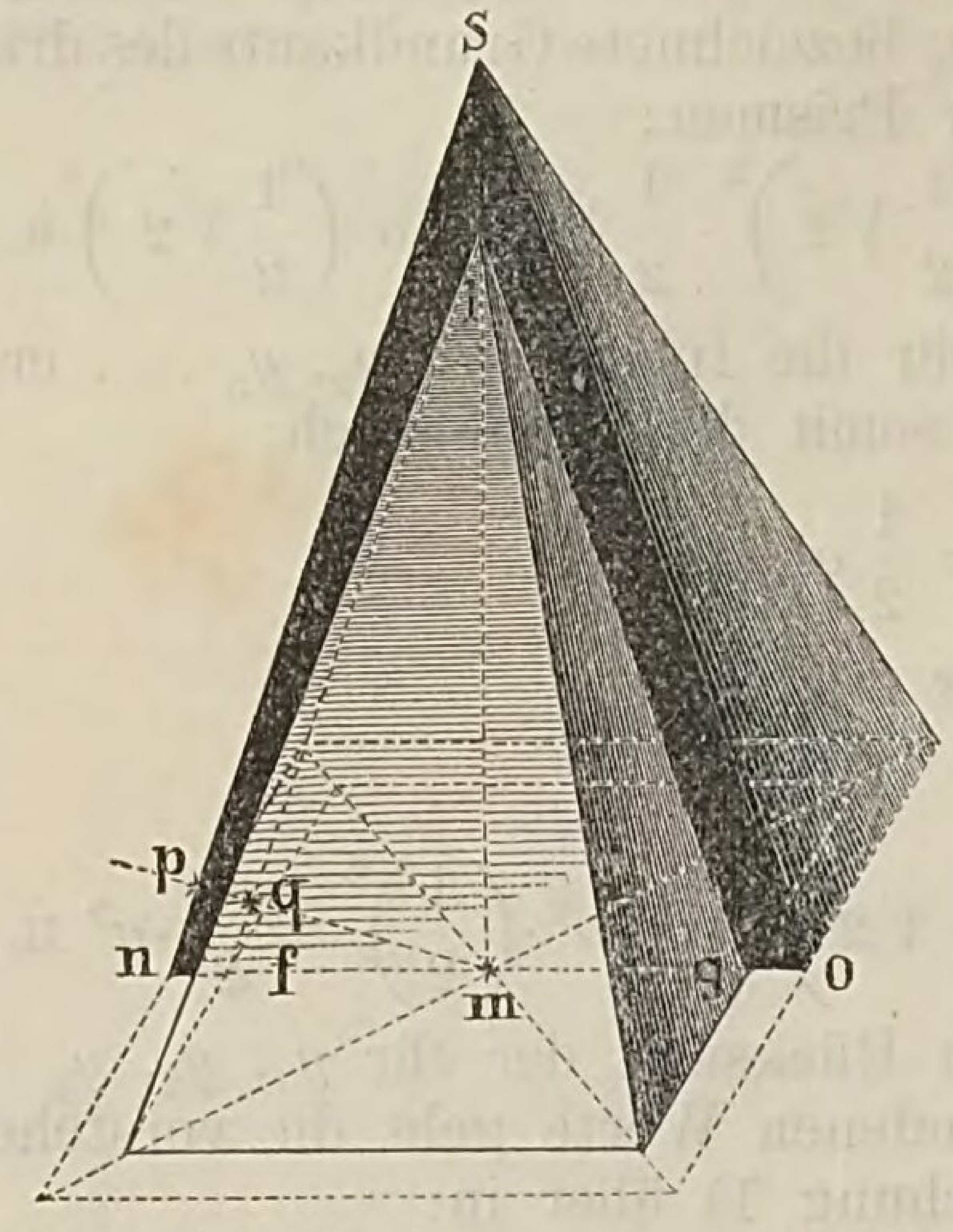
**Aufgabe 463.** Der Mantel einer quadratischen Pyramide, bei welcher die Kante der Grundfläche $= 2a$ Meter, die Höhe $= b$ Meter ist, soll $c$ Meter dick mit Sandstein so belegt werden, dass die Belegung wieder die Gestalt einer Pyramide hat; wie viel cbm Sandstein sind hierzu erforderlich?

**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Höhe der Pyramide eine Ebene gelegt, welche parallel zweien Grundkanten ist, so schneidet dieselbe die Pyramide in dem gleichschenkligen Dreieck $fgi$, dessen Höhe $im$ gleich der gegebenen Höhe $b$ und dessen Basis $fg$ gleich der gegebenen Grundkante $2a$ der Pyra-

Figur 103.




**Erkl. 374.** Bezeichnet man, siehe Fig. 103, die eine Kathete, z. B. $im$ des rechtwinkligen Dreiecks $fmi$ mit $b$, die andre Kathete $fm$ mit $a$ und fällt man von dem Scheitel $m$ des rechten Winkels aus ein Perpendikel auf die Hypotenuse $fi$, so hat man für den Abschnitt $M (= iq)$ der Hypotenuse, welcher an der Kathete $b$ liegt, die Relation:

1) . . . $M = iq = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (s. Erkl. 375)

Dann hat man für den andren Abschnitt $N$ $(= fq)$ der Hypotenuse, welcher an der Kathete $a$ liegt, die Relation:

2) . . . $N = fq = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (s. Erkl. 375)

ferner hat man für den Perpendikel $P (= mq)$:

3) . . . $P = mq = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (s. Erkl. 377)

**Erkl. 375.** In dem rechtwinkligen Dreieck $fmi$, siehe Fig. 103, dessen eine Kathete $fm = a$ und dessen andre Kathete $mi = b$ ist. erhält man für die Hypotenuse $fi$, nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

a) . . . $fi = \sqrt{a^2 + b^2}$

Bezeichnet man den einen der Abschnitte, in welchem durch den Fusspunkt der Höhe $mq$ die Hypotenuse geteilt wird, z. B. den Abschnitt $iq$ mit $M$, den andern Abschnitt $fq$ mit $N$, so hat man nach dem in der Erkl. 376 aufgestellten geometrischen Satze die Relation:

$$\overline{im}^2 = if \cdot iq$$

bezw. die Relation:

$$b^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot M$$

und hieraus erhält man:

b) . . . $M = iq = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Ebenso erhält man nach der Erkl. 376:

$$\overline{fm}^2 = fi \cdot fq$$

mide ist. Jene gedachte Ebene schneidet aber auch die pyramidalische Sandsteinbelegung in dem gleichschenkligen Dreieck $sno$, dessen Schenkel parallel den Schenkeln des ersten Dreiecks sind, dessen Höhe $sm$ gleich der noch unbekannten Höhe $y$ und dessen Basis $no$ gleich der ebenfalls noch unbekannten Grundkante $2z$ der gedachten Sandsteinpyramide ist.

Das gesuchte Volumen $x$ der Sandsteinbelegung findet man, wenn man von dem Volumen der Pyramide, deren Mantelfläche durch die äussere Oberfläche der Sandsteinbelegung gebildet wird, das Volumen der inneren gegebenen Pyramide abzieht.

Mittels doppelter Benutzung der vorstehenden Formel erhält man somit für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$x = \frac{(2z)^2 \cdot y}{3} - \frac{(2a)^2 \cdot b}{3}$$

oder

1) . . . $x = \frac{4}{3}(z^2 y - a^2 b)$

Zur Bestimmung der noch unbekannten Grössen:

a) . . . $z = nm$ (bezw. $= mo$)

und

b) . . . $y = sm$

verfahre man unter Berücksichtigung, dass die Dicke $c$ der Sandsteinbelegung gegeben ist wie folgt:

Fällt man von $m$ den Perpendikel $mp$ auf $ns$, bezw. auf $fi$, so stellt $pq$ die gegebene Dicke $c$ der Sandsteinbelegung dar, es ist also:

c) . . . $pq = c$

Ferner ist nach der Erkl. 374:

d) . . . $iq = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

e) . . . $fq = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

und

f) . . . $mq = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $pms$ und $qmi$ ergibt sich die Proportion:

$$ms : mi = mp : mq$$

und somit erhält man für die Höhe $ms = y$ die Bestimmungsgleichung:

bezw.

$$a^2 = \sqrt{a^2+b^2}\cdot N$$

woraus sich:

$$\text{c)} \ldots N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ergibt.

**Erkl. 376.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Das Quadrat über einer Kathete im rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem Rechteck, gebildet aus der Hypotenuse und der Projektion jener Kathete auf die Hypotenuse."

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.

**Erkl. 377.** Bezeichnet man in dem rechtwinkligen Dreieck $fmi$, siehe Fig. 103, den auf die Hypotenuse gefällten Perpendikel $mq$ mit $P$, die beiden Abschnitte $iq$ und $fq$ auf der Hypotenuse, bezw. mit $M$ und $N$, so hat man nach dem in Erkl. 378 aufgestellten geometrischen Satze die Relation:

$$\text{a)} \ldots P^2 = \overline{mq}^2 = M\cdot N$$

Setzt man für $M$ und $N$ die in die Katheten $a$ und $b$ ausgedrückten Werte, siehe Erkl. 375, so erhält man:

$$P^2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

oder

$$P^2 = \frac{a^2\cdot b^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^2}$$

mithin

$$\text{b)} \ldots P = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

**Erkl. 378.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Das Quadrat über der zur Hypotenuse gehörigen Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck gebildet aus den beiden Abschnitten, in welche diese Höhe die Hypotenuse teilt."

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.

$$2) \;.\; y:b = \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+c\right):\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $pmn$ und $qmf$ ergibt sich weiter die Proportion:

$$mn:mf = mp:mq$$

und somit erhält man für die halbe Grundkante $mn = \frac{no}{2} = z$ die Bestimmungsgleichung:

$$3) \;.\; z:a = \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+c\right):\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Aus der Gleichung 2) ergibt sich:

$$y = \left(\frac{ab^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+bc\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

$$y = b+\frac{c}{a}\sqrt{a^2+b^2}$$

oder

$$4) \ldots y = \frac{ab+c\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Aus der Gleichung 3) ergibt sich:

$$z = \left(\frac{a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}+ac\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

$$z = a+\frac{c}{b}\sqrt{a^2+b^2}$$

oder

$$5) \ldots z = \frac{ab+c\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

In Rücksicht der für $z$ und $y$ gefundenen Werte geht die Gleichung 1) nunmehr über in:

$$6) \ldots x = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{ab+c\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)^2\cdot\frac{ab+c\sqrt{a^2+b^2}}{a}-a^2b\right]$$

Diese Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x = \frac{4}{3}\left(\frac{(ab+c\sqrt{a^2+b^2})^2\cdot(ab+c\sqrt{a^2+b^2})}{ab^2}-a^2b\right)$$

$$x = \frac{4}{3}\cdot\frac{(ab+c\sqrt{a^2+b^2})^3-a^3b^3}{ab^2}$$

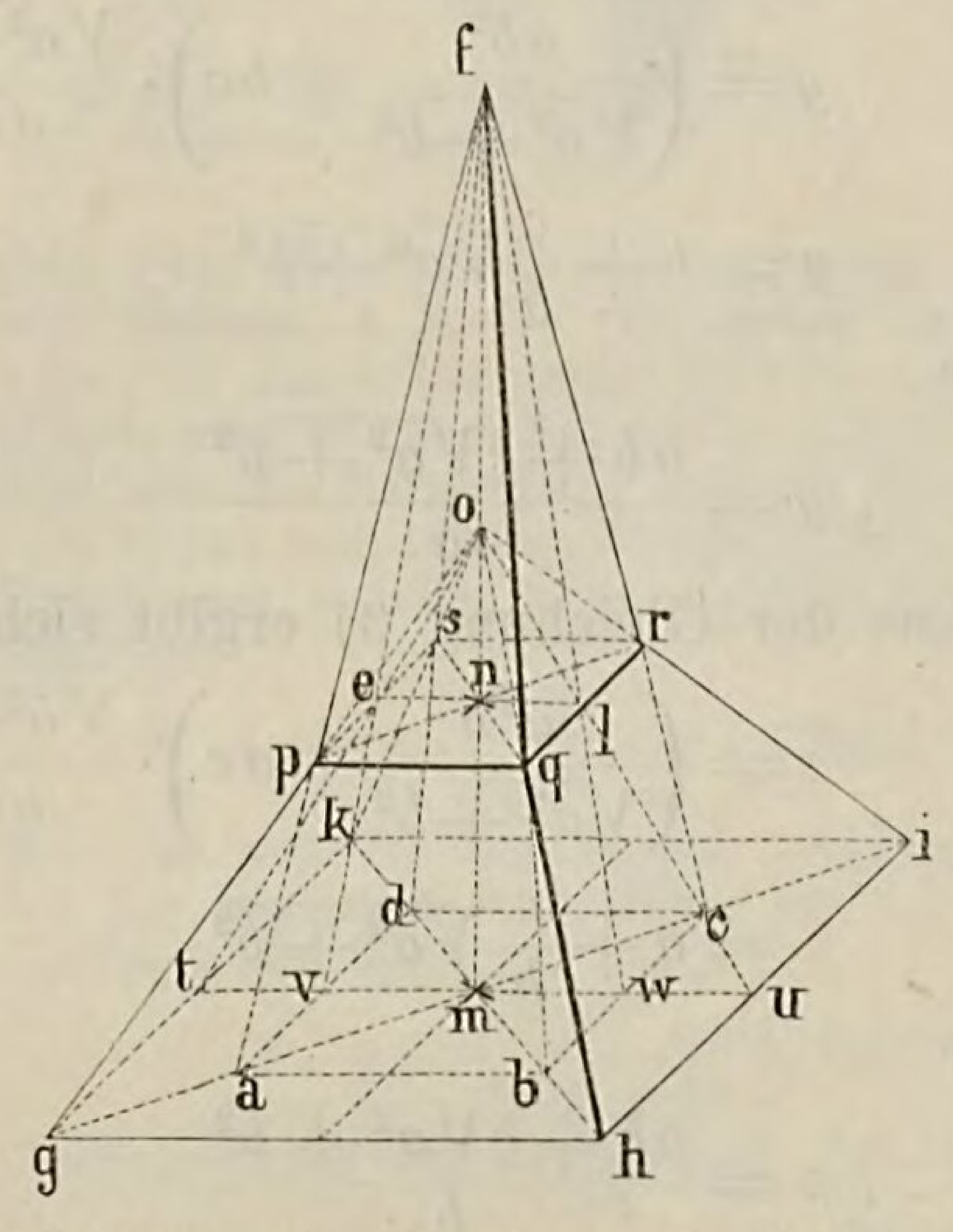
oder

$$\text{A)} \ldots x = \frac{4}{3ab^2}\left((ab+c\sqrt{a^2+b^2})^3-(ab)^3\right)$$

**Aufgabe 464.** Zwei gerade Pyramiden von gleichem Kubikinhalt haben zu Grundflächen Quadrate, deren Seiten bezw. einander parallel sind, und von welchen das eine einem Kreise, dessen Radius $R$ gegeben ist, einbeschrieben, das andre demselben Kreise umschrieben ist.

Wie gross ist die Höhe der zweiten jener Pyramiden, wenn die Höhe der erstren mit $H$ gegeben ist und welches ist das Volumen des beiden Körpern gemeinsamen Raumes?

Figur 104.




**Erkl. 379.** Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit $R$, so hat man für die Seite $s_4$ des demselben einbeschriebenen regulären Vierecks (d. i. ein Quadrat):

$$1) \ldots s_4 = R\sqrt{2}$$

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.

**Erkl. 380.** Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit $r$, so hat man für die Seite $S_4$ des demselben umschriebenen regulären Vierecks (d. i. ein Quadrat):

$$1) \ldots S_4 = 2r$$

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.

**Formeln:**

Für eine Pyramide:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28)}$$

Für einen Pyramidenstumpf:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

(s. Erkl. 31).

**Auflösung.** Da beide gedachte Pyramiden gleiches Volumen haben sollen, die eine aber eine kleinere Grundfläche als die andre haben soll, so muss erstre eine grössere Höhe als letztere haben, Fig. 104 stellt hiernach die beiden gedachten Pyramiden in parallelperspektivischer Ansicht dar.

Zur Berechnung der gesuchten Höhe $x$ ($= om$) der zweiten jener der Pyramiden drücke man zunächst die Grundkanten beider Pyramiden in dem Radius $R$ des gegebenen Kreises aus..

Nach der Erkl. 379 hat man für eine Seite des dem gegebenen Kreise einbeschriebenen Quadrats $abcd$, bezw. für die Grundkante $K$ der ersten Pyramide $abcdf$:

$$a) \ldots K = R\sqrt{2}$$

ferner hat man nach der Erkl. 380 für eine Seite des dem gegebenen Kreise umschriebenen Quadrats $ghik$, bezw. für die Grundkante $K_1$ der zweiten Pyramide $ghiko$:

$$b) \ldots K_1 = 2R$$

Da nun der Aufgabe gemäss die Volumina beider Pyramiden einander gleich sein sollen, so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formel I. für die gesuchte Höhe $x$ ($= om$) die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots \frac{(2R)^2 \cdot x}{3} = \frac{(R\sqrt{2})^2 \cdot H}{3}$$

und hieraus findet man $x$ der Reihe nach wie folgt:

$$4R^2 \cdot x = R^2 \cdot 2 \cdot H$$
$$2x = H$$

oder

$$A) \ldots x = \frac{H}{2}$$

d. h. die gesuchte Höhe $x$ der zweiten Pyramide ist halb so gross als die gegebene Höhe $H$ der ersten Pyramide.

Zur Berechnung des gesuchten Kubikinhalts $V$ des Raumes, welchen beide Körper gemeinsam haben, beachte man, dass derselbe aus dem quadratischen Pyramidenstumpf $abcdspqr$ und der quadratischen Pyramide $pqrso$ besteht, dass man also nach den vorstehenden Formeln 1) und 2), wenn man die noch unbekannte Seite des Quadrats $pqrs$ mit $2y$, die noch unbekannte Höhe $no$ mit $z$ bezeichnet und die Höhe $mn$ des erwähnten Pyramidenstumpfs

$$= mo - no = x - z = \frac{H}{2}$$

setzt, die Beziehung:

$$2) \ldots V = \frac{(2\cdot y)^2 \cdot z}{3} + \frac{\frac{H}{2} - z}{3}\left[(R\sqrt{2})^2 + \sqrt{(R\sqrt{2})^2 \cdot (2y)^2} + (2y)^2\right]$$

oder nach der Erkl. 381 die Beziehung:

$$3) \ldots V = \frac{1}{3}\left[4y^2 z + (H - 2z)(R^2 + Ry\sqrt{2} + 2y^2)\right] \text{ hat.}$$

**Erkl. 381.** Nebenstehende Gleichung 2) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V = \frac{1}{3}\left[4y^2\cdot z + \left(\frac{H}{2} - z\right)(2R^2 + \sqrt{2R^2\cdot 4y^2} + 4y^2)\right]$$

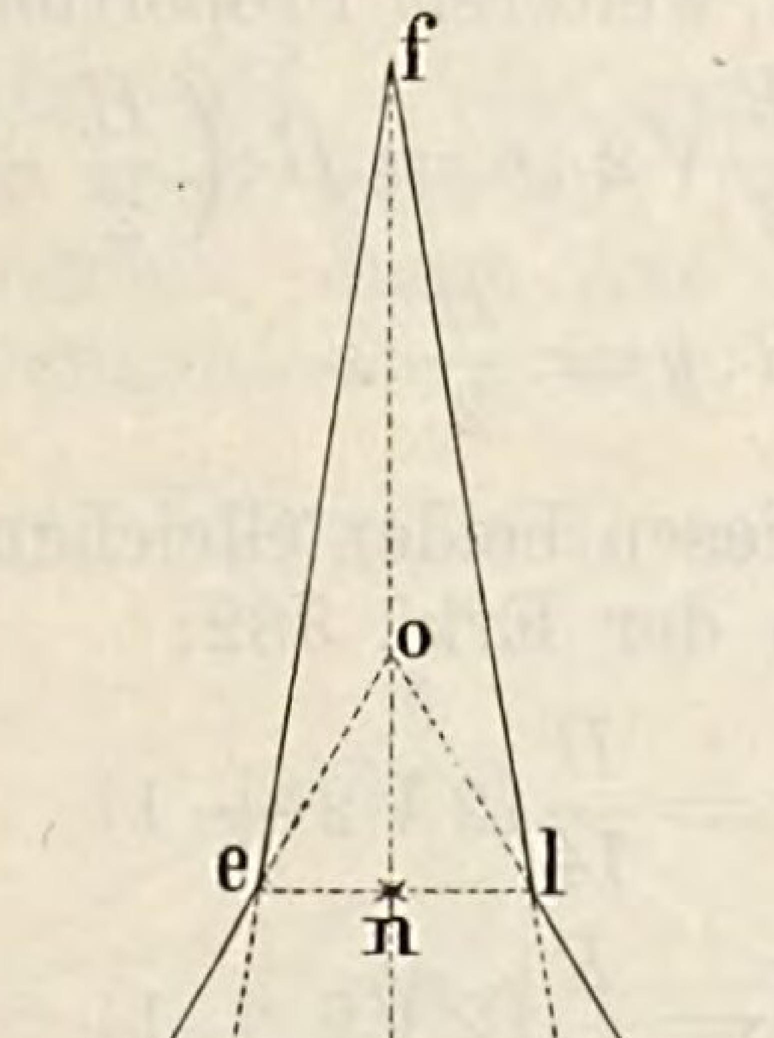
$$V = \frac{1}{3}\left[4y^2\cdot z + \frac{H-2z}{2}\cdot(2R^2 + 2R\cdot y\sqrt{2} + 4y^2)\right]$$

oder

$$V = \frac{1}{3}\left[4y^2 z + (H - 2z)(R^2 + R\cdot y\sqrt{2+2y^2})\right]$$

Zur Bestimmung der unbekannten Strecken $y$ und $z$ denke man sich nunmehr durch die Axen (Höhen) beider Pyramiden eine Ebene gelegt, welche parallel zweier Grundkanten ($gh$ und $ik$, bezw. $ab$ und $cd$) einer der Pyramiden ist, wonach man die durch die Fig. 105 dargestellte Schnittfigur erhält. In dieser Schnittfigur ist:

Figur 105.




$tu = K_1 = 2R$, nämlich gleich der Grundkante der Pyramide $ghiko$ in Fig. 104

also:

$$c) \ldots tm = \frac{tu}{2} = \frac{K_1}{2} = \frac{2R}{2} = R$$

dann ist:

$vw = K = R\sqrt{2}$, nämlich gleich der Grundkante der Pyramide $abcdf$ in Fig. 104

also:

$$d) \ldots vm = \frac{vw}{2} = \frac{K}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

ferner ist:

$el = 2y$, nämlich gleich der noch unbekannten, mit $2y$ bezeichneten, Seite der quadratischen Schnittfigur $pqrs$ nach welcher sich beide Pyramiden durchschneiden, siehe Fig. 104

also:

**Erkl. 382.** Bei nebenstehenden Gleichungen

$$4) \ldots \frac{R}{2}\sqrt{2} : y = H : \left(\frac{H}{2} + z\right)$$

$$5) \ldots R : y = \frac{H}{2} : z$$

kann man wie folgt nach $y$ und $z$ auflösen:

Aus Gleichung 5) erhält man:

$$a) \ldots y = \frac{2 \cdot R \cdot z}{H}$$

Diesen Wert in Gleich. 4) substituiert, gibt:

$$\frac{R}{2}\sqrt{2} : \frac{2R \cdot z}{H} = H : \left(\frac{H}{2} + z\right)$$

und hieraus findet man $z$ der Reihe nach wie folgt:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2z}{H} = H : \left(\frac{H}{2} + z\right)$$

$$\frac{H}{2}\sqrt{2} : 2z = H : \left(\frac{H}{2} + z\right)$$

$$\frac{H}{2}\sqrt{2}\left(\frac{H}{2} + z\right) = 2zH$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{H}{2} + z\right) = 2z$$

$$\frac{H\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z = 2z$$

$$2z - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z = \frac{H\sqrt{2}}{4}$$

$$z\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{H\sqrt{2}}{4}$$

$$z = \frac{H\sqrt{2}}{4\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{H\sqrt{2}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$z = \frac{H\left(2\sqrt{2} + \frac{2}{2}\right)}{4\left[2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]} = \frac{H(2\sqrt{2} + 1)}{4\left(4 - \frac{2}{4}\right)}$$

$$z = \frac{H(2\sqrt{2} + 1)}{16 - 2}$$

oder

$$b) \ldots z = \frac{H}{14}(2\sqrt{2} + 1)$$

Diesen Wert in Gleich. a) substituiert, gibt:

$$y = \frac{2R}{H} \cdot \frac{H}{14}(2\sqrt{2} + 1)$$

oder

$$c) \ldots y = \frac{R}{7}(2\sqrt{2} + 1)$$

$$e) \ldots en = \frac{el}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

schliesslich ist:

f) . . . $mf = H$, nämlich gleich der gegebenen Höhe $H$ der Pyramide *abcdf* in Fig. 104

endlich ist:

g) . . . $mo = x = \frac{H}{2}$, nämlich gleich der vorhin gefund. Höhe der Pyramide *ghiko* in Fig. 104

und

h) . . . $no = z$, nämlich gleich der noch unbekannten Höhe der quadratischen Pyramide *pqrso* in Fig. 104.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *vmf* und *enf* und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *tmo* und *eno* in Fig. 105 erhält man bezw. die Proportionen:

$$i) \ldots vm : en = mf : nf$$

$$k) \ldots tm : en = mo : no$$

oder, wenn man die für $vm$, $en$, $mf$, $tm$, $mo$ mittels der Gleichungen e) bis h) ausgedrückten Werte berücksichtigt und wenn man:

$$l) \ldots nf = of + no = om + no = = x + z = \frac{H}{2} + z$$

setzt, die weiteren Proportionen:

$$4) \ldots \frac{R}{2}\sqrt{2} : y = H : \left(\frac{H}{2} + z\right)$$

$$5) \ldots R : y = \frac{H}{2} : z$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach der Erkl. 382:

$$6) \ldots z = \frac{H}{14}(2\sqrt{2} + 1)$$

$$7) \ldots y = \frac{R}{7}(2\sqrt{2} + 1)$$

Aus den Gleichungen 3), 6) und 7) erhält man also:

$$8) \ldots V = \frac{1}{3}\left[4 \cdot \left(\frac{R}{7}(2\sqrt{2} + 1)\right)^2 \cdot \frac{H}{14}(2\sqrt{2} + 1) + \left(H - 2 \cdot \frac{H}{14}(2\sqrt{2} + 1)\right) \cdot \left(R^2 + R\sqrt{2} \cdot \frac{R}{7}(2\sqrt{2} + 1) + 2 \cdot \left[\frac{R}{7}(2\sqrt{2} + 1)\right]^2\right)\right]$$

Die rechte Seite dieser Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V=\frac{1}{3}\left[\frac{4R^2H}{49\cdot 14}(2\sqrt{2}+1)^3+H\left(1-\frac{1}{7}(2\sqrt{2}+1)\right)\left(R^2+R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{7}(2\sqrt{2}+1)+\frac{2R^2}{49}(2\sqrt{2}+1)^2\right)\right]$$

$$V=\frac{1}{3}\left[\frac{2R^2H}{49\cdot 7}(2\sqrt{2}+1)^3+\frac{H\cdot R^2}{7}(7-2\sqrt{2}-1)\left(1+\frac{1}{7}[2(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}]+\frac{2}{49}(2\sqrt{2}+1)^2\right)\right]$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{R^2\cdot H}{7}\cdot\left[\frac{2}{49}(2\sqrt{2}+1)^3+\frac{1}{49}(6-2\sqrt{2})[49+7(8+\sqrt{2})+2(2\sqrt{2}+1)^2]\right]$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{R^2\cdot H}{7}\cdot\frac{1}{49}\cdot\left[2[8(\sqrt{2})^3+3\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot 1+3\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1^2+1^3]+2(3-\sqrt{2})[49+28+7\sqrt{2}+2(4(\sqrt{2})^2+2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1+1^2)]\right]$$

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{R^2\cdot H}{7\cdot 49}\left[16\sqrt{2}+24+6\sqrt{2}+1+(3-\sqrt{2})[49+28+7\sqrt{2}+2(8+4\sqrt{2}+1)]\right]$$

$$V=\frac{2R^2\cdot H}{3\cdot 7\cdot 49}\left[22\sqrt{2}+25+(3-\sqrt{2})(77+7\sqrt{2}+18+8\sqrt{2})\right]$$

$$V=\frac{2R^2\cdot H}{3\cdot 7\cdot 49}\left[22\sqrt{2}+25+(3-\sqrt{2})(95+15\sqrt{2})\right]$$

$$V=\frac{2R^2H}{3\cdot 7\cdot 49}\left[22\sqrt{2}+25+285-95\sqrt{2}+45\sqrt{2}-30\right]$$

$$V=\frac{2R^2H}{3\cdot 7\cdot 49}\cdot\left[280-28\sqrt{2}\right]$$

$$V=\frac{2R^2H}{3\cdot 7\cdot 49}\cdot 7\left[40-4\sqrt{2}\right]$$

$$V=\frac{2R^2H}{3\cdot 49}\cdot 4\left[10-\sqrt{2}\right]$$

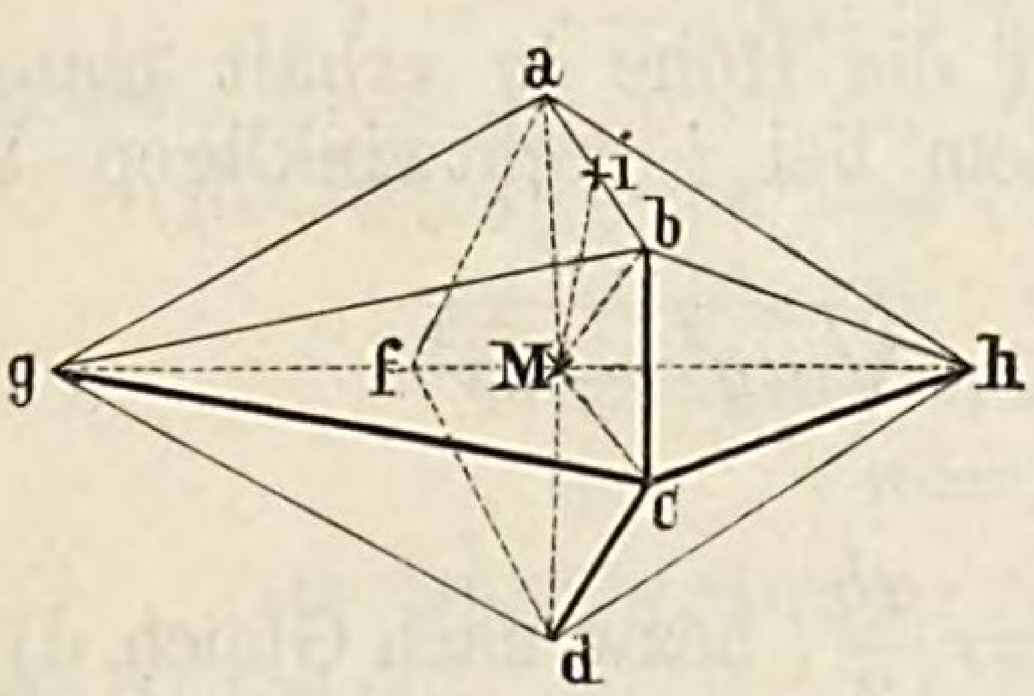
mithin:

$$\text{B)}\;\ldots\; V=\frac{8}{147}\cdot R^2H\cdot(10-\sqrt{2})$$

---

**Aufgabe 465.** Wie gross ist die Oberfläche einer geraden, fünfseitigen Doppelpyramide, deren Axe $= m$ und deren Seitenkante $= n$ ist?

Figur 106.




**Formel:**

$$V=\frac{G\cdot H}{3}\text{ (s. Erkl. 28).}$$

**Auflösung.** Die gesuchte Oberfläche $O$ der fünfseitigen Doppelpyramide, siehe Fig. 106, besteht aus der Summe der Inhalte der die Doppelpyramide begrenzenden zehn kongruenten, gleichschenkligen Dreiecke. Der Inhalt eines dieser Dreiecke, z. B. das Dreieck $abg$ ist $=\frac{ab\cdot ig}{2}$, somit besteht für die gesuchte Oberfläche $O$ die Relation:

$$O=10\cdot\frac{ab\cdot ig}{2}$$

oder

$$1)\;\ldots\; O=5\cdot ab\cdot ig$$

Da nun weder $ab$ noch $ig$ gegeben

ist, so muss man diese Strecken zunächst in die gegebenen Dimensionen:

a) . . . $gM = \frac{gh}{2} = \frac{m}{2}$

und

2) . . . $ag = bg = n$

ausdrücken, was wie folgt geschehen kann:

Bezeichnet man $aM$, d. i. der Radius des dem regulären Fünfeck $abcdf$ umschriebenen Kreises mit $R_5$ und berücksichtigt man, dass das Dreieck $gMa$ ein bei $M$ rechtwinkliges ist, so erhält man für diesen Radius $aM (= R_5)$:

$$aM = R_5 = \sqrt{\overline{ag}^2 - \overline{gM}^2}$$

oder

$$aM = R_5 = \sqrt{n^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4n^2 - m^2}{4}}$$

$$\text{c) . . . } aM = R_5 = \frac{1}{2}\sqrt{4n^2 - m^2}$$

Da nun nach der Erkl. 383 zwischen der Seite $s_5$ eines regulären Fünfecks und dem Radius $R_5$ des demselben umschriebenen Kreises, die Relation besteht:

$$s_5 = \frac{R_5}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

so erhält man für die Kante $ab$, siehe Fig. 106 und in Rücksicht der Gleichung c) die Relation:

$$ab = s_5 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4n^2 - m^2}}{2} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

oder

$$\text{d) . } ab = \frac{1}{4}\sqrt{(4n^2 - m^2)(10 - 2\sqrt{5})}$$

Für die Höhe $ig$ erhält man ferner aus dem bei $i$ rechtwinkligen Dreieck $gia$:

$$ig = \sqrt{\overline{ag}^2 - \overline{ai}^2}$$

oder, da $ag = n$

und $ai = \frac{ab}{2}$, bezw. nach Gleich. d)

$$= \frac{1}{8}\sqrt{(4n^2 - m^2)(10 - 2\sqrt{5})} \text{ ist:}$$

$$ig = \sqrt{n^2 - \frac{1}{64}(4n^2 - m^2)(10 - 2\sqrt{5})}$$

**Erkl. 383.** Zwischen der Seite $s_5$ eines regulären Fünfecks und dem Radius $R_5$ des demselben umschriebenen Kreises besteht die Relation:

$$s_5 = \frac{R_5}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Vergleiche hiermit die Erkl. 257.

**Erkl. 384.** Den Ausdruck:

$$\sqrt{n^2 - \frac{1}{64}(4n^2 - m^2)(10 - 2\sqrt{5})}$$

kann man wie folgt noch reduzieren:

$$\sqrt{\frac{64n^2 - (4n^2 - m^2)(10 - 2\sqrt{5})}{64}}$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{64n^2 - (40n^2 - 10m^2 - 8n^2\sqrt{5} + 2m^2\sqrt{5})}$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{24n^2 + 10m^2 + 8n^2\sqrt{5} - 2m^2\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{8n^2(3 + \sqrt{5}) + 2m^2(5 - \sqrt{5})}$$

oder nach der Erkl. 384:

$$\text{e)} \; \ldots \; ig = \frac{1}{8}\sqrt{8n^2(3+\sqrt{5})+2m^2(5-\sqrt{5})}$$

Aus den Gleichungen 1), d) und e) erhält man für $O$ die Bestimmungsgleichung:

$$\text{2)} \; . \; . \; O = 5 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{(4n^2-m^2)(10-2\sqrt{5})} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{8n^2(3+\sqrt{5})+2m^2(5-\sqrt{5})}$$

Reduziert man die rechte Seite dieser Gleichung, so erhält man der Reihe nach:

$$O = \frac{5}{32} \cdot \sqrt{(4n^2-m^2)(10-2\sqrt{5}) \cdot \left(8n^2(3+\sqrt{5})+2m^2(5-\sqrt{5})\right)}$$

$$O = \frac{5}{32} \cdot \sqrt{(4n^2-m^2) \cdot \left(8n^2(3+\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})+2m^2(5-\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})\right)}$$

$$O = \frac{5}{32} \cdot \sqrt{(4n^2-m^2) \cdot \left(8n^2 \cdot 4(5+\sqrt{5})+2m^2 \cdot 20(3-\sqrt{5})\right)} \quad \text{(s. Erkl. 385 und 386)}$$

$$O = \frac{5}{32}\sqrt{(4n^2-m^2) \cdot \left(32n^2(5+\sqrt{5})+40m^2(3-\sqrt{5})\right)}$$

$$O = \frac{5}{32}\sqrt{(4n^2-m^2) \cdot 4 \cdot \left(8n^2(5+\sqrt{5})+10m^2(3-\sqrt{5})\right)}$$

$$O = \frac{5 \cdot 2}{32}\sqrt{32n^4(5+\sqrt{5})-8m^2n^2(5+\sqrt{5})+40m^2n^2(3-\sqrt{5})-10m^4(3-\sqrt{5})}$$

$$O = \frac{5}{16}\sqrt{32n^4(5+\sqrt{5})-8m^2n^2(5+\sqrt{5}-15+5\sqrt{5})-10m^4(3-\sqrt{5})}$$

$$O = \frac{5}{16}\sqrt{32n^4(5+\sqrt{5})-8m^2n^2(-10+6\sqrt{5})-10m^4(3-\sqrt{5})}$$

oder

$$O = \frac{5}{16}\sqrt{2\left(16n^4(5+\sqrt{5})+8m^2n^2(5-3\sqrt{5})-5m^4(3-\sqrt{5})\right)}$$

**Erkl. 385.**

$$(3+\sqrt{5})(10-2\sqrt{5}) = 30+10\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10$$
$$= 20+4\sqrt{5}$$
$$= 4(5+\sqrt{5})$$

**Erkl. 386.**

$$(5-\sqrt{5}) \cdot (10-2\sqrt{5}) = 50-10\sqrt{5}-10\sqrt{5}+10$$
$$= 60-20\sqrt{5}$$
$$= 20(3-\sqrt{5})$$

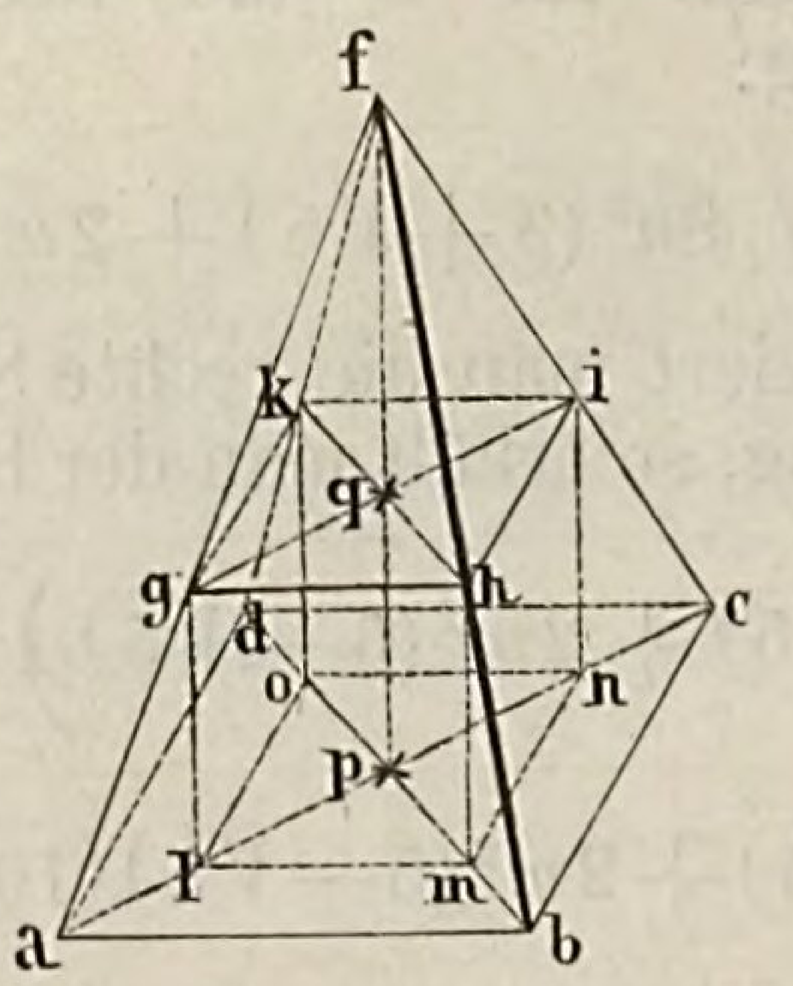
---

## 3. Die Pyramide in Verbindung mit dem Prisma.

**Aufgabe 466.** Eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis habe die Grundkante $A$ und die Höhe $H$; in dasselbe sei ein Würfel so gestellt, dass vier Ecken desselben in der Grundfläche, die vier andern Ecken in den

Seitenkanten der Pyramide liegen. Man soll die Kante des Würfels berechnen.

Figur 107.




**Erkl. 387.** Eine Gleichung bleibt unverändert, wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht.

**Auflösung.** Stellt *lmnokghi*, siehe Figur 107, den in die Pyramide *fabcd* konstruiert gedachten Würfel dar, und berücksichtigt man, dass die Würfelfläche *ghik* parallel der Pyramidengrundfläche *abcd* sein muss, so hat man zur Bestimmung der gesuchten Kante $x$ des Würfels, nach der Erkl. 95 die Relation:

$$abcd : ghik = \overline{pf}^2 : \overline{qf}^2$$

bezw., wenn man berücksichtigt, dass

a) . . . $abcd = A^2$

b) . . . $ghik = x^2$

c) . . . $pf = H$ und

d) . . . $qf = pf - pq = H - x$

ist, für $x$ die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $A^2 : x^2 = H^2 : (H - x)^2$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$A : x = H : (H - x)$ (s. Erkl. 387)

$A \cdot H - Ax = H \cdot x$

oder

$A \cdot H = x(A + H)$

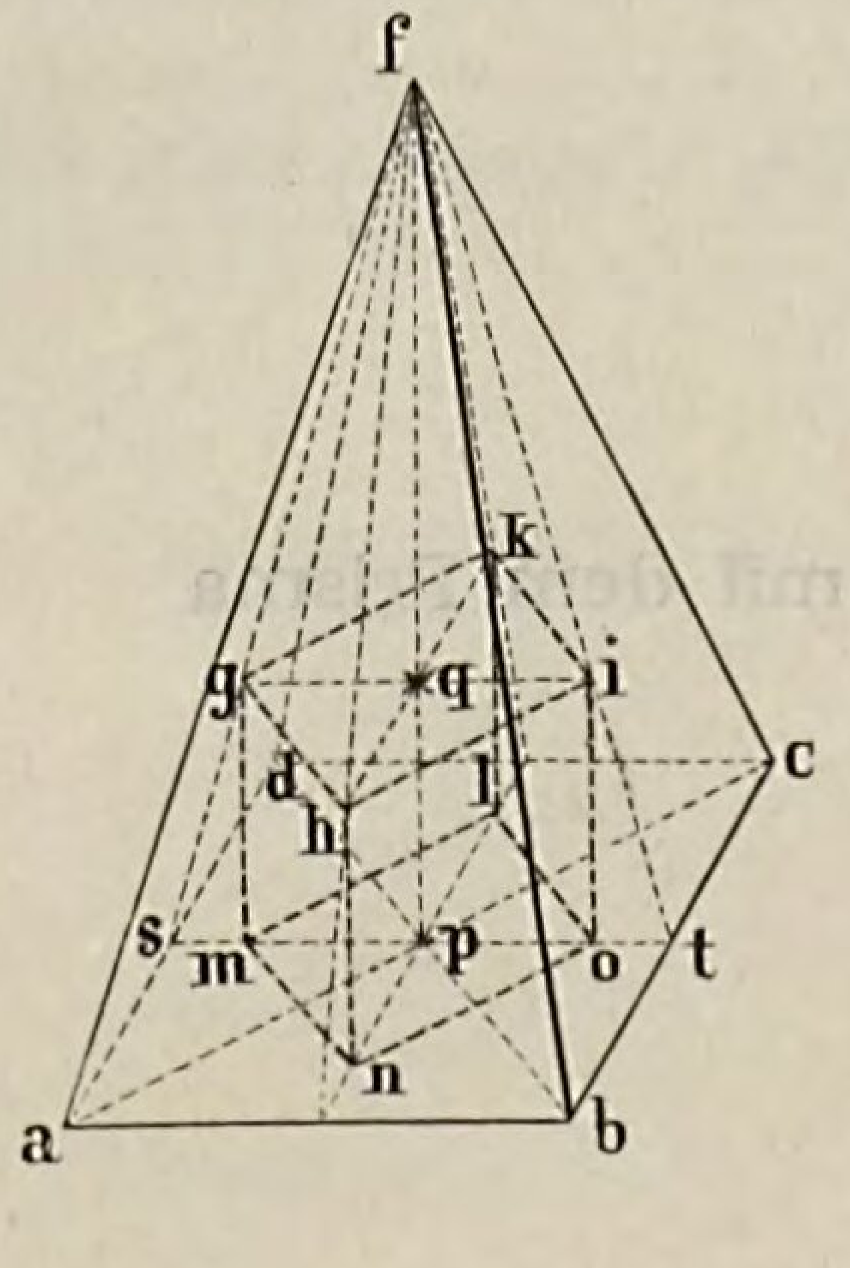
mithin ist die gesuchte Würfelkante:

$$x = \frac{A \cdot H}{A + H}$$

---

**Aufgabe 467.** Eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis habe die Grundkante $A$ und die Höhe $H$; in dieselbe sei ein Würfel so gestellt, dass vier Eckpunkte desselben in der Grundfläche der Pyramide, die vier andern Eckpunkte in den Höhen der Seitenflächen liegen. Wie gross ist die Kante des Würfels?

Figur 108.




**Auflösung.** Stellt *lmnoikgh*, siehe Fig. 108, den in die Pyramide *fabcd* konstruiert gedachten Würfel dar und berücksichtigt man, dass die Dreiecke *fps* und *fqg* ähnlich sind, so hat man zur Bestimmung der gesuchten Kante $x$ des Würfels die Relation:

$$fp : sp = fq : gq$$

bezw., wenn man berücksichtigt, dass

a) . . $fp = H$

b) . . $sp = \frac{st}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{A}{2}$

c) . . $fq = fp - qp = H - x$ und

d) . . $gq = gi = \sqrt{\overline{gh}^2 + \overline{ih}^2}$

$= \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

ist, für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots H:\frac{A}{2} = (H-x):x\sqrt{2}$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$H \cdot x\sqrt{2} = \frac{A \cdot H}{2} - \frac{A \cdot x}{2}$$

$$Hx\sqrt{2} + \frac{A \cdot x}{2} = \frac{A \cdot H}{2}$$

$$x\left(H\sqrt{2} + \frac{A}{2}\right) = \frac{A \cdot H}{2}$$

$$x \cdot \frac{2H\sqrt{2} + A}{2} = \frac{A \cdot H}{2}$$

Die gesuchte Würfelkante ist also:

$$x = \frac{A \cdot H}{H \cdot \sqrt{2} + A}$$

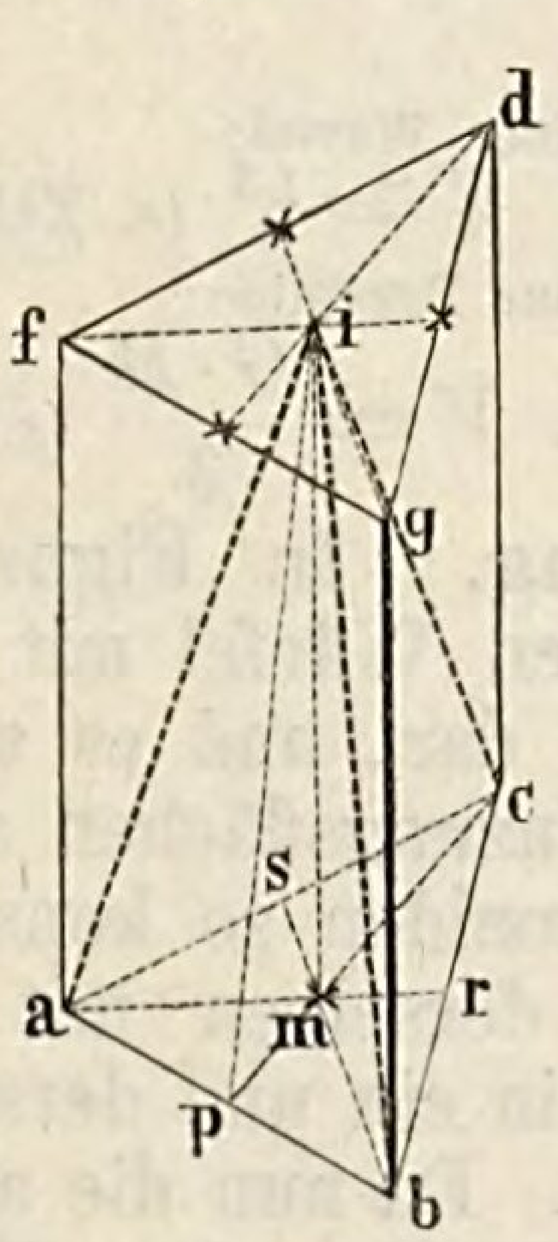
oder

$$x = \frac{AH}{A + H\sqrt{2}}$$

---

**Aufgabe 468.** Von einem regulären Polygon kennt man den Radius $r$ des demselben einbeschriebenen Kreises; über diesem Polygon sollen ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide beide von gleicher Höhe so konstruiert werden, dass eine Seitenfläche des Prisma $n$ mal so gross werde als eine Seitenfläche der Pyramide. Wie gross muss demnach die gemeinschaftliche Höhe beider Körper gemacht werden?

Figur 109.




**Auflösung.** Stellt $abc$, s. Fig. 109, ein beliebiges, reguläres Polygon dar, von welchem man den Radius $r = mp = mr = ms$ des demselben einbeschriebenen Kreises kennt, und ist $abcdfg$ ein über dasselbe konstruiertes gerades Prisma, $iabc$ eine ebenso konstruierte gerade Pyramide, welche mit jenem Prisma die gleiche Höhe $im$ hat, so besteht gemäss der Aufgabe in bezug auf den Inhalt zweier Seitenflächen jener Körper, z. B. der Flächen $abi$ und $abgf$ in Fig. 109, die Relation:

$$ab \cdot bg = n \cdot \frac{ab \cdot pi}{2}$$

oder, beiderseits mit der Strecke $ab$ dividiert:

$$a) \ldots bg = n \cdot \frac{pi}{2}$$

und diese Relation muss man zur Bestimmung der gesuchten Höhe $im = x$ benutzen.

Aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $imp$ erhält man nämlich.

b) . . . $im = \sqrt{\overline{ip}^2 - \overline{mp}^2}$

bezw., da:

c) . . . $im = x$

d) . . . $mp = r$, nämlich gleich dem gegebenen Radius $r$,

und, wie sich aus der Gleichung a) ergibt:

e) . . . $ip = \frac{2}{n} \cdot bg = \frac{2}{n} \cdot im = \frac{2}{n} \cdot x$

gesetzt werden kann, für $x$ die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $x = \sqrt{\left(\frac{2}{n} \cdot x\right)^2 - r^2}$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x^2 = \frac{4}{n^2} \cdot x^2 - r^2$$

$$r^2 = \frac{4}{n^2} x^2 - x^2$$

$$r^2 = \left(\frac{4}{n^2} - 1\right) \cdot x^2$$

$$r^2 = \frac{4 - n^2}{n^2} \cdot x^2$$

$$x^2 = \frac{n^2 \cdot r^2}{4 - n^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{n^2 r^2}{4 - n^2}}$$

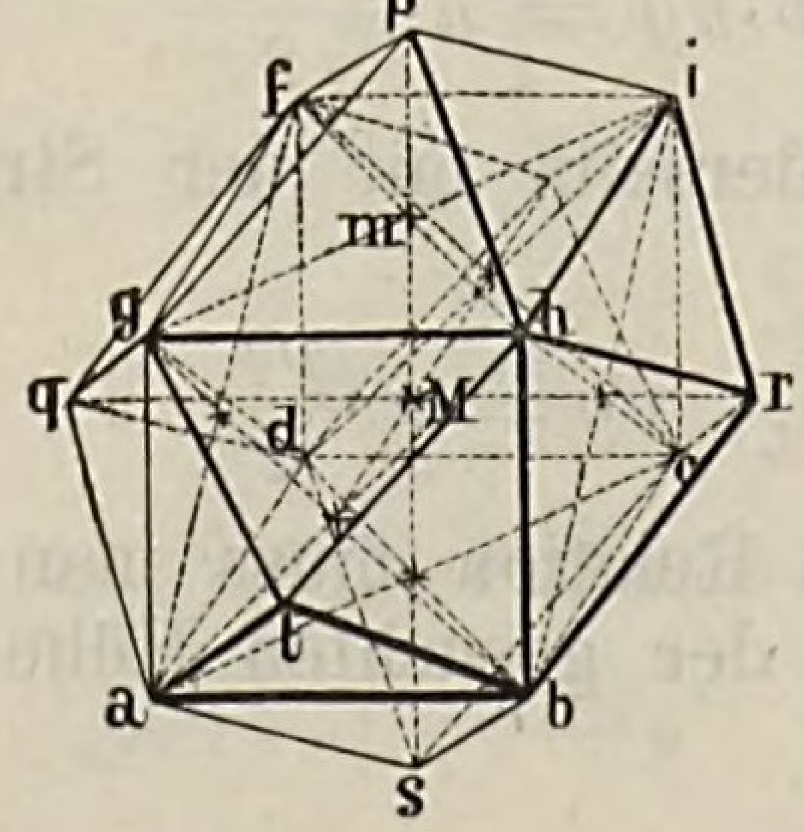
Die gesuchte Höhe ist also:

$$x = \frac{n r}{\sqrt{4 - n^2}}$$

---

**Aufgabe 469.** Auf jeder Seitenfläche eines Würfels mit der Kante $k$ ist eine gerade Pyramide aufgesetzt. Wie gross ist das Volumen des somit gebildeten Körpers, wenn sämtliche Ecken des Körpers in ein und derselben Kugelfläche liegen?

Figur 110.




**Formeln:**

Für einen Würfel:

I. . . . $V = k^3$ (s. Erkl. 73)

Für eine Pyramide:

II. . . . $V = \frac{G \cdot H}{3}$ (s. Erkl. 28).

**Auflösung.** In Figur 110 stelle $abcdfghi$ den Würfel mit der gegebenen Kante $k$ dar, und es seien die auf dessen Begrenzungsflächen aufgesetzten, geraden Pyramiden so konstruiert, dass die Spitzen derselben mit den Ecken des Würfels in ein und derselben Kugelfläche liegen. Da nun die auf den sechs Begrenzungsflächen des Würfels konstruiert gedachten Pyramiden z. B. alle kongruent der Pyramide $pghif$ sind, so hat man unter Benutzung der vor-

stehenden Formeln für das gesuchte Volumen $x$ des durch die Figur 110 dargestellten Körpers, die Beziehung:

$$1) \ldots x = k^3 + 6 \cdot \frac{k^2 \cdot mp}{3}$$

wenn man die Kante des Würfels, bezw. die Seite der quadratischen Grundfläche $ghif$ der Pyramide $pghif$ mit $k$ bezeichnet.

Zur Bestimmung der noch unbekannten Höhe $mp$ der erwähnten Pyramide beachte man, dass gemäss der Aufgabe die Spitze $p$ in der durch die Ecken $a, b, c, d, f, g, h$ und $i$ des Würfels gelegt gedachten Kugelfläche liegen soll, dass also, wenn $M$ den Mittelpunkt der Kugel darstellt:

$$Mp = Ma = Mb = Mc = Md = Mf = Mg = Mh = Mi$$

bezw. = dem Radius $R$ der dem Würfel umschriebenen Kugel sein muss.

Nach der Erkl. 358 ist also:

$$a) \ldots Mp = R = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

Da ferner:

$$b) \ldots mp = Mp - Mm$$

und $Mm$ gleich dem Radius $r$ der dem Würfel einbeschrieben gedachten Kugel, also nach der Erkl. 358:

$$c) \ldots Mm = r = \frac{k}{2}$$

ist, so geht in Rücksicht der Gleich. a) und c) die Gleichung b) über in:

$$mp = \frac{k}{2}\sqrt{3} - \frac{k}{2}$$

und hieraus erhält man für die gesuchte Pyramidenhöhe $mp$:

$$2) \ldots mp = \frac{k}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich sonach:

$$x = k^3 + 6 \cdot \frac{k^2 \cdot \frac{k}{2}(\sqrt{3} - 1)}{3}$$

und hieraus erhält man für das gesuchte Volumen:

$$x = k^3(1 + \sqrt{3} - 1)$$

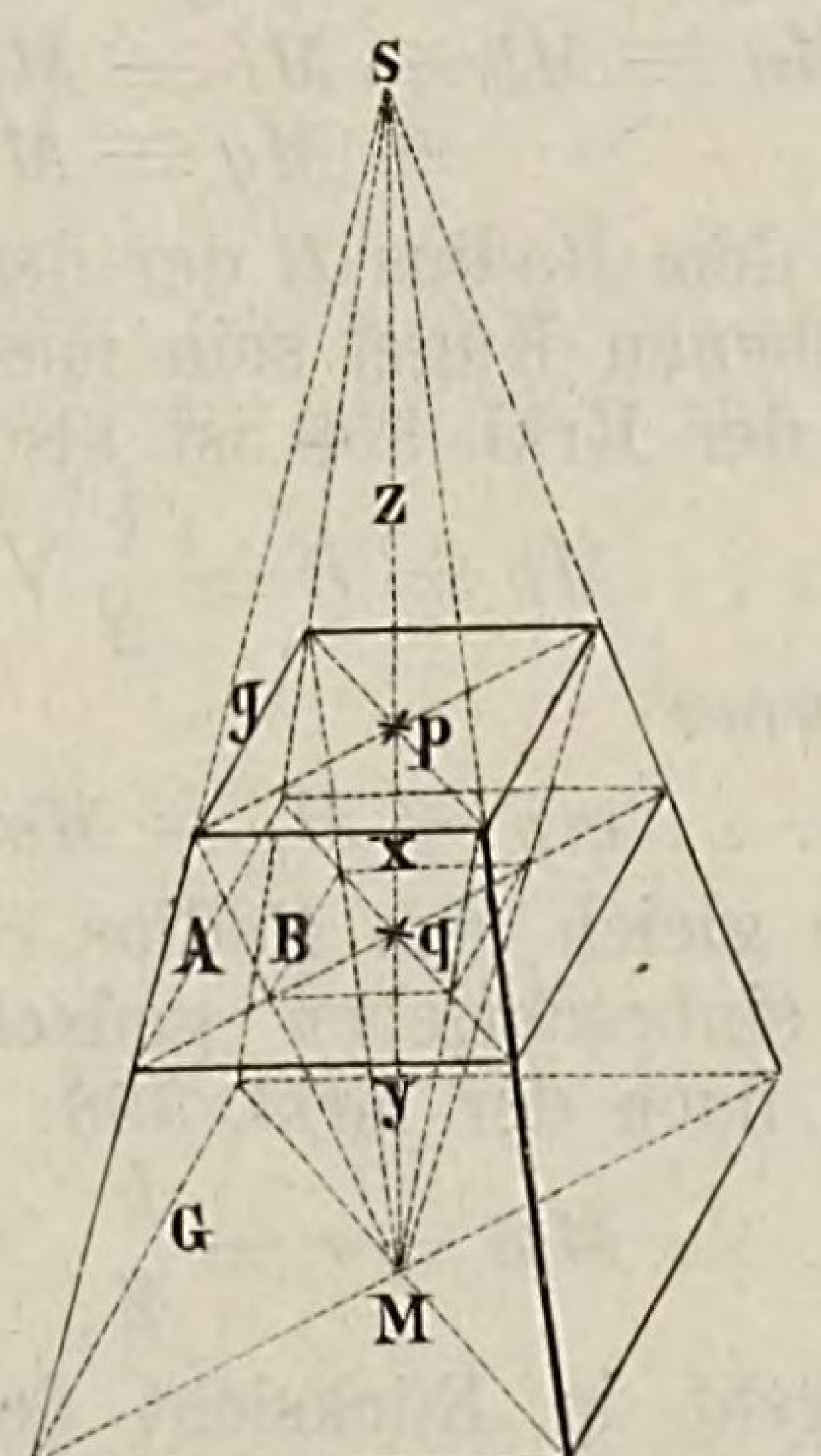
oder

$$x = k^3 \cdot \sqrt{3}$$

### 4. Der Pyramidenstumpf in Verbindung mit der Pyramide.

**Aufgabe 470.** Die Deckfläche eines Pyramidenstumpfs, dessen Grundflächen sich wie $a^2 : b^2$ verhalten, sei zugleich die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze in der Grundfläche des Stumpfes liegt. Parallel zur Grundfläche des Stumpfes soll eine Ebene so gelegt werden, damit die Schnittfigur des Stumpfes zu der Schnittfigur der Pyramide im Verhältnis von $m^2 : n^2$ stehe. In welchem Verhältnis wird die gedachte Schnittebene die gemeinschaftliche Höhe beider Körper teilen?

Figur 111.




**Auflösung.** Bezeichnet man, siehe Fig. 111, den Abstand der durch den Pyramidenstumpf gelegten Schnittebene von der Deckfläche des Stumpfes mit $x$, den Abstand jener Schnittebene von der Grundfläche mit $y$, so hat man der Aufgabe gemäss den Quotienten $\frac{x}{y}$ zu bestimmen.

Bezeichnet man ferner die Grundfläche des Pyramidenstumpfs mit $G$, die Deckfläche desselben mit $g$, die Schnittfigur der gedachten Schnittebene mit diesem Stumpf mit $A$, die Schnittfigur der gedachten Schnittebene mit der Pyramide, welche in dem Stumpf der Aufgabe gemäss konstruiert wurde mit $B$ und die Höhe der Ergänzungspyramide des Stumpfes mit $z$, so hat man, unter Berücksichtigung, dass die Höhe des Stumpfes, bezw. die Höhe der in demselben konstruierten Pyramide $= x + y$ ist und unter Berücksichtigung des in der Erkl. 195 ausgesprochenen Satzes und gemäss der Aufgabe, die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} 1) \ldots \quad \frac{A}{B} &= \frac{m^2}{n^2} \\ 2) \ldots \quad \frac{G}{g} &= \frac{a^2}{b^2} \end{aligned}\right\} \text{(gemäss der Aufgabe)}$$

$$\left.\begin{aligned} 3) \ldots \quad \frac{G}{g} &= \frac{(x+y+z)^2}{z^2} \\ 4) \ldots \quad \frac{g}{B} &= \frac{(x+y)^2}{y^2} \\ 5) \ldots \quad \frac{A}{g} &= \frac{(x+z)^2}{z^2} \end{aligned}\right\} \text{(nach der Erkl. 195)}$$

Aus diesen Relationen muss nunmehr das gesuchte Verhältnis, beziehgsw. der

**Erkl. 388.** a) Da die linken Seiten der umstehenden Gleichungen 2) und 3) gleich sind, so müssen auch die rechten Seiten derselben einander gleich sein.

b) Durch Multiplikation der nebenstehenden Gleichungen 4) und 5) erhält man:

$$\frac{A}{B}=\frac{(x+y)^2\,(x+z)^2}{y^2\cdot z^2}$$

und diese Gleichung kann man, analog wie die Gleichungen 2) und 3) mit der Gleichung 1) verbinden.

**Erkl. 389.** Zieht man aus nebenstehender Gleichung 6) die Quadratwurzel, so erhält man:

$$\frac{x+y+z}{z}=\frac{a}{b}$$

Durch Anwendung des in der Erkl. 390 ausgesprochenen Satzes geht diese Gleichung über in:

$$\frac{x+y+z-z}{a-b}=\frac{z}{b}$$

mithin ist:

$$\frac{x+y}{z}=\frac{a-b}{b}$$

**Erkl. 390.** Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe oder Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses wie ein Paar homologe Glieder“

Hat man die Proportion:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

so ist nach diesem Satze:

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}\text{ oder }=\frac{b}{d}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Proportionen.

Quotient $\frac{x}{y}$ bestimmt werden, was folgendermassen geschehen kann:

Aus den Gleichungen 2) und 3), bezw. aus den Gleichungen 1), 4) und 5) erhält man nach der Erkl. 388:

$$6)\ \dots\ \frac{(x+y+z)^2}{z^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$7)\ \dots\ \frac{(x+y)^2\,(x+y)^2}{y^2\,z^2}=\frac{m^2}{n^2}$$

Zieht man aus beiden Gleichungen die Quadratwurzel und reduziert die sich aus Gleichung 6) hierdurch ergebende neue Gleichung nach der Erkl. 389, so erhält man die neuen Gleichungen:

$$8)\ \dots\ \frac{x+y}{z}=\frac{a-b}{b}$$

$$9)\ \dots\ \frac{x+y}{z}\cdot\frac{x+z}{y}=\frac{m}{n}$$

Setzt man in Gleichung 9) für $\frac{x+y}{z}$ nach der Gleichung 8) den Wert $\frac{a-b}{b}$, so erhält man:

$$\frac{a-b}{b}\cdot\frac{x+z}{y}=\frac{m}{n}$$

oder

$$10)\ \dots\ \frac{x+z}{y}=\frac{mb}{n\,(a-b)}$$

Setzt man ferner den sich aus Gleichung 8) für $z$ ergebenden Wert:

$$z=\frac{b}{a-b}\cdot(x+y)$$

in Gleichung 10), so erhält man ferner:

$$11)\ \dots\ \frac{x+\frac{b}{a-b}\,(x+y)}{y}=\frac{mb}{n\,(a-b)}$$

Diese Gleichung nach dem Bruch $\frac{x}{y}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x}{y}+\frac{b}{a-b}\left(\frac{x}{y}+1\right)=\frac{mb}{n\,(a-b)}$$

$$\frac{x}{y}+\frac{b}{a-b}\cdot\frac{x}{y}+\frac{b}{a-b}=\frac{mb}{n\,(a-b)}$$

$$\frac{x}{y}\left(1+\frac{b}{a-b}\right)=\frac{mb}{n\,(a-b)}-\frac{b}{(a-b)}$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{a-b+b}{a-b} = \frac{mb-nb}{n(a-b)}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{b(m-n) \cdot (a-b)}{n(a-b) \cdot a}$$

Das gesuchte Verhältnis ist hiernach:

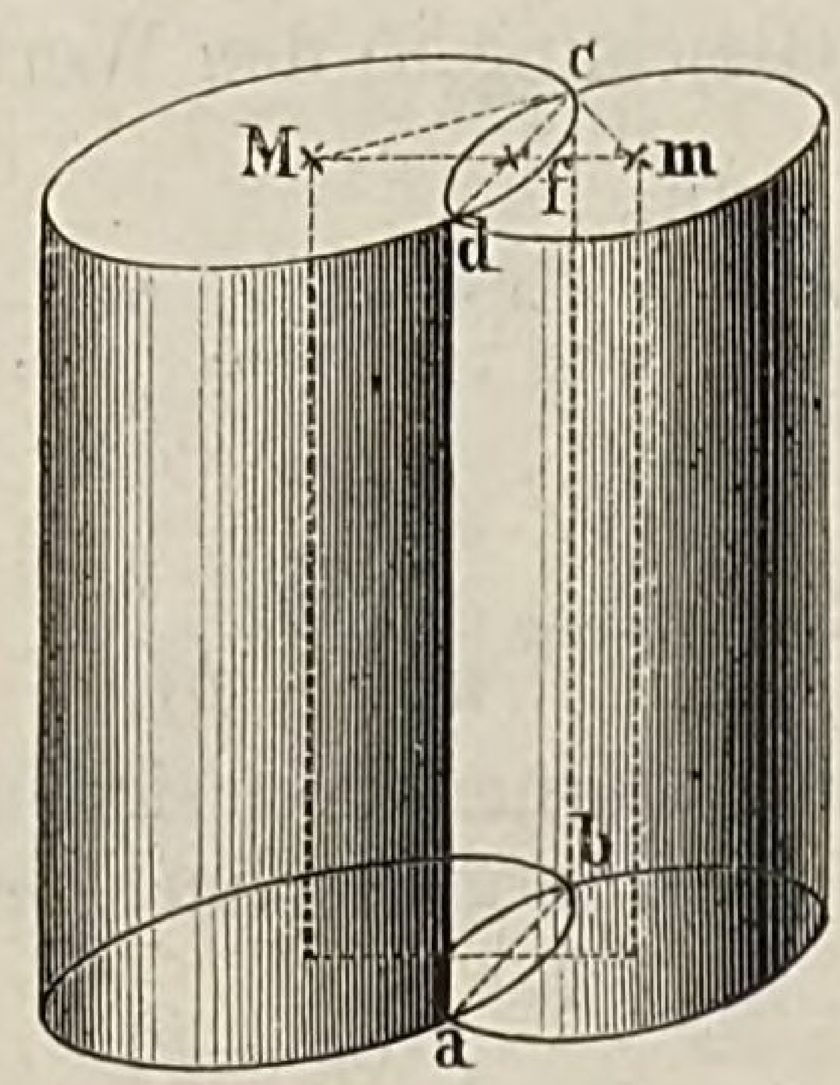
$$\frac{x}{y} = \frac{b(m-n)}{na}$$

---

## 5. Der Cylinder in Verbindung mit dem Cylinder.

**Aufgabe 471.** Zwei gerade Cylinder von gleicher Höhe $H$ haben eine solche Lage zueinander, dass ihre Grundflächen, bezw. in einerlei Ebene liegen und dass sich die Cylinderflächen nach einem Rechtecke durchschneiden. Wie gross ist der Inhalt dieser Schnittfigur, wenn die Radien der Grundflächen der Cylinder bezw. $= R$ und $r$, sowie die Centrallinie je zwei der Grundflächen $= p$ gegeben sind?

Figur 112.




**Erkl. 391.** Bezeichnet man die Grundlinie eines Parallelogramms mit $g$, dessen Höhe mit $h$ (d. i. bei einem Rechteck die andre Seite), so hat man zur Berechnung des Inhalts $J$ des Parallelogramms die Formel:

1) . . . $J = g \cdot h$ Flächeneinheiten.

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie, speziell das Lehrbuch, welches über die Flächeninhaltsabrechnungen handelt.

**Erkl. 392.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Schneiden sich zwei Kreise, so steht die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise senkrecht auf der Centrallinie der Kreise und wird durch diese Centrallinie halbiert.“

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie, speziell das Lehrbuch, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.

**Auflösung.** Stellt, der Aufgabe gemäss, Fig. 112 die sich durchschneidenden Cylinder dar, so ist das Rechteck $abcd$ die Durchschnittsfigur, nach welcher sich die Cylinder gegenseitig durchschneiden und deren Inhalt $x$ gesucht ist.

Nach der Erkl. 391 besteht somit die Relation:

1) . . . $x = ad \cdot dc$

und man hat zunächst die Rechtecksseite $ad$ ($= bc$) und $dc$ ($= ab$) zu bestimmen.

Da die Rechtecksseite $ad$ die gemeinschaftliche Seitenlinie der beiden Cylinder vorstellt, deren Höhen $= H$ sind, so hat man:

2) . . . $ad = H$

Zur Bestimmung der Rechtecksseite $dc = y$ beachte man folgendes:

$dc$ bezw. $y$ ist sowohl Sehne des Kreises um $M$ und auch Sehne des Kreises um $m$, steht somit nach der Erkl. 392 senkrecht auf der Centrallinie $Mm$ dieser beiden Kreise und wird durch diese Centrallinie $Mm$ halbiert. In dem bei $f$ rechtwinkligen Dreieck $Mfc$ besteht die Relation:

$$\overline{cf}^2 = \overline{Mc}^2 - \overline{Mf}^2$$

oder, da

$$cf = \frac{dc}{2} = \frac{y}{2}$$

$Mc = R$, nämlich gleich dem gegebenen Radius $R$

**Erkl. 393.** Bezeichnet man die Radien zweier sich schneidenden Kreise mit $R$ und $r$, ihre Centrallinie mit $c$ und ihre gemeinschaftliche Sehne mit $s$, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

$$s = \frac{1}{c}\sqrt{(R+c+r)(R+c-r)(R-c+r)(-R+c+r)}$$

Vergleiche nebenstehende Gleichung 3) und siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie, speziell das Lehrbuch, welches über die planimetrischen Berechnungen handelt.

**Erkl. 394.** Nebenstehende Gleichung:

$$R^2 - z^2 = r^2 - (p - z)^2$$

nach $z$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$R^2 - z^2 = r^2 - (p^2 - 2pz + z^2)$$

$$R^2 - z^2 = r^2 - p^2 + 2pz - z^2$$

$$R^2 - r^2 + p^2 = 2pz$$

oder

$$z = \frac{R^2 - r^2 + p^2}{2p}$$

**Erkl. 395.** Nebenstehende Gleichung:

$$\frac{y^2}{4} = R^2 - \left(\frac{R^2 - r^2 + p^2}{2p}\right)^2$$

nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{y^2}{4} = \frac{4p^2R^2 - (R^2 - r^2 + p^2)^2}{4p^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{p^2}[(2pR)^2 - (R^2 - r^2 + p^2)^2]$$

oder

$$y = \frac{1}{p} \cdot \sqrt{(2pR)^2 - (R^2 - r^2 + p^2)^2}$$

Zerlegt man noch den Radikanden nach der Formel: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, so erhält man der Reihe nach:

$$y = \frac{1}{p} \cdot \sqrt{(2pR + R^2 - r^2 + p^2)(2pR - R^2 + r^2 - p^2)}$$

$$y = \frac{1}{p}\sqrt{[(R+p)^2 - r^2) \cdot (r^2 - (R-p)^2]}$$

$$y = \frac{1}{p}\sqrt{(R+p+r)(R+p-r)(r+R-p)(r-R+p)}$$

mithin ist:

$$y = \frac{1}{p}\sqrt{(R+p+r)(R+p-r)(R-p+r)(-R+p+r)}$$

des Kreises um $M$ ist, und wenn man die unbekannte Strecke $Mf = z$ setzt, die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{y^2}{4} = R^2 - z^2$$

Ferner besteht in dem bei $f$ rechtwinkligen Dreieck $mfc$ die Relation:

$$\overline{cf}^2 = \overline{mc}^2 - \overline{mf}^2$$

oder, da

$$cf = \frac{dc}{2} = \frac{y}{2}$$

$mc = r$, nämlich gleich dem gegebenen Radius $r$

des Kreises um $m$ ist, und wenn man die unbekannte Strecke $mf = Mm - Mf, = p - z$ setzt, da $Mm$ die gegebene Centrallinie der beiden Kreise um $M$ und $m$ ist, die Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{y^2}{4} = r^2 - (p - z)^2$$

Man hat somit zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten $y$ und $z$, aus welchen man $y$ folgendermassen finden kann:

Aus den Gleichungen a) und b) folgt zunächst

$$R^2 - z^2 = r^2 - (p - z)^2$$

oder nach der Erkl. 394:

$$\text{c)} \ldots z = \frac{R^2 - r^2 + p^2}{2p}$$

Substituiert man diesen Wert für $z$ in Gleich. a), so erhält man für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{y^2}{4} = R^2 - \left(\frac{R^2 - r^2 + p^2}{2p}\right)^2$$

und hieraus findet man nach der Erklärung 395:

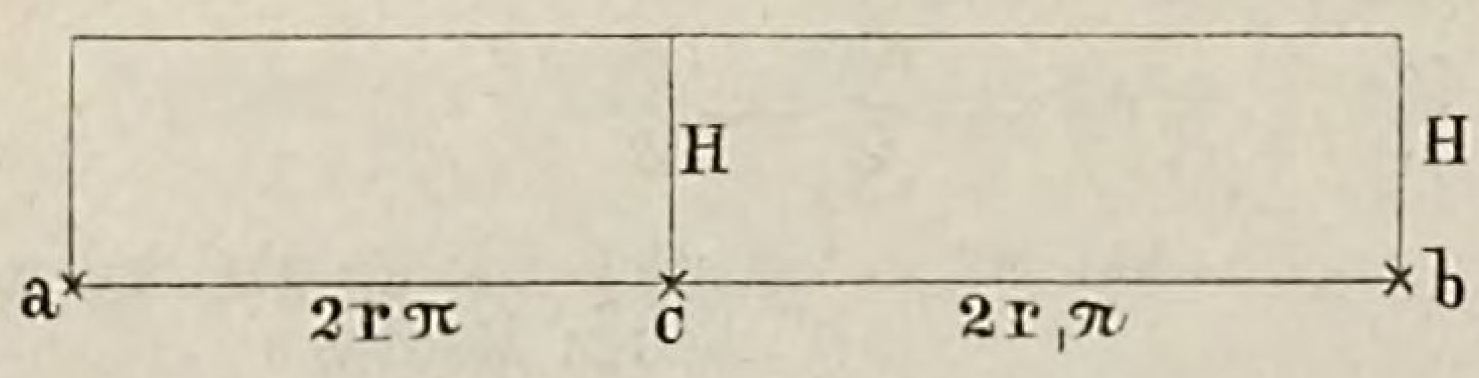
$$3) \ldots y = \frac{1}{p}\sqrt{(R+p+r)(R+p-r)(R-p+r)(-R+p+r)}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man somit für den gesuchten Inhalt $x$ der Durchschnittsfigur beider Cylinder:

$$x = \frac{H}{p}\sqrt{(R+p+r)(R+p-r)(R-p+r)(-R+p+r)}$$

**Aufgabe 472.** Die Volumina zweier geraden Cylinder von gleicher Höhe seien bezw. $V$ und $V_1$. Man soll einen neuen Cylinder bilden, dessen Mantel aus den Mantelflächen zweier Cylinder besteht. Wie gross ist das Volumen dieses so gebildeten Cylinders?

Figur 113.




**Erkl. 396.** Umstehende Gleichung:

$$4) \ldots x = \left(\sqrt{\frac{V}{\pi H}} + \sqrt{\frac{V_1}{\pi H}}\right)^2 \cdot \pi \cdot H$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x = \left(\frac{V}{\pi H} + 2 \cdot \sqrt{\frac{V}{\pi H} \cdot \frac{V_1}{\pi H}} + \frac{V_1}{\pi H}\right) \pi \cdot H$$

$$x = \left(\frac{V}{\pi H} + \frac{2}{\pi H} \sqrt{V \cdot V_1} + \frac{V_1}{\pi H}\right) \cdot \pi \cdot H$$

$$x = (V + 2\sqrt{V \cdot V_1} + V_1) \cdot \frac{\pi H}{\pi H}$$

oder

$$x = V + 2\sqrt{V \cdot V_1} + V_1$$

**Formel:**

$$V = G \cdot H = R^2 \pi H$$

(s. Erkl. 33).

**Auflösung.** Bezeichnet man den Radius des Grundkreises des einen Cylinders mit $r$, den des andern Cylinders mit $r_1$, die beiden Cylinder gleiche Höhe mit $H$, und denkt man sich die Mäntel beider Cylinder in einer Ebene entrollt, die hiernach erhaltenen Rechtecke mit den Seiten aneinandergestossen, welche der gleichen Höhe $H$ entsprechen, so erhält man den durch die Fig. 113 dargestellten, in einer Ebene entrollten Mantel eines andern, gedachten Cylinders, der den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Bezeichnet man das gesuchte Volumen des neu zu bildenden Cylinders mit $x$, den Radius des Grundkreises desselben mit $y$, so hat man, da die Höhe desselben gleich der Höhe $H$ der gegebenen zwei Cylinder ist, nach vorstehender Formel die Relation:

$$1) \ldots x = y^2 \pi \cdot H$$

Zur Bestimmung des unbekannten Grundflächenradius $y$ beachte man, dass in der Fig. 113 die Strecke $ab = 2r\pi + 2r_1\pi$ den Umfang des neu zu bildenden Cylinders darstellt, dass somit nach der Erkl. 39 die Relation:

$$2y\pi = 2r\pi + 2r_1\pi$$

bezw. die Relation:

$$2) \ldots y = r + r_1$$

besteht. Berücksichtigt man ferner, dass die Grundflächenradien $r$ und $r_1$ der gegebenen Cylinder direkt nicht bekannt sind, wohl aber nach vorstehender Formel in die gegebenen Volumina $V$ und $V_1$ und in die Höhe $H$ beider Cylinder ausgedrückt werden können, indem man nach dieser Formel allgemein erhält:

$$R = \sqrt{\frac{V}{\pi H}}$$

so geht die Gleichung 2) über in:

$$3) \ldots y = \sqrt{\frac{V}{\pi H}} + \sqrt{\frac{V_1}{\pi \cdot H}}$$

und man erhält schliesslich aus den Gleichungen 1) und 3) für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$4) \;.\;.\; x = \left(\sqrt{\frac{V}{\pi H}} + \sqrt{\frac{V_1}{\pi H}}\right)^2 \cdot \pi \cdot H$$

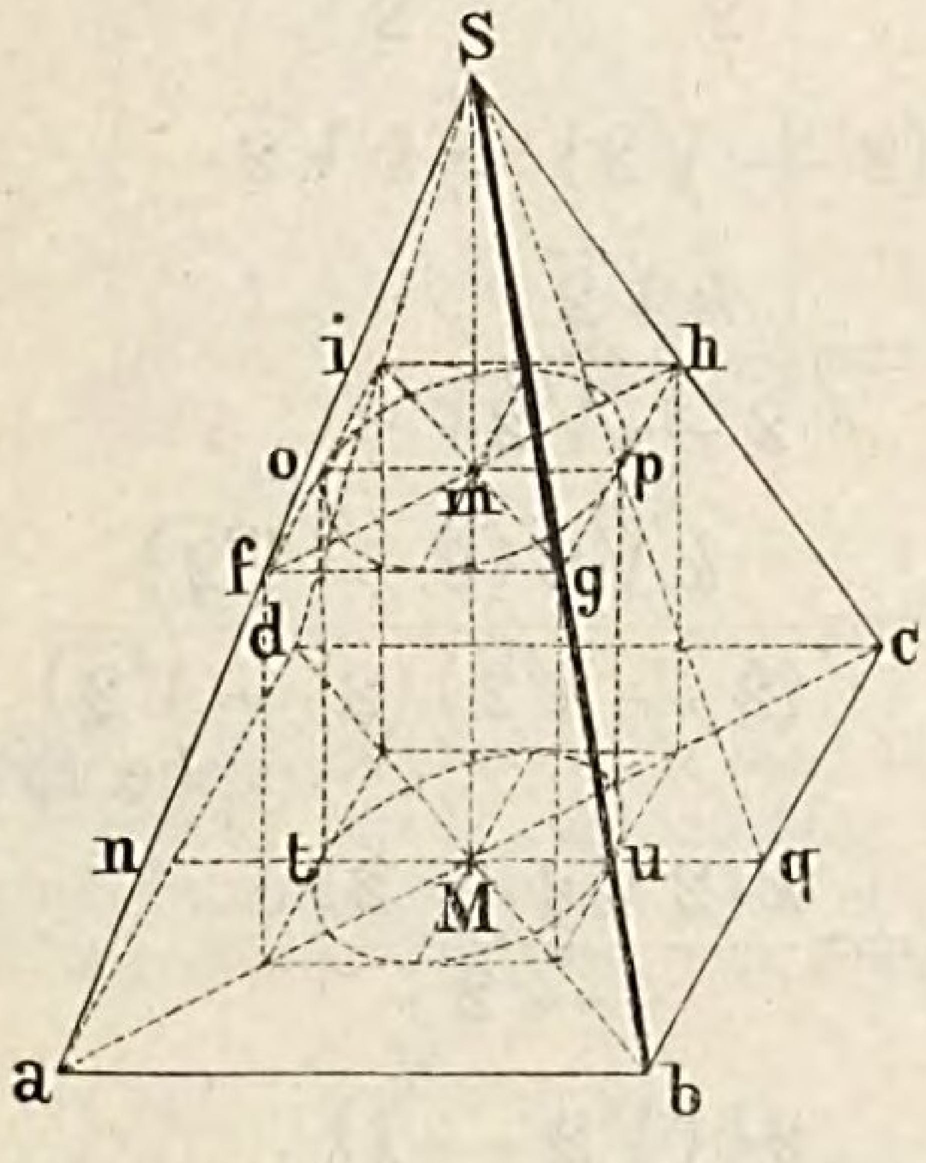
aus welcher Gleichung sich nach der Erkl. 396 für das gesuchte Volumen $x$:

$$x = V + 2\sqrt{V \cdot V_1} + V_1 \text{ ergibt}$$

## 6. Der Cylinder in Verbindung mit der Pyramide.

**Aufgabe 473.** In eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis und mit lauter gleichen Kanten $k$ wird ein Cylinder, welcher ebenso hoch als breit ist, so gestellt, dass seine untere Grundfläche in die der Pyramide zu liegen kommt und dass seine obere Grundfläche die Seitenflächen der Pyramide berührt. Wie gross ist die Höhe und der Grundflächenradius des Cylinders?

Figur 114.




**Auflösung.** Stellt die Figur 114 die gegebene Pyramide mit dem, der Aufgabe gemäss, in diese Pyramide eingezeichneten Cylinder dar, so besteht infolge der Aehnlichkeit der recktwinkligen Dreiecke $nMs$ und $om_1s$ die Relation:

$$a) \;.\;.\;.\; nm : om_1 = Ms : m_1s$$

aus der man eine Bestimmungsgleichung für die gesuchte Höhe, bezw. für den gesuchten Grundflächenradius des Cylinders ableiten kann und zwar wie folgt:

Der in die Pyramide eingezeichnete Cylinder soll ebenso hoch als breit sein, d. h. setzt man seine Höhe:

$$b) \;.\;.\;.\; mm_1 = x$$

so muss sein Durchmesser $op$ ebenfalls $= x$, bezw. es muss der gesuchte Grundflächenradius

$$c) \;.\;.\;.\; om_1 = \frac{x}{2} \text{ sein.}$$

Berücksichtigt man ferner, dass in der vorstehenden Relation a):

$$d) \;.\;.\; nm = \frac{nq}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{k}{2}$$ nämlich gleich der halben gegeb. Kante der Pyramide ist

dass

$$b) \;.\;.\;.\; ms = \sqrt{\overline{as}^2 - \overline{am}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{ac}{2}\right)^2} = \sqrt{k^2 - \frac{\overline{ac}^2}{4}}$$

$$= \sqrt{k^2 - \frac{\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2}{4}} = \sqrt{k^2 - \frac{k^2 + k^2}{4}} = \sqrt{k^2 - \frac{2k^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4k^2 - 2k^2}{4}} = \sqrt{\frac{2k^2}{4}} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$ ist, indem sämtliche Kanten der Pyramiden einander gleich, nämlich sämtlich $= k$ sind

und dass schliesslich mit Rücksicht der Relation e):

f) . . . $m_1 s = ms - mm_1 = \frac{k}{2}\sqrt{2} - x$

gesetzt werden kann, so erhält man aus a) für $x$ die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $\frac{k}{2} : \frac{x}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{2} : \left(\frac{k}{2}\sqrt{2} - x\right)$

hieraus findet man $x$ der Reihe nach wie folgt:

$$1 : \frac{x}{2} = \sqrt{2} : \left(\frac{k}{2}\sqrt{2} - x\right)$$

$$\frac{k}{2}\sqrt{2} - x = \frac{x}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{k}{2}\sqrt{2} = x + \frac{x}{2}\sqrt{2}$$

$$x\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

$$x \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

$$x(2 + \sqrt{2}) = k\sqrt{2}$$

$$x = \frac{k\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{k\sqrt{2}\,(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})\,(2 - \sqrt{2})}$$

(siehe Erkl. 364)

$$x = \frac{k(2\sqrt{2} - 2)}{4 - 2}$$

$$x = \frac{2k(\sqrt{2} - 1)}{2}$$

oder

2) . . $x = k(\sqrt{2} - 1)$

Für die gesuchte Höhe $mm_1 = x$ des Cylinders ergibt sich somit:

A) . . . $mm_1 = x = k(\sqrt{2} - 1)$

Für den gesuchten Grundflächenradius $om_1 = \frac{x}{2}$ des Cylinders ergibt sich nach den Gleichungen c) und 2):

B) . . . $om_1 = \frac{x}{2} = \frac{k}{2}(\sqrt{2} - 1)$

**Aufgabe 474.** Von einem geraden Cylinder ist die Diagonale $D$ des Axenschnitts und der Mantel $M$ des Cylinders gegeben. In diesem Cylinder ist eine gerade, achtseitige Pyramide so konstruiert, dass die Spitze derselben im Mittelpunkt der oberen Grundfläche liegt, die Grundfläche der Pyramide ein der andern Grundfläche des Cylinders einbeschriebenes, reguläres Achteck ist.

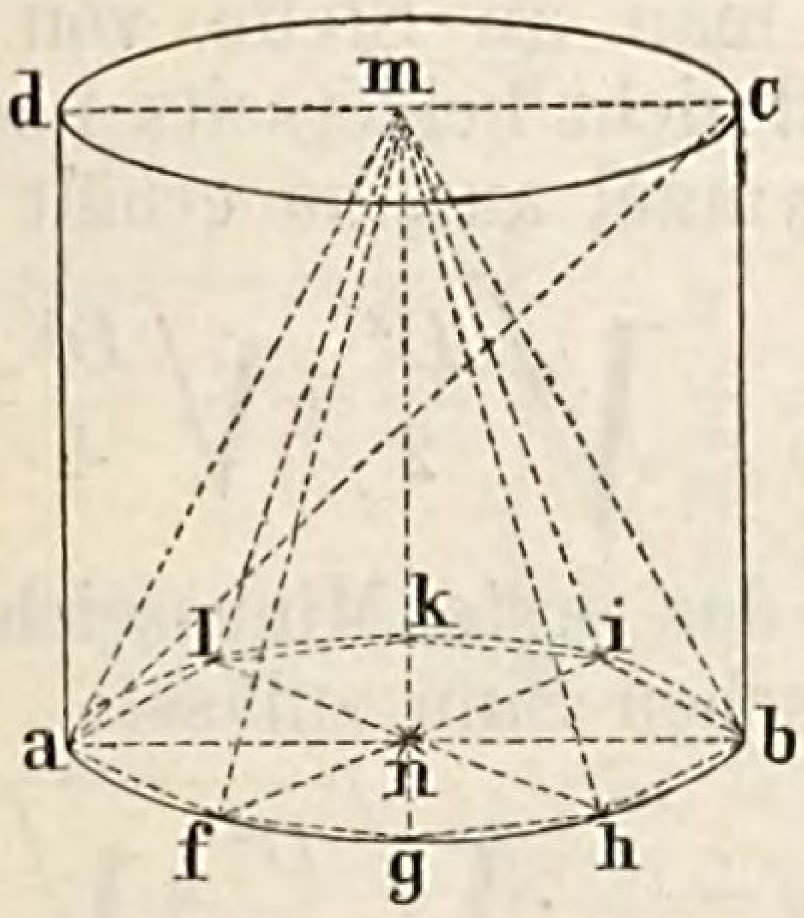
Wie gross ist die Grundkante der Pyramide und wie gross ist die Grundkante der Pyramide für den Fall, wenn der Mantel $M$ gleich dem Inhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $D$ der Diagonale des oben erwähnten Axenschnitts ist?

**Formel:**

$$M = 2R\pi \cdot H$$

(s. Erkl. 47).

Figur 115.




**Erkl. 397.** Bezeichnet man die Seite eines regulären Achtecks mit $s_8$, den Radius des demselben umschriebenen Kreises mit $R$, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

$$\text{a)} \ldots s_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Diese Relation kann man wie folgt herleiten: Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit $R$, die Seite eines regulären $n$-Ecks, welches jenem Kreise einbeschrieben ist, mit $s_n$, die Seite eines regulären $2n$-Ecks, d. i. ein reguläres Polygon, welches doppelt so viele Seiten als jenes $n$-Eck hat und welches ebenfalls jenem Kreise einbeschrieben ist, mit $s_{2n}$, so besteht zwischen diesen allgemeinen Grössen die allgemeine Beziehung:

$$\text{b)} \ldots s_{2n} = \sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{s_{2n}^2}{4}}\right)}$$

Bezeichnet man ferner den Radius eines Kreises mit $R$, die Seite des demselben einbeschriebenen, regulären Vierecks (d. i. ein Quadrat) mit $s_4$, so besteht zwischen diesen Grössen die weitere Beziehung:

$$\text{c)} \ldots s_4 = R\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 379)}$$

**Auflösung.** Zur Bestimmung der gesuchten Grundkante $x$ der in dem Cylinder konstruierten Pyramide, siehe Fig. 115, muss man zunächst den noch unbekannten Radius $y$ der Grundfläche des Cylinders bestimmen, indem zwischen der Seite $s_8$ eines regulären Achtecks, bezw. zwischen der gesuchten Grundkante $x$, und dem Radius $R$ des jenem regulären Achteck umschriebenen Kreises, bezw. zwischen dem noch unbekannten Grundflächenradius $y$ des Cylinders, nach der Erkl. 397, die Relation:

$$1) \ldots x = y\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

besteht.

Den unbekannten Grundflächenradius $y$ kann man folgendermassen in die gegebenen Stücke ausdrücken: Aus dem bei $b$ rechtwinkligen Dreieck $abc$, siehe Figur 115, ergibt sich die Relation:

$$\text{a)} \ldots \overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$$

Da nun:

b) . . . $ac = D$ nämlich gleich der gegebenen Diagonale $D$ des Axenschnitts des Cylinders,

c) . . . $ab = 2 \cdot an = 2 \cdot y$ nämlich gleich dem doppelten Radius $y$

und da nach der Erkl. 399:

d) . . . $bc = \dfrac{M}{2y\pi}$ ist, wenn $M$ den gegebenen Mantel des Cylinders bedeutet,

so geht die Relation a) über in:

$$2) \ldots D^2 = (2y)^2 + \left(\frac{M}{2y\pi}\right)^2$$

Diese Gleichung kann man wie folgt nach $y$ auflösen:

$$D^2 = (2y)^2 + \frac{M^2}{(2y)^2 \cdot \pi^2}$$

Setzt man in Gleichung b) an Stelle von $s_n$ den Wert für $s_4$ aus Gleichung c), dann aber, entsprechend der allgemeinen Formel b), an Stelle von $s_{2n}$ das Zeichen $s_8$, d. i. die Seite eines regulären Achtecks, so erhält man:

$$s_8 = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4}}\right)}$$

und hieraus findet man durch Reduktion:

$$s_8 = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}}\right)}$$

$$s_8 = \sqrt{2R\left(R - R\sqrt{\frac{4-2}{4}}\right)}$$

$$s_8 = \sqrt{2R^2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}$$

$$s_8 = R\sqrt{2 - \frac{2}{2}\sqrt{2}}$$

oder

$s_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ nämlich umstehende Relation a).

Ausführliches hierüber findet man in Kleyers Lehrbücher über die Planimetrie, speziell das Lehrbuch, welches über die Berechnung der regulären Polygone handelt.

**Erkl. 398.** Mittels Trigonometrie kann man auf raschere Weise Relationen zwischen den Seiten regulärer Polygone und den Radien $R$ und $r$ der denselben um-, bezw. einbeschriebenen Kreise aufstellen, wobei aber wohl zu beachten ist, dass derartige Relationen bei Zahlwerten nur Näherungswerte ergeben.

**Erkl. 399.** In Fig. 115 ist $bc$ gleich der Höhe $H$ des Cylinders $abcd$. Setzt man in umstehender Formel:

$M = 2R\pi \cdot H$ (s. Erkl 47)

$R = y$ und $H = bc$

so erhält man hiernach:

$$bc = \frac{M}{2y\pi}$$

**Erkl. 400.** Aus den Lehren der Potenzen und Wurzeln ist bekannt, dass man ein sogenanntes surdisches Binom von der Form:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

in die Summe zweier Quadratwurzeln zerlegen kann und zwar mittels der Formel:

$$1)\ \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln, speziell den Abschnitt, welcher über die Radizierung surdischer Binome handelt.

Hat man z. B. nebenstehende Gleichung 3):

$$2) \ldots y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}}}$$

Setzt man, der bessern Uebersicht halber, $(2y)^2 = z$, so ist:

$$D^2 = z + \frac{M^2}{z \cdot \pi^2}$$

$$z \cdot \pi^2 \cdot D^2 = z^2 \cdot \pi^2 + M^2$$

$$-M^2 = z^2 \cdot \pi^2 - z \cdot \pi^2 \cdot D^2$$

$$z^2 - z \cdot D^2 = -\frac{M^2}{\pi^2}$$

$$z^2 - z \cdot D^2 + \left(\frac{D^2}{2}\right)^2 = -\frac{M^2}{\pi^2} + \left(\frac{D^2}{2}\right)^2$$

$$\left(z - \frac{D^2}{2}\right)^2 = -\frac{M^2}{\pi^2} + \frac{D^4}{4}$$

$$z - \frac{D^2}{2} = \pm\sqrt{-\frac{M^2}{\pi^2} + \frac{D^4}{4}}$$

$$z = \frac{D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}}$$

Setzt man an Stelle von $z$ wieder $(2y)^2$ und zieht beiderseits nochmals die Quadratwurzel aus, so erhält man:

$$2y = \pm\sqrt{\frac{D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}}}$$

oder, da das erste Minuszeichen keinen geometrischen Sinn zulässt:

$$3) \ldots y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}}}$$

Nach der Erkl. 400 kann man an Stelle des mittels dieser Gleichung gefundenen Wertes für $y$ auch setzen:

$$4)\ y = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{D^2 + \frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{D^2 - \frac{2M}{\pi}}\right)$$

Aus den Gleichungen 1) und 4) ergibt sich hiernach für die gesuchte Grundkante $x$:

$$\text{A)}\ x = \frac{1}{4}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{D^2 + \frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{D^2 - \frac{2M}{\pi}}\right)$$

Ist nach dem 2. Teil der Aufgabe und nach der Erkl. 57:

$$M = \frac{D^2}{4} \cdot \pi$$

so erhält man aus der Gleichung A) für die Grundkante $x_1$:

so kann man die darin enthaltene Quadratwurzel:

$$3) \ldots \sqrt{\frac{D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}}}$$

wie folgt in die Summe zweier Quadratwurzeln zerlegen:

Setzt man in vorstehender Formel 1):

$$a) \ldots a = \frac{D^2}{2}$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}}, \text{ also:}$$

$$b) \ldots b = \frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}$$

so geht die vorstehende Formel 1) in ihrer Anwendung auf das gegebene Beispiel über in:

$$\sqrt{\frac{D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{D^2}{2} + \sqrt{\frac{D^4}{4} - \left(\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}\right)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{D^2}{2} - \sqrt{\frac{D^4}{4} - \left(\frac{D^4}{4} - \frac{M^2}{\pi^2}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{D^2}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{\pi^2}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{D^2}{2} - \sqrt{\frac{M^2}{\pi^2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{D^2}{2} + \frac{M}{\pi}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{D^2}{2} - \frac{M}{\pi}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{M}{2\pi}} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4} - \frac{M}{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{D^2 + \frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{D^2 - \frac{2M}{\pi}}\right)$$

Die vorstehende Gleichung 2) kann man also auch in der Form schreiben:

$$4) \ldots y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{D^2 + \frac{2M}{\pi}} \pm \sqrt{D^2 - \frac{2M}{\pi}}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{D^2 + \frac{2 \cdot D^2 \pi}{4 \cdot \pi}} \pm \sqrt{D^2 - \frac{2D^2\pi}{4\pi}}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{6D^2}{4}} \pm \sqrt{\frac{2D^2}{4}}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{D}{2} \cdot \left(\sqrt{6} \pm \sqrt{2}\right)$$

oder

$$B) \, . \; x_1 = \frac{D}{8}\sqrt{(2 - \sqrt{2})\,(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})}$$

---

## 7. Der Cylinder in Verbindung mit dem Prisma.

**Aufgabe 475.** Einem geraden, dreiseitigen Prisma mit den Grundkanten $a$, $b$ und $c$ und der Höhe $H$ ist ein Cylinder umschrieben. Wie gross ist das Volumen dieses Cylinders?

**Formel:**

$$V = R^2\pi \cdot H$$

(s. Erkl. 33).

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des dem dreiseitigen Prisma umschriebenen Cylinders dient vorstehende Formel. Bezeichnet man den noch unbekannten Grundflächenradius des Cylinders mit $y$ und berücksichtigt man, dass die Höhe desselben gleich der gegebenen Höhe $H$ des Prismas ist, so hat man hiernach die Gleich.:

$$1) \ldots x = y^2 \cdot \pi \cdot H$$

**Erkl. 401.** Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks der Reihe nach mit $a$, $b$ und $c$, die halbe Summe dieser drei Seiten, nämlich $\frac{a+b+c}{2}$ mit $s$, den Radius des demselben umschriebenen Kreises mit $R$, so besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

wobei zu beachten ist, dass:

$$\text{b)} \ldots s = \frac{a+b+c}{2}$$

gesetzt werden muss.

Bezeichnet man ferner den Radius des jenem Dreieck einbeschriebenen Kreises mit $r$, so besteht die Relation:

$$\text{c)} \ldots r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

oder, da der Zähler des Bruches rechts den Inhalt $J$ des Dreiecks darstellt:

$$\text{d)} \ldots r = \frac{J}{s}$$

worin ebenfalls $s$ die durch Gleichung b) ausgedrückte Bedeutung beizulegen ist.

Diese und ähnliche andre Formeln sind in Kleyers Lehrbuch der ebenen Trigonometrie entwickelt.

Zur Aufstellung einer zweiten Gleichung, aus welcher man den Radius $y$ des Grundkreises des Cylinders berechnen kann, beachte man, dass die Grundfläche des Prismas ein jenem Grundkreis einbeschriebenes, unregelmässiges Dreieck mit den Seiten $a$, $b$ und $c$ ist, nach der Erkl. 401 hat man also für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$2) \ldots y = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

in welcher man:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{a+b+c}{2}$$

gesetzt denken muss.

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man für das gesuchte Volumen $x$:

$$\text{A)}\ x = \frac{a^2b^2c^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot \pi \cdot H$$

in welcher allgemeinen Lösung die Gleichung a) zu berücksichtigen ist.

---

**Aufgabe 476.** Aus einem cylindrischen Baumstamm von $D = 54$ cm Durchmesser und $L = 7{,}8$ cm Länge soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt, dessen eine Seite $a = 30$ cm lang werden soll, gehauen werden; wie viel beträgt der Holzabfall?

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

$$\text{I.} \ldots V = R^2\pi \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 33)}$$

Für ein Prisma:

$$\text{II.} \ldots V = G \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 1).}$$

**Auflösung.** Das Volumen des gesuchten Holzabfalls $x$ ist gleich dem Volumen des cylindrischen Baumstammes weniger dem Volumen des prismatischen Balkens. Berücksichtigt man nun, dass der Grundflächenradius des als Cylinder gedachten Baumstammes $= \frac{D}{2}$, nämlich gleich dem halben Durchmesser $D$ des Baumstammes ist, dass die Höhe $H$ des gedachten Cylinders gleich der Länge $L$ des Baumstammes ist, dass die Höhe, bezw. die Länge des prismatischen Balkens ebenfalls gleich der Länge $L$ des Baumstammes ist, dass ferner die Grundfläche $G$, bezw. der Inhalt eines Querschnitts des prismatischen Balkens ein Rechteck mit der gegebenen Seite $a$ ist und dass die andre Seite dieses Rechtecks nach der Erkl. 402 vollständig bestimmt ist und $= \sqrt{D^2 - a^2}$ sein muss,

**Erkl. 402.** Jede Diagonale eines in einem Kreis eingezeichneten Rechtecks muss ein Durchmesser des Kreises sein, da die Winkel des Rechtecks Peripheriewinkel des Kreises sind und als Rechte Winkel Peripheriewinkel über einem Durchmesser des Kreises sein müssen und zwar nach dem planimetrischen Satze:

„Alle Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises sind Rechte Winkel."

Ist hiernach eine Seite eines Rechtecks $= a$, die Diagonale desselben, bezw. der Durchmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises $= D$, so muss nach dem pythagoräischen Lehrsatze die andre Rechteckseite $= \sqrt{D^2 - a^2}$ sein.

so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formeln für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$x = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot L - a \cdot \sqrt{D^2 - a^2} \cdot L$$

Der gesuchte Holzabfall $x$ beträgt somit allgemein:

**Erkl. 403.** Bei allen numerischen Aufgaben müssen die Dimensionen in ein und dieselbe Masseinheit ausgedrückt werden. So müssen z. B. alle in der Aufgabe 476 gegebenen Längen in ein und dieselbe Längeneinheit, also alle entweder in Meter oder alle in Centimeter etc. ausgedrückt werden.

$$\text{A)} \ldots x = L\left[\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 - a\sqrt{D^2 - a^2}\right]$$

Substituiert man hierin unter Berücksichtigung der Erkl. 403 die gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$x = 7{,}8\left[3{,}141 \cdot \left(\frac{0{,}54}{2}\right)^2 - 0{,}3\sqrt{0{,}54^2 - 0{,}3^2}\right]$$

oder

$$x = 7{,}8[3{,}141 \cdot 0{,}27^2 - 0{,}3\sqrt{(0{,}54 + 0{,}3)(0{,}54 - 0{,}3)}]$$

$$x = 7{,}8[3{,}141 \cdot 0{,}0729 - 0{,}3\sqrt{0{,}84 \cdot 0{,}24}$$

$$x = 7{,}8[0{,}22897 - 0{,}3\sqrt{0{,}2016}]$$

$$x = 7{,}8[0{,}22897 - 0{,}3 \cdot 0{,}448]$$

$$x = 7{,}8[0{,}22897 - 0{,}1344]$$

$$x = 7{,}8 \cdot 0{,}09457$$

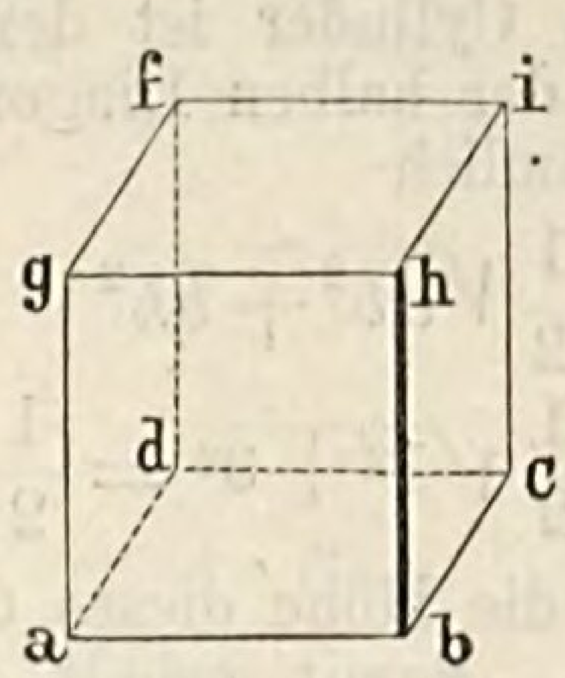
mithin beträgt der gesuchte Holzabfall

$$x = 0{,}737 \text{ cbm}$$

---

**Aufgabe 477.** Die drei aneinanderstossenden Kanten eines geraden Parallelepipedons verhalten sich wie 1 : 2 : 3. In welchem Verhältnis stehen die Mantelflächen der drei geraden Cylinder, welche man sich um jenes Parallelepipedon konstruiert denken kann?

Figur 116.




**Formel:**

$$M = 2R\pi \cdot H$$

(s. Erkl. 47).

**Auflösung.** Stellt die Fig. 116 das Parallelepipedon dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, von welchem also drei aneinanderstossende Kanten, wie z. B. $ab$, $bc$ und $bh$ in dem Verhältnis von 1 : 2 : 3 stehen, in welchem also die Kante

$ab$ z. B. = 1 m,

die Kante

$bc$ dementsprechend = 2 m,

die Kante

$bh$ „ = 3 m

Länge hat, so kann man sich um dasselbe drei gerade Cylinder konstruiert denken, nämlich:

a) einen Cylinder, dessen Grundfläche ein der Begrenzungsfläche $abcd$ umschriebener Kreis ist.

Für diesen Cylinder ist der Grundflächenradius gleich der halben Diagonale des Rechtecks $abcd$, nämlich:

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2}$$

$$\text{bezw.} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ m}$$

ferner ist die Höhe dieses Cylinders $= bh$, bezw. $= 3$ m. Somit erhält man nach vorstehender Formel für den Mantel $M$ dieses Cylinders:

$$M = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \pi \cdot 3 \text{ qm}$$

oder

$$1) \ldots M = 3\pi\sqrt{5} \text{ qm}$$

Dann kann man:

b) einen Cylinder konstruiert denken, dessen Grundfläche ein der Begrenzungsfläche $bcih$ umschriebener Kreis ist.

Für diesen Cylinder ist der Grundflächenradius gleich der halben Diagonale des Rechtecks $bcih$, nämlich:

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\overline{bc}^2 + \overline{bh}^2}$$

$$\text{bezw.} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{13} \text{ m}$$

ferner ist die Höhe dieses Cylinders $= ab$, bezw. $= 1$ m. Somit erhält man nach vorstehender Formel für den Mantel $M_1$ dieses Cylinders:

$$M_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \pi \cdot 1 \text{ qm}$$

oder

$$2) \ldots M_1 = \pi \cdot \sqrt{13} \text{ qm}$$

Schliesslich kann man:

c) einen Cylinder konstruiert denken, dessen Grundfläche ein der Begrenzungsfläche $abhg$ umschriebener Kreis ist.

Für diesen Cylinder ist der Grundflächenradius gleich der halben Diagonale des Rechtecks $abhg$, nämlich

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bh}^2}$$

$$\text{bezw.} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \text{ m}$$

Ferner ist die Höhe dieses Cylinders $= bc$, bezw. $= 2$ m. Somit erhält man nach vorstehender Formel für den Mantel $M_2$ dieses Cylinders:

$$M_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \pi \cdot 2 \text{ qm}$$

oder

$$3) \ldots M_2 = 2\pi\sqrt{10} \text{ qm}$$

Mittels der Gleichungen 1) bis 3) ergibt sich zur Bestimmung des gesuchten

Verhältnisses der Mantelflächen $M$, $M_1$ und $M_2$ der drei Cylinder, die Proportion:

$$M : M_1 : M_2 = 3\pi\sqrt{5} : \pi\sqrt{13} : 2\pi\sqrt{10}$$

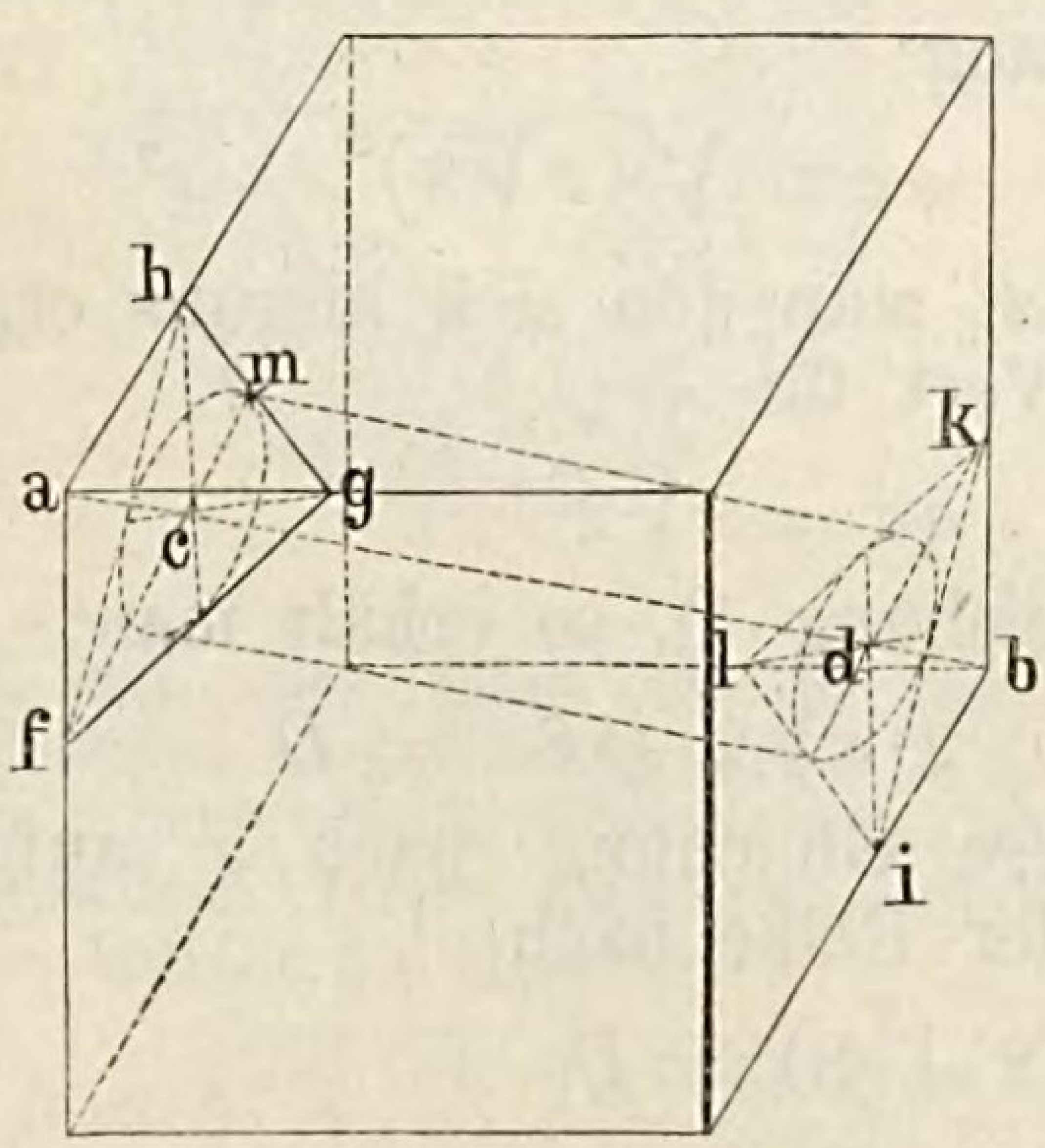
und hieraus findet man:

4) . . . $M : M_1 : M_2 = 3\sqrt{5} : \sqrt{13} : 2\sqrt{10}$

---

**Aufgabe 478.** Man soll in einem Würfel einen geraden Cylinder so konstruieren, dass seine Axe mit einer Diagonalaxe des Würfels zusammenfällt und dass seine Grundflächen die Würfelflächen berühren. Wie gross wird der Grundflächenradius dieses Cylinders werden, wenn die Höhe des Cylinders 8 mal so gross als dieser Radius sein soll?

Figur 117.




**Auflösung.** Ist $ab$, siehe Fig. 117, eine Diagonalaxe des durch die Figur dargestellten Würfels und man denkt sich in gleichen Abständen $ac$ und $bd$ zwei Ebenen senkrecht zur Diagonalaxe $ab$ gelegt, so schneiden diese unter sich parallele Ebenen die Würfelfläche in den gleichseitigen Dreiecken $fgh$ und $ikl$. Denkt man sich ferner in diese gleichseitigen Dreiecke die denselben einbeschriebenen Kreise konstruiert, so bilden diese Kreise die Grundflächen des zu konstruierenden geraden Cylinders. Setzt man nun den gesuchten Grundflächenradius des Cylinders, z. B.

a) . . . $cm = x$

also die gesuchte Höhe:

b) . . . $cd = 8x$

so besteht, da die Körperdiagonale $ab$ des Würfels $= D$ gegeben ist, die Relation:

$$ac + cd + db = D$$

bezw. die Relation:

1) . . . $2 \cdot ac + 8x = D$

In dieser Gleichung ist noch $ac$, d. i. die Höhe der geraden dreiseitigen Pyramide $afgh$ unbekannt und muss deshalb zunächst bestimmt werden, was folgendermassen geschehen kann:

Zwischen dem Radius $cm = x$ des dem gleichseitigen (regulären) Dreieck $fgh$ einbeschriebenen Kreises und der Seite $hg$ dieses Dreiecks besteht nach der Erkl. 342 die Relation:

c) . . . $hg = 2x\sqrt{3}$

**Erkl. 404.** In jedem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck ist die zur Hypotenuse gehörige Höhe gleich der halben Hypotenuse. Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie, speziell das Lehrbuch, welches die planimetrischen Lehrsätze enthält.

Da ferner das Dreieck $agh$ ein bei $a$ rechtwinkliges, dabei ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist nach der Erkl. 404:

$$am = \frac{1}{2} hg$$

oder nach der Gleich. c):

$$am = \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{3}$$

oder

$$\text{d)} \ldots am = x\sqrt{3}$$

Aus dem bei $c$ rechtwinkligen Dreieck $acm$ ergibt sich nach dem pythagoräischen Lehrsatz die Relation:

$$ac = \sqrt{\overline{am}^2 - \overline{cm}^2}$$

mithin besteht nach den Gleichungen a) und d) für $ac$ die Bestimmungsgleichung:

$$ac = \sqrt{(x\sqrt{3})^2 - x^2}$$

Setzt man den sich hieraus ergebenden Wert für $ac$:

$$\text{2)} \ldots ac = x\sqrt{2}$$

in Gleichung 1), so erhält man:

$$\text{3)} \ldots 2 \cdot x\sqrt{2} + 8x = D$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x(2\sqrt{2} + 8) = D$$

$$x = \frac{D}{2(\sqrt{2} + 4)}$$

$$x = \frac{D(\sqrt{2} - 4)}{2(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 4)} \quad \text{(s. Erkl. 364)}$$

$$x = \frac{D(\sqrt{2} - 4)}{2(2 - 16)}$$

$$x = \frac{D(\sqrt{2} - 4)}{-28}$$

Der gesuchte Grundflächenradius ist hiernach:

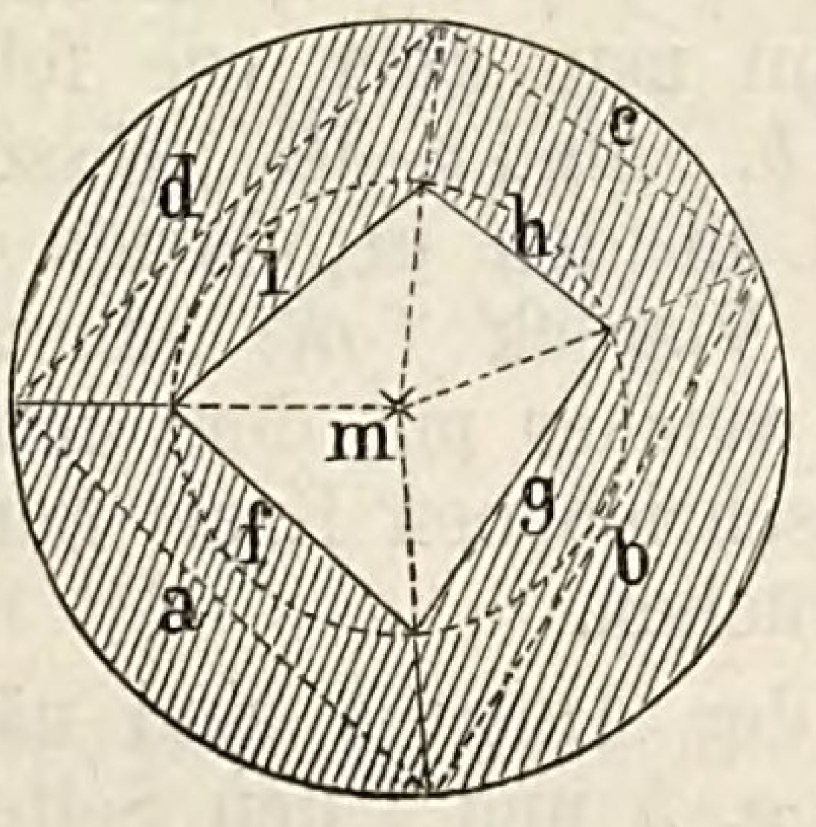
$$\text{A)} \ldots x = \frac{D}{28} \cdot (4 - \sqrt{2})$$

und somit ist nach der Gleichung b) die gesuchte Höhe des Cylinders:

$$\text{B)} \ldots 8x = \frac{2}{7} D(4 - 2\sqrt{2})$$

**Aufgabe 479.** Ein gerader Cylinder mit der Höhe $H$ soll prismatisch ausgehöhlt werden und zwar so, dass der Querschnitt der Aushöhlung ein einem Kreise mit dem Radius $r$ einbeschriebenes unregelmässiges Viereck ist, dessen Seiten den Seiten eines in dem Grundkreis des Cylinders einbeschriebenen Vierecks mit den Seiten $a$, $b$, $c$ und $d$ parallel sind. Wie gross ist die Gesamtoberfläche des nach der Aushöhlung übrig bleibenden hohlen Körpers, wenn jener Kreis mit dem Grundkreis des Cylinders konzentrisch ist?

Figur 118.




**Erkl. 405.** Bezeichnet man die vier Seiten eines beliebigen Kreisvierecks mit $a$, $b$, $c$ und $d$, die halbe Summe dieser 4 Seiten mit $s$ und den Radius des dem Viereck umschriebenen Kreises mit $R$, so besteht die Relation:

$$1) \ldots R = \frac{\sqrt{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

wobei man sich aber stets an die Stelle von $s$:

$$2) \ldots s = \frac{a+b+c+d}{2}$$ gesetzt denken muss.

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie, speziell das Lehrbuch, welches über die planimetrischen Berechnungen handelt.

**Formel:**

$$M = 2R\pi \cdot H \text{ (s. Erkl. 47).}$$

**Auflösung.** Die gesuchte Gesamtoberfläche $x$ des prismatisch ausgehöhlten Körpers besteht:

$\alpha$) aus dem Mantel $M$ des Cylinders,

$\beta$) aus dem Mantel $M_1$ des Prismas, welches man sich an Stelle der prismatischen Aushöhlung gesetzt denken kann,

$\gamma$) aus dem doppelten Inhalt $G$ einer Endfläche des ausgehöhlten Körpers.

Somit besteht zunächst die Relation:

$$1) \ldots x = M + M_1 + 2 \cdot G$$

Zur Bestimmung des Mantels $M$ des Cylinders hat man nach vorstehender Formel die Relation:

$$a) \ldots M = 2R\pi \cdot H$$

in welcher $H$ die gegebene Höhe des Cylinders, $R$ den noch unbekannten Grundflächenradius bedeutet. Dieser Grundflächenradius $R$ ist, siehe Fig. 118, welche einen Querschnitt des ausgehöhlten Körpers darstellt, der Radius des dem unregelmässigen Viereck $abcd$ umschriebenen Kreises. Da nun die Seiten $a$, $b$, $c$ und $d$ dieses Vierecks gegeben sind, so hat man nach der Erkl. 405 für den Radius $R$:

$$b) \; R = \frac{\sqrt{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

wenn

$$c) \ldots s = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ bedeutet.}$$

Für den Mantel $M$ des Cylinders hat man somit:

$$2) \ldots M = 2\pi H \cdot \frac{\sqrt{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

**Erkl. 406.** Bezeichnet man die 4 Seiten eines beliebigen Kreisvierecks mit $a$, $b$, $c$ und $d$, den Inhalt desselben mit $J$, so besteht, wenn man:

$$1) \ldots \frac{a+b+c+d}{2} = s$$

setzt, die Relation:

$$2) \ldots J = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Die in der Erkl. 405 aufgestellte Relation 1) kann man somit auch in der Form schreiben:

$$3) \ldots R = \frac{\sqrt{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{4J}$$

wenn man berücksichtigt, dass $J$ die durch die Gleichung 2) ausgedrückte Bedeutung hat.

**Erkl. 407.** Ein Satz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder laufenden Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der ersten Glieder der Verhältnisse zur Summe oder Differenz der zweiten Glieder der Verhältnisse, wie die Glieder eines der Verhältnisse."

Hat man z. B. die Proportion:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \ldots$$

so ist auch:

$$\frac{a+b+c+\cdot\cdot}{x+y+z+\cdot\cdot} = \frac{a}{x} \text{ oder } = \frac{b}{y} \text{ oder } = \frac{c}{z}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Proportionen.

**Erkl. 408.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Inhalte ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten."

Zur Bestimmung des Mantels $M_1$ des Prismas, welches man sich an Stelle der prismatischen Aushöhlung gesetzt denken kann, verfahre man folgendermassen:

Bezeichnet man, siehe Fig. 118, die 4 Grundkanten des gedachten Prismas mit $f$, $g$, $h$ und $i$, so hat man, da die Höhe des Prismas gleich der Höhe $H$ des Cylinders ist, für den Mantel $M_1$ des Prismas:

$$M_1 = f \cdot H + g \cdot H + h \cdot H + i \cdot H$$

bezw.

$$d) \ldots M_1 = (f+g+h+i) \cdot H$$

In dieser Gleichung ist noch die Summe $(f+g+h+i)$ unbekannt, dieselbe kann man aber wie folgt in die Seiten $a$, $b$, $c$ und $d$ des grösseren Vierecks und in den gegebenen Radius $r$ des dem Viereck $fghi$ umschriebenen Kreises, welcher mit dem dem Viereck $abcd$ umschriebenen Kreis konzentrisch ist, ausdrücken.

Nach der Aufgabe sind nämlich die Seiten $f$, $g$, $h$ und $i$ den Seiten $a$, $b$, $c$ und $d$ bezw. parallel, somit besteht, wenn man den Radius des Kreises, welcher dem Viereck $abcd$ umschrieben ist, mit $R$ bezeichnet, die laufende Proportion:

$$\frac{a}{f} = \frac{b}{g} = \frac{c}{h} = \frac{d}{i} \left( = \frac{R}{r} \right)$$

Mit Rücksicht der Erkl. 407 ergibt sich hieraus:

$$e) \ldots \frac{a+b+c+d}{f+g+h+i} = \frac{R}{r}$$

$$\left( \text{oder } = \frac{a}{f} \text{ oder } = \frac{b}{g} \text{ etc.} \right)$$

Setzt man in diese Gleichung nach der Gleichung c):

$$a+b+c+d = 2s,$$

so erhält man:

$$f) \ldots f+g+h+i = \frac{r \cdot 2s}{R}$$

oder wenn man für $R$ den mittels der Gleichung b) gefundenen Wert substituiert:

$$f+g+h+i = \frac{r \cdot 2s \cdot 4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{\sqrt{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}$$

oder

$$\text{g)} \ldots f+g+h+i=\frac{8rs\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{\sqrt{(a\cdot d+b\cdot c)(a\cdot b+c\cdot d)(a\cdot c+b\cdot d)}}$$

Aus den Gleichungen f) und d) erhält man also für den Mantel $M_1$ des gedachten Prismas:

$$3) \ldots M_1=\frac{8rsH\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{\sqrt{(a\cdot d+b\cdot c)(a\cdot b+c\cdot d)(a\cdot c+b\cdot d)}}$$

**Erkl. 409.** In Fig. 118 ist das Kreisviereck $fghi$ ähnlich dem Kreisviereck $abcd$, da die Seiten bezw. einander parallel sind. Nach der Erkl. 408 hat man somit die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{J(fghi)}{J(abcd)}=\frac{f^2}{a^2}$$

oder wenn man den Radius des dem Viereck $abcd$ umschriebenen Kreises mit $R$, den Radius des dem Viereck $fghi$ umschriebenen Kreises mit $r$ bezeichnet, die Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{J(fghi)}{J(abcd)}=\frac{r^2}{R^2}$$

Hieraus findet man:

$$\text{c)} \ldots J(fghi)=\frac{r^2}{R^2}\cdot J(abcd)$$

oder nach der in der Erkl. 406 aufgestellten Gleichung 2):

$$\text{d)}\ J(fghi)=\frac{r^2}{R^2}\cdot\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Zur Bestimmung des Inhalts $G$ einer der Endflächen des ausgehöhlten Körpers beachte man, dass dieser Inhalt $G$ gleich dem Inhalt $R^2\pi$ (s. Erkl. 57) des Grundkreises des ursprünglich massiven Cylinders, vermindert um den Inhalt des Kreisvierecks $fghi$ ist, man hat somit die Beziehung:

$$\text{h)} \ldots G=R^2\pi-J(fghi)$$

Berücksichtigt man zur Berechnung des Inhalts des Kreisvierecks $fghi$ den in der Erkl. 408 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz, so geht diese Gleichung nach der Erkl. 409 über in:

$$\text{i)}\ G=R^2\pi-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Setzt man in diese Gleichung noch für $R$ den mittels der Gleichung b) gefundenen Wert und reduziert gleichzeitig, so erhält man:

$$4) \ldots G=\pi\cdot\frac{(a\cdot d+b\cdot c)(a\cdot b+c\cdot d)(a\cdot c+b\cdot d)}{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}-\frac{16r^2\sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^3}}{(a\cdot d+b\cdot c)(a\cdot b+c\cdot d)(a\cdot c+b\cdot d)}$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) kann man nunmehr die gesuchte Gesamtoberfläche $x$ bestimmen.

Um jedoch die in den Gleichungen 2) bis 4) vorkommenden grossen Ausdrücke zur weiteren Reduktion nicht benutzen zu müssen, bilde man aus den Gleichungen 1), a), d), f) und i) die einfachere Gleichung:

$$x=2R\pi H+\frac{r\cdot 2s}{R}\cdot H+2\cdot\left(R^2\pi-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right)$$

Für die gesuchte Oberfläche $x$ erhält man somit:

$$\text{A)} \ldots x=2R\pi(H+R)+\frac{2r}{R}\cdot\left(sH-\frac{r}{R}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right)$$

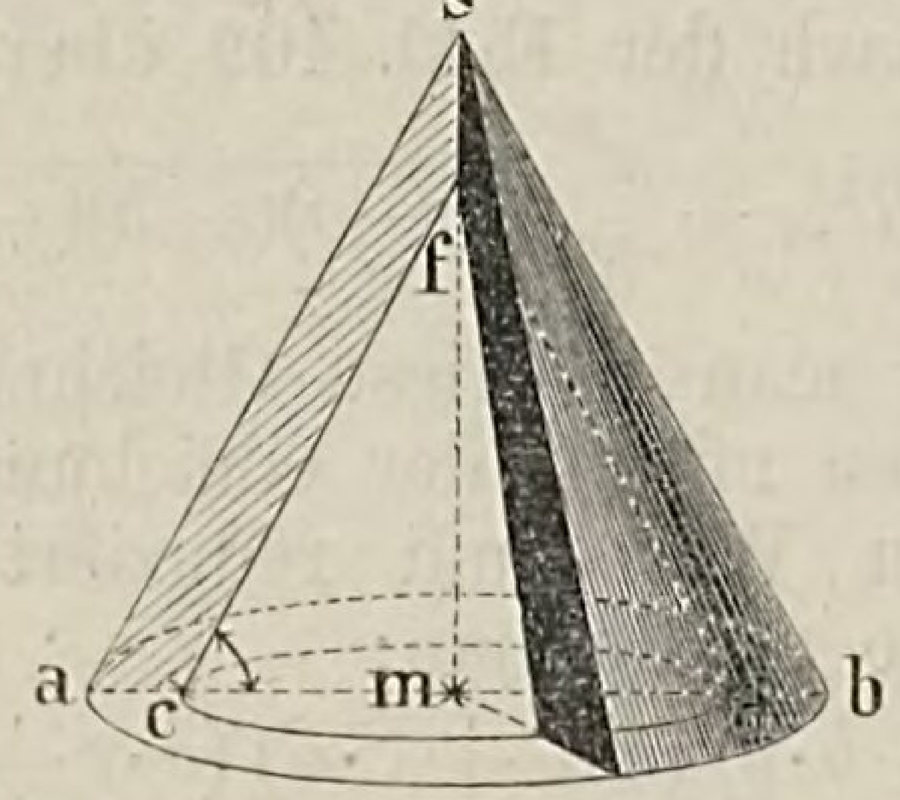
In welcher Gleichung man sich an Stelle von $R$ und $s$ die durch die Gleichungen b) und c) in die gegebenen Viereckseiten $a$, $b$, $c$ u. $d$ ausgedrückten Werte gesetzt zu denken hat.

---

## 8. Der Kegel in Verbindung mit dem Kegel. — Hohlkegel.

**Aufgabe 480.** Aus einem geraden Kegel, dessen Seitenlinien unter $60^0$ gegen die Grundfläche geneigt sind, sei durch eine Kegelfläche, deren Seitenlinien den entsprechenden Seitenlinien jenes Kegels parallel sind, ein Kegel herausgeschnitten. Wie gross sind die Radien der beiden konzentrischen Kreise, welche die Grundfläche des entstandenen Hohlkegels begrenzen, wenn letzterer ein Volumen $= V$ hat und wenn die Breite der Grundfläche des Hohlkegels $= p$ ist?

Figur 119.




**Erkl. 410.** Ist in einem gleichschenkligen Dreieck ein Winkel $= 60^0$, so sind sämtliche Winkel dieses Dreiecks $= 60^0$, d. h. jenes gleichschenklige Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck.

**Formel:**

$$V = \frac{R^2 \pi \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 50).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe des entstandenen Hohlkegels eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe, siehe Fig. 119, den ursprünglich massiven Kegel in dem gleichschenkligen, bezw. gemäss der Aufgabe und nach der Erklärung 410, in dem gleichseitigen Dreieck $abs$ und den inneren hohlen Raum in dem gleichseitigen Dreieck $cdf$, dessen Seiten $cf$ und $df$ den Dreieckseiten $as$ u. $bs$ bezw. parallel sind.

Bezeichnet man nun die gesuchten Radien $am$ und $cm$ der konzentrischen Kreise, welche die Grundfläche des Hohlkegels begrenzen, bezw. mit $x$ und $y$, so hat man einmal, da die Breite $p$ der Grundfläche des Hohlkegels, d. i. die Breite $ac$ $(= am - cm)$ des konzentrischen Ringes, welcher die Grundfläche des Hohlkegels bildet, gegeben ist, die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $x - y = p$

Zur Aufstellung einer zweiten Bestimmungsgleichung beachte man, dass das Volumen $V$ des Hohlkegels gegeben ist und dass dasselbe aus der Differenz der Volumina des ursprünglichen massiven Kegels $abs$ und des kegelförmigen hohlen Raumes $cdf$ besteht, dass man somit nach vorstehender Formel die Relation hat:

a) . . . $V = \frac{\overline{am}^2 \cdot \pi \cdot ms}{3} - \frac{\overline{cm}^2 \cdot \pi \cdot mf}{3}$

Da nun:

$$\left.\begin{array}{l} \text{b)} \ldots am = x \\ \text{und} \\ \text{c)} \ldots cm = y \end{array}\right\} \text{ gesetzt wurde,}$$

da ferner $ms$ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $abs$ ist, dessen Seite $ab = 2x$ gesetzt wurde, da ebenso $mf$ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $cdf$ ist, dessen Seite $cd = 2y$ gesetzt wurde, so kann man nach der Erkl. 25

$$\text{d)} \ldots ms = \frac{2x}{2}\sqrt{3}$$

und

$$\text{e)} \ldots mf = \frac{2y}{2}\sqrt{3}$$

setzen und man erhält aus Gleichung a) die weitere Bestimmungsgleichung:

$$V = \frac{x^2 \cdot \pi \cdot x\sqrt{3}}{3} - \frac{y^2 \cdot \pi \cdot y\sqrt{3}}{3}$$

oder die reduzierte Gleichung:

$$2) \ldots x^3 - y^3 = \frac{3V}{\pi\sqrt{3}}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) findet man $x$ und $y$ wie folgt (s. Erkl. 411):

Dividiert man Gleich. 1) in Gleich. 2) so erhält man die einfachere Gleichung:

$$3) \;.\; x^2 + xy + y^2 = \frac{3V}{\pi p\sqrt{3}} \text{ (s. Erkl. 412)}$$

Man hat somit die einfacheren Gleichungen 1) und 3), welche weiter nach $x$ und $y$ aufzulösen sind.

Quadriert man die Gleich 1), so ist:

$$4) \ldots x^2 - 2xy + y^2 = p^2$$

Subtrahiert man hiervon die Gleich. 3), so restiert:

$$-3xy = p^2 - \frac{3V}{\pi p\sqrt{3}}$$

oder

$$5) \ldots xy = \frac{V}{\pi p\sqrt{3}} - \frac{p^2}{3}$$

Jetzt hat man die noch einfacheren Gleichungen 1) und 5) nach $x$ und $y$ weiter aufzulösen. Quadriert man die Gleichung 1) und addiert hierzu das 4-fache Produkt der Gleichung 5), so erhält man:

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2 + \frac{4V}{\pi p\sqrt{3}} - \frac{4p^2}{3}$$

**Erkl. 411.** Ueber das Auflösen von Gleichungen wie die nebenstehenden unter 1) und 2), bezw. unter 1) und 3) findet man Ausführliches in Kleyers Lehrbuch der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

**Erkl. 412.** Die durch $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$ angedeutete Division führt man nach den Gesetzen der Partialdivision wie folgt aus:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - y^3 & x - y \\ \pm x^3 \mp x^2y & \overline{x^2 + xy + y^2} \\ \hline x^2y - y^3 & \\ x^2y - xy^2 & \\ - \quad + & \\ \hline xy^2 - y^3 & \\ xy^2 - y^3 & \\ - \quad + & \\ \hline \text{„} \quad \text{„} & \end{array}$$

oder

$$6) \ldots x + y = \sqrt{\frac{4V}{\pi p \sqrt{3}} - \frac{4p^2}{3}}$$

Aus den Gleichungen 1) und 6) findet man endlich durch Addition:

$$2x = p + \sqrt{\frac{4V \cdot \sqrt{3}}{\pi p \cdot 3} - \frac{p^2}{3}}$$

also

$$\text{A)}\ x = \frac{1}{2}\left[p + \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{4V\sqrt{3}}{\pi p} - p^2\right)}\right]$$

Ferner findet man aus den Gleichungen 1) und 6) durch Subtraktion:

$$2y = -p + \sqrt{\frac{4V \cdot \sqrt{3}}{\pi p \cdot 3} - \frac{p^2}{3}}$$

oder

$$\text{B)}\ y = \frac{1}{2}\left[-p + \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{4V \cdot \sqrt{3}}{4\pi} - p^2\right)}\right]$$

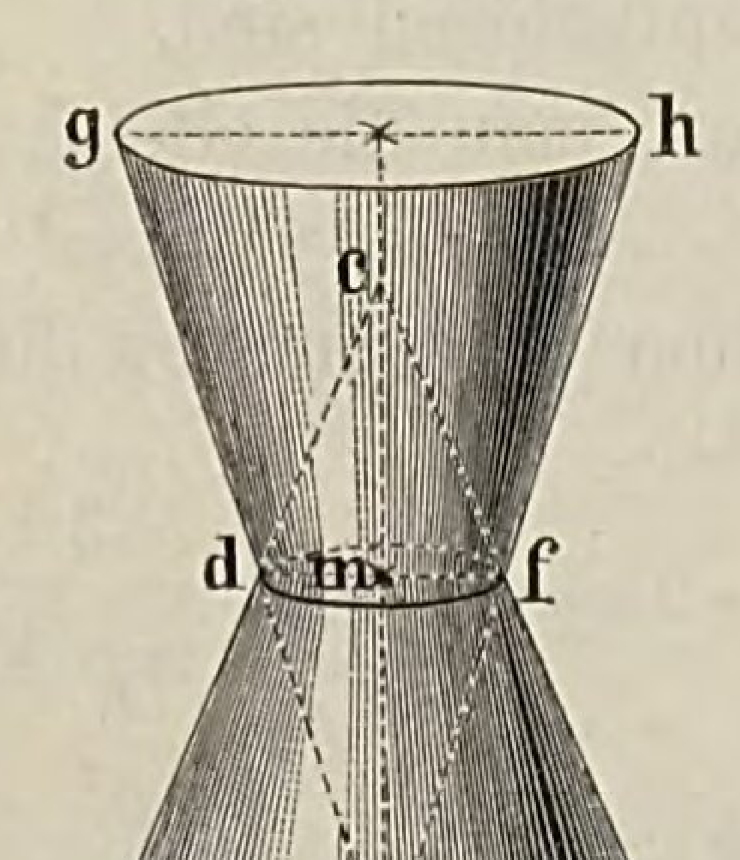
---

**Aufgabe 481.** Ein gerader Kegel wird durch die Mantelfläche eines andern geraden Kegels, dessen Axe in der Axe des ersten Kegels und dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Grundfläche des ersten Kegels liegt, halbiert; wie gross ist der Radius des Schnittkreises, nach welchem sich beide Kegelmantelflächen durchschneiden?

**Formel:**

$$V = \frac{R^2 \pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50).}$$

Figur 120.




**Auflösung.** Stellt, siehe Fig. 120, $gnh$ die Kegelmantelfläche dar, welche den geraden Kegel $cab$ halbiert, bezw. welche den Kubikinhalt des Kegels $cab$ in zwei gleiche Teile teilen soll, so ist aus der Figur ersichtlich, dass der eine jener Teile aus dem Doppelkegel $cdfn$ besteht.

Bezeichnet man den gesuchten Radius $dm$ des Schnittkreises beider Mantelflächen mit $x$, die Höhe $cm$ des einen Kegels $cdf$ mit $y$, die Höhe $mn$ des andern Kegels $ndf$ mit $z$, so hat man nach vorstehender Formel für das Volumen $V$ des erwähnten Doppelkegels $cdfn$:

$$1) \ldots V = \frac{x^2 \pi \cdot y}{3} + \frac{x^2 \pi \cdot z}{3}$$

und dieses Volumen $V$ soll, der Aufgabe gemäss, gleich dem halben Volumen $V_1$ des Kegels $cab$ sein; für welches man nach vorstehender Formel, wenn

der Radius $an$ des Grundkreises $= R$ und die Höhe $cn = cm + mn$ bezw. $y + z$ gesetzt wird:

$$2) \ldots V_1 = \frac{R^2\pi \cdot (y+z)}{3}$$

erhält. Man hat also für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$3) \ldots \frac{x^2\pi y}{3} + \frac{x^2\pi z}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2\pi(y+z)}{3}$$

Hieraus findet man $x$ wie folgt:

$$\frac{x^2\pi(y+z)}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2\pi(y+z)}{3}$$

$$x^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{R^2}{2}};\ x = \sqrt{\frac{R^2}{4} \cdot 2}$$

oder

$$x = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

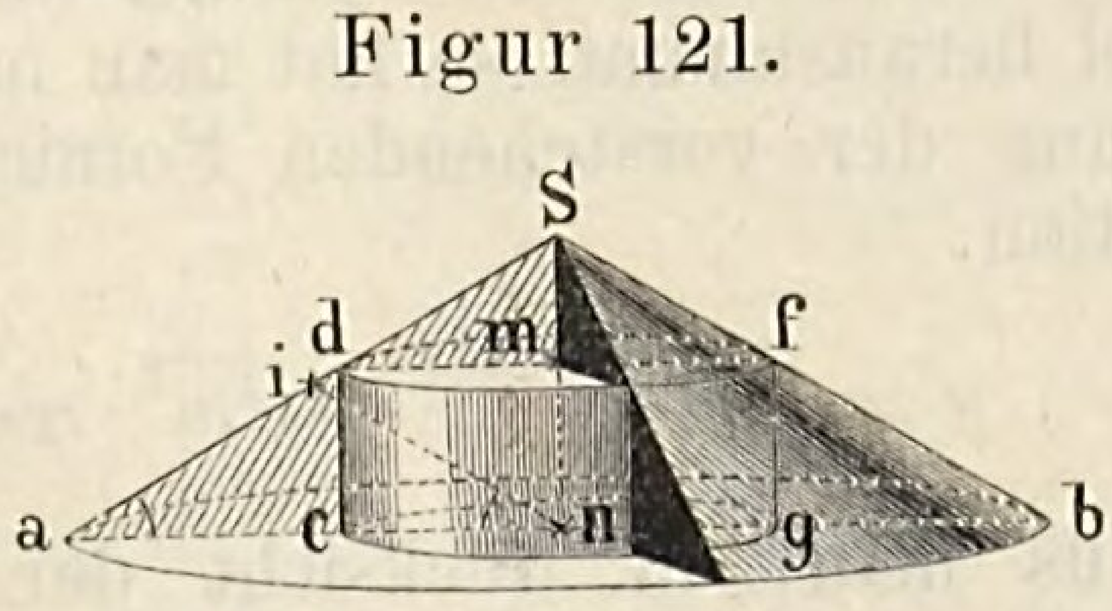
d. h. der gesuchte Radius $x$ ist gleich dem $\frac{1}{2}\sqrt{2}$-fachen des Radius des Grundkreises jenes zu teilenden Kegels.

---

## 9. Der Kegel in Verbindung mit dem Cylinder.

**Aufgabe 482.** In einem geraden Kegel, dessen Höhe $= H$ ist und dessen Seitenlinien gegen die Grundfläche unter einem Winkel von $30^0$ geneigt sind, sei ein gerader Cylinder, welcher halb so hoch als breit ist, so konstruiert, dass dessen eine Grundfläche in der Ebene der Grundfläche des Kegels liegt und dass dessen andre Grundfläche den Mantel des Kegels berührt. Wie gross ist der Grundflächenradius des Cylinders und welches ist das Volumen des übrig bleibenden Körpers, wenn der Cylinder aus dem Kegel genommen wird?

Figur 121.




**Formeln:**

Für einen Cylinder:

$$\text{I.} \ldots V = R^2\pi \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 33)}$$

Für einen Kegel:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{R^2\pi \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe des Kegels eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene, siehe Fig. 121, den Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $abs$ und den Cylinder in dem Rechteck $cdfg$ und man kann zur Bestimmung des gesuchten Radius $x$ ($= cn = dm$) des Grundkreises des Cylinders die Proportion aufstellen:

$$a) \ldots dm : an = ms : ns$$

indem man in dieser Proportion:

**Erkl. 413.** Ein planimetrischer Satz heisst:

„Ist in einem rechtwinkligen Dreieck einer der spitzen Winkel $= 30^0$ (also der andre spitze Winkel $= 60^0$), so ist die Hypotenuse doppelt so gross als die Kathete, welche dem Winkel von $30^0$ gegenüberliegt, bezw. welche dem Winkel von $60^0$ anliegt."

Dies kann man leicht wie folgt nachweisen:

Ist in dem rechtwinkligen Dreieck $ans$, siehe Figur 120, $\sphericalangle san = 30^0$, also $\sphericalangle asn = 60^0$ und man denkt sich die Linie $ni$ so gezogen, dass $\sphericalangle ins$ ebenfalls $= 60^0$ wird, so ist das Dreieck $sin$ ein gleichseitiges, folglich:

a) . . . $is = in = sn$

ferner ist aber auch, da der Winkel $ina = 90^0 - 60^0$ also $= 30^0$ ist, das Dreieck $ani$ ein gleichschenkliges, mithin:

b) . . . $in = ia$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt also:

c) . . . $is = in = sn = ia$

Da nun:

d) . . . $as = ia + is$

ist, so folgt aus den Gleichungen d) und c):

$$as = sn + sn$$

oder

e) . . . $as = 2 \cdot sn$

**Erkl. 414.** Aus dem bei $n$ rechtwinkligen Dreieck, siehe Fig. 120, ergibt sich die Relation:

a) . . . $an = \sqrt{\overline{as}^2 - \overline{sn}^2}$

Da nun Winkel $san = 30^0$, also nach der Erkl. 413 $as = 2 \cdot sn$ ist, so geht die Gleich. a), wenn man für $sn = H$ setzt, über in:

$$an = \sqrt{(2H)^2 - H^2}$$

mithin ist:

$$an = \sqrt{4H^2 - H^2} = \sqrt{3H^2}$$

oder

b) . . . $an = H\sqrt{3}$

b) . . . $dm = x$

c) . . . $ns = H$, nämlich gleich der gegebenen Höhe des Kegels,

d) . . . $ms = ns - nm = H - nm$

$$= H - \frac{df}{2} = H - x$$

(da der Cylinder halb so hoch als breit sein soll)

und nach der Erkl. 413:

e) . . . $an = H \cdot \sqrt{3}$

setzen kann.

Mittels vorstehender Relationen a) bis e) erhält man somit für $x$ die Bestimmungsgleichung:

1) . . . $x : H\sqrt{3} = (H - x) : H$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$xH = H^2\sqrt{3} - xH\sqrt{3}$$

$$xH + xH\sqrt{3} = H^2\sqrt{3}$$

$$x + x\sqrt{3} = H\sqrt{3}$$

$$x(1 + \sqrt{3}) = H\sqrt{3}$$

$$x = \frac{H\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{H\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}$$ (s. Erkl. 364)

$$x = \frac{H[\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2]}{1^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$x = \frac{H(\sqrt{3} - 3)}{-2}$$

Der gesuchte Radius $x$ ist also, wenn man Zähler und Nenner des Bruches durch $-1$ dividiert:

A) . . . $x = \frac{H}{2}(3 - \sqrt{3})$

Will man ferner noch das Volumen $y$ des Körpers berechnen, welcher übrig bleibt, wenn man den Cylinder aus dem Kegel herausnimmt, so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formeln die Relation:

f) . . . $y = \frac{\overline{an}^2 \cdot \pi \cdot ns}{3} - \overline{dm}^2 \cdot \pi \cdot mn$

woraus man, in Rücksicht der Gleichungen b) bis e) und in Rücksicht des für $x$, bezw. für $dm$, mittels vorstehender

Gleichung A) gefundenen Wertes, für $y$ die Bestimmungsgleichung erhält:

$$y = \pi \cdot \left[\frac{(H\sqrt{3})^2 \cdot H}{3} - \left(\frac{H}{2}(3-\sqrt{3})\right)^2 \cdot \frac{H}{2}(3-\sqrt{3})\right]$$

Reduziert man die rechte Seite dieser Gleichung, so erhält man:

$$y = \pi \cdot \left[\frac{3H^2 \cdot H}{3} - \frac{H^2}{4}(3-\sqrt{3})^2 \cdot \frac{H}{2}(3-\sqrt{3})\right]$$

$$y = \pi\left[H^3 - \frac{H^3}{8}(3-\sqrt{3})^3\right]$$

$$y = \pi H^3\left[1 - \frac{1}{8}(3-\sqrt{3})^3\right]$$

$$y = \pi H^3 \cdot \frac{8-(3-\sqrt{3})^3}{8}$$

$$y = \pi H^3 \cdot \frac{8-(5 \cdot 4 - 30\sqrt{3})}{8}$$ (s. d. Erkl) 415 u. 416.

$$y = \pi H^3 \cdot \frac{-46 + 30\sqrt{3}}{8}$$

Das gesuchte Volumen $y$ ist somit:

$$\text{B)} \ldots y = \frac{\pi H^3}{4}(15\sqrt{3} - 23)$$

**Erkl. 415.** Ein Lehrsatz aus der Potenzenlehre heisst:

„Der Kubus eines Binoms besteht aus dem Kubus des ersten Gliedes, aus dem 3-fachen Produkt des Quadrats des ersten Gliedes und dem zweiten Gliede, aus dem 3-fachen Produkt des ersten Gliedes und dem Quadrat des zweiten Gliedes und aus dem Kubus des zweiten Gliedes"

in Zeichen:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

**Erkl. 416.** Nach der Erkl. 415 erhält man für

$$(3-\sqrt{3})^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot -\sqrt{3} + 3 \cdot 3 \cdot (-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^3$$
$$= 27 - 27\sqrt{3} + 27 - (\sqrt{3})^3$$
$$= 27 - 27\sqrt{3} + 27 - (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$= 27 - 27\sqrt{3} + 27 - 3\sqrt{3}$$
$$= 54 - 30\sqrt{3}$$

---

**Aufgabe 483.** Aus einem geraden Cylinder, dessen Höhe $= H$ und dessen Grundflächenradius $= R$ ist, sind zwei Kegel so herausgeschnitten, dass deren Grundflächen mit den Endflächen des Cylinders gleich sind und dass deren gemeinsame Spitze in einem beliebigen Punkte der Axe des Cylinders liegt. Wie gross ist das Volumen des somit übrig bleibenden Teils des Cylinders?

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

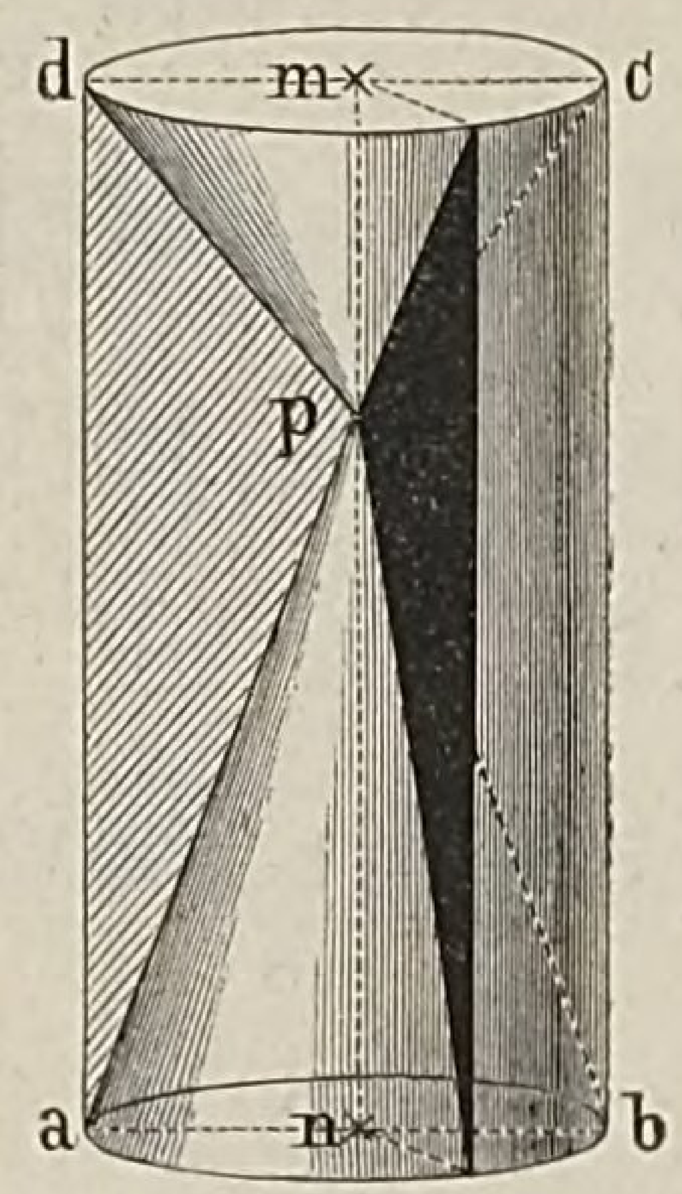
I. . . . $V = R^2\pi \cdot H$ (s. Erkl. 33)

Für einen Kegel:

II. . . . $V = \dfrac{R^2\pi H}{3}$ (s. Erkl. 50).

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 122, durch die Axe $mn$ des Cylinders eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Cylinder in dem Rechteck $abcd$ und beide gedachten Kegel in den gleichschenkligen Dreiecken $abp$ und $dcp$, deren gemeinsame Spitze $p$ in einem beliebigen Punkt der Cylinderaxe $mn$ liegt. Denkt man sich die beiden Kegel $pdc$ und $pab$ aus dem Cylinder herausgenommen, so bleibt ein Körper

Figur 122.




übrig, dessen gesuchtes Volumen $x$ gleich dem Volumen des Cylinders $abcd$ weniger den Volumina der Kegel $pdc$ und $pab$ ist.

Nach vorstehenden Formeln hat man somit für das gesuchte Volumen $x$ des übrig bleibenden Körpers, die Relation:

$$x = \overline{an}^2 \cdot \pi \cdot nm - \frac{\overline{an}^2 \pi \cdot np}{3} - \frac{\overline{dm}^2 \cdot \pi \cdot mp}{3}$$

oder wenn man berücksichtigt, dass $dm = an$ ist, die Relation:

a) . . $x = \overline{an}^2 \cdot \pi \cdot \left[ nm - \frac{1}{3}(np + mp) \right]$

Da nun:

b) . . . $an = R$, nämlich gleich dem gegebenen Radius $R$ des Grundkreises des Cylinders,

c) . . . $nm = H$, nämlich gleich der gegebenen Höhe $H$ d. Cylinders

und

d) . . . $np + mp = nm = H$

ist, so erhält man für das Volumen $x$ des übrig bleibenden Körpers, die Bestimmungsgleichung:

$$x = R^2 \pi \left( H - \frac{1}{3} H \right)$$

mithin ist:

A) . . . $x = \frac{2 R^2 \pi H}{3}$

---

**Aufgabe 484.** Auf jeder Grundfläche eines Cylinders, dessen Höhe $= H$ und dessen Grundflächenradius $= R$ ist, denke man sich je einen Kegel so konstruiert, dass dessen Spitze in dem Mittelpunkt der andern Grundfläche des Cylinders zu liegen kommt. In welchem Verhältnis steht das Volumen des den beiden gedachten Kegeln gemeinsamen Körpers zu dem Volumen des Körpers, welcher übrig bleibt, wenn man jene Kegel aus dem Cylinder herausgenommen denkt, und wie gross ist das Volumen des aus dem Cylinder herausgenommenen Körperstücks und welches ist schliesslich die Oberfläche jenes übrig bleibenden Teils des Cylinders?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. . . . $V = \frac{R^2 \pi H}{3}$ (s. Erkl. 50)

II. . . . $M = \pi s (R + r)$ (s. Erkl. 56)

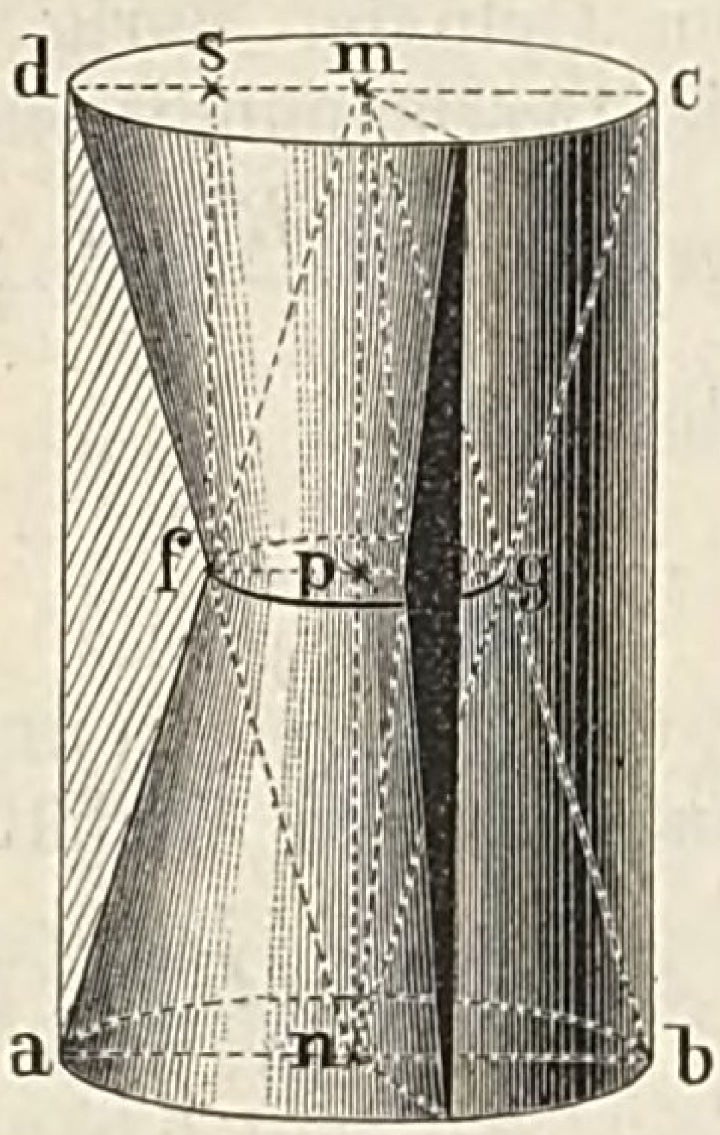
Für einen Cylinder:

III. . . . $V = R^2 \pi H$ (s. Erkl. 33)

IV. . . . $M = 2 R \pi H$ (s. Erkl. 47).

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 123, durch die Axe $mn$ des Cylinders eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Cylinder in dem Rechteck $abcd$, den einen der in dem Cylinder konstruiert gedachten Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $abm$, den andern

Figur 123.




**Erkl. 417.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Sind in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist dieses Viereck ein Parallelogramm."

Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie, speziell das Lehrbuch, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.

**Erkl. 418.** In der Figur 123 ist $dm \parallel nb$, ferner ist $dm = nb$, somit ist nach der Erklärung 417 das Viereck $dmnb$ ein Parallelogramm und da gemäss der Konstruktion in Figur 123 auch $fg \parallel dm$, bezw. $\parallel nb$ sein muss, so ist nach der Erkl. 419 auch:

$$fg = dm, \text{ bezw. } = nb$$

**Erkl. 419.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich."

dieser Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $dcn$. Die Mantelflächen der beiden Kegel durchschneiden sich in dem Kreise $fg$, welcher die gemeinsame Grundfläche der Kegel $mfg$ und $nfg$ bildet, die in ihrer Gesamtheit das Körperstück ausmachen, welches die beiden Kegel, die in den Cylinder konstruiert zu denken sind, gemeinsam haben.

Zur Bestimmung des nach der Aufgabe gesuchten Verhältnisses verfahre man folgendermassen:

Wie bereits erwähnt, besteht das Körperstück, welches den in dem Cylinder konstruiert gedachten zwei Kegeln gemeinsam ist, aus dem Doppelkegel $mfgn$; nach vorstehender Formel hat man für das Volumen $V$ desselben somit die Relation:

$$V = \frac{\overline{fp}^2 \cdot \pi \cdot pm}{3} + \frac{\overline{fp}^2 \cdot \pi \cdot pn}{3}$$

oder

$$\text{a) } \ldots \; V = \frac{\overline{fp}^2 \cdot \pi}{3}(pm + pn)$$

Da nun nach der Erkl. 418:

$$fg = dm$$

also $$\frac{fg}{2} = \frac{dm}{2}$$

bezw.

$$\text{b) } \ldots \; fp = \frac{dm}{2} = \frac{R}{2}$$ ist, wenn man den Radius eines Grundkreises des Cylinders mit $R$ bezeichnet,

und da ferner:

$$\text{c) } . \; pm + pn = nm = H,$$ nämlich gleich der Höhe des Cylinders ist,

so erhält man aus Gleichung a) für das Volumen $V$ des Doppelkegels $mfgn$ die Bestimmungsgleichung:

$$\text{1) } \ldots \; V = \frac{1}{12} R^2 \pi H$$

Um das Volumen $V_1$ des Körpers zu finden, welcher übrig bleibt, wenn die beiden einander gleichen Kegel herausgenommen werden, beachte man, dass wenn man von dem Volumen des Cylinders die Volumina der beiden Kegel wegnimmt, der den beiden Kegeln gemeinsame Doppelkegel $mfgn$ zweimal, also einmal zu viel, weggenommen wurde, dass man also das Volumen $V$ dieses

Doppelkegels zu der erwähnten Differenz wieder addieren muss.

Nach vorstehenden Formeln 1) und 3) und nach der vorhin entwickelten Gleichung 1) besteht somit für das Volumen $V_1$ des vom Cylinder übrig bleibenden Körpers die Bestimmungsgleichung:

$$V_1 = R^2\pi H - 2\cdot\frac{R^2\pi H}{3} + \frac{R^2\pi H}{12}$$

Man erhält also:

$$2) \ldots V_1 = \frac{5}{12} R^2\pi H$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 = \frac{1}{12} R^2\pi H : \frac{5}{12} R^2\pi H$$

oder

$$V : V_1 = \frac{1}{12} : \frac{5}{12}$$

mithin

$$A) . \; V : V_1 = 1 : 5$$

Das gesuchte Volumen $x$ des aus dem Cylinder herausgenommenen Körperstücks ist, wie schon erwähnt, gleich der Summe der Volumina der beiden im Cylinder konstruiert gedachten gleichen Kegel weniger dem Volumen des hierbei doppelt gerechneten Doppelkegels $mfgn$. Man hat also für jenes Volumen $x$ nach vorstehender Formel 1) und nach der vorhin aufgestellten Gleichung 1):

$$x = 2\cdot\frac{R^2\pi H}{3} - \frac{1}{12} R^2\pi H$$

oder

$$B) \ldots x = \frac{7}{12} R^2\pi H$$

Die gesuchte Oberfläche $y$ des von dem Cylinder übrig bleibenden Körpers besteht aus dem Mantel des Cylinders und aus der Summe der gleichen Mäntel der abgestumpften Kegel $dcgf$ und $abgf$.

Da nun die Seitenlinie eines dieser Kegelstumpfe, z. B. die Seitenlinie $df$ des Kegelstumpfs

$$dcgf = \sqrt{\overline{fs}^2 + \overline{ds}^2} = \sqrt{\overline{pm}^2 + (dm - sm)^2}$$

$$= \sqrt{\overline{pm}^2 + (dm - fp)^2}$$, bezw. nach vorstehender Gleich. b)

$$= \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{R^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + R^2}$$ gesetzt werden kann,

so hat man mittels Benutzung der vorstehenden Formeln 2) und 4) für die gesuchte Oberfläche $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$3) \ldots y = 2R\pi H + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{H^2 + R^2}\left(R + \frac{R}{2}\right)$$

und hieraus ergibt sich:

$$y = 2\pi\left(RH + \frac{3R}{4}\sqrt{H^2 + R^2}\right)$$

oder

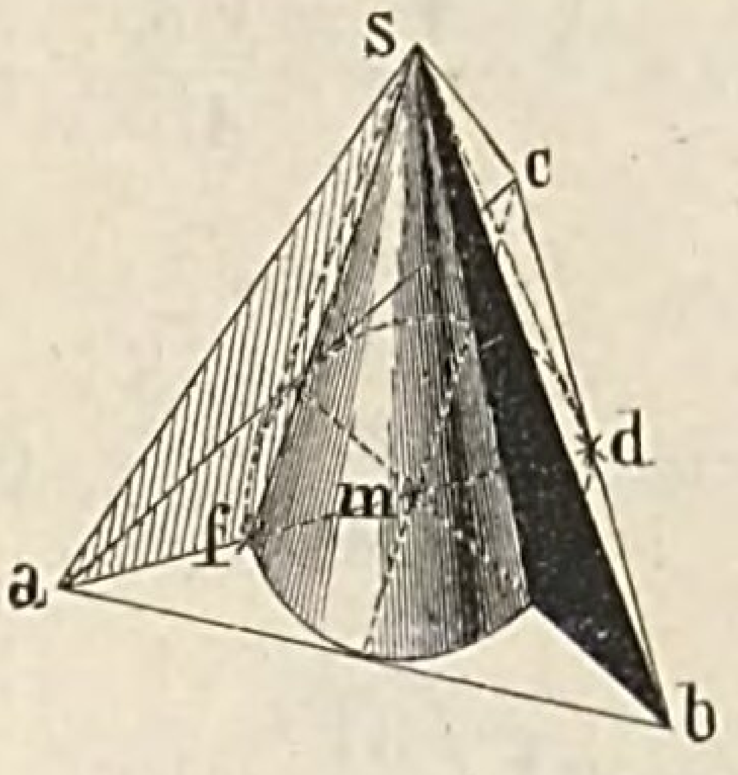
$$c) \ldots y = 2\pi R\left(H + \frac{3}{4}\sqrt{H^2 + R^2}\right)$$

---

## 10. Der Kegel in Verbindung mit der Pyramide.

**Aufgabe 485.** Das Volumen eines gleichseitigen Kegels sei $= V$; wie gross ist das Volumen und die Oberfläche der jenem Kegel umschriebenen, geraden, dreiseitigen Pyramide?

Figur 124.




**Formel:**

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 28).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 124, durch die Höhe $sm$ des Kegels und durch eine Seitenkante $as$ der dem Kegel umschrieben gedachten, dreiseitigen Pyramide eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $fds$ und die Pyramide in dem ungleichseitigen Dreieck $ads$, dessen eine Seite $as$ jene Seitenkante, dessen zweite Seite $ad$ die Höhe des dem Kegelgrundkreis umschriebenen, gleichseitigen Dreiecks $abc$ und dessen dritte Seite $ds$ die Höhe des Dreiecks $bcs$, bezw. die Seitenlinie $ds$ des Kegels ist.

Zur Bestimmung des gesuchten Volumens $x$ der dem Kegel umschriebenen Pyramide muss man nach vorstehender Formel die Grundfläche, d. i. der Inhalt des Dreiecks $abc$ und die Höhe $ms$ berechnen und zwar aus dem gegebenen Volumen $V$ des gleichseitigen Kegels $fds$, was in nachstehendem zunächst geschieht. Da der Kegel ein gleichseitiger, also der Axenschnitt $fds$ ein gleichseitiges Dreieck ist, so ist nach der Erkl. 25:

$$sm = \frac{fd}{2}\sqrt{3}$$

Bezeichnet man also den Radius $fm = \frac{fd}{2}$ des Kreises um $m$ mit $r$, die

Höhe $sm$ mit $H$, so besteht hiernach die Relation:

$$\text{a)} \ldots H = r\sqrt{3}$$

Da ferner zwischen dem Volumen $V$ eines gleichseitigen Kegels und dem Radius $r$ dessen Grundkreises nach der Erkl. 116 die Relation besteht:

$$\text{b)} \ldots V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}$$

so erhält man hiernach für $r$:

$$\text{c)} \ldots r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}}$$

und aus Gleichung a) für $H$:

$$\text{d)} \ldots H = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}$$

Da man nun den Radius $r$ des dem gleichseitigen Dreieck $abc$ einbeschriebenen Kreises kennt, so erhält man für eine Seite $ab$ desselben nach der Erklärung 342:

$$\text{e)} \ldots ab = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}$$

Nach der Erkl. 10 erhält man somit für den Inhalt des Dreiecks $abc$, bezw. für den Inhalt $G$ der Pyramidengrundfläche:

$$G = \frac{\left(2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

oder

$$G = \frac{4\sqrt[3]{\frac{9V^2}{\pi^2 \cdot 3}} \cdot 3}{4} \cdot \sqrt{3}$$

mithin:

$$\text{f)} \ldots G = 3\sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}} \cdot \sqrt{3}$$

Mittels der Gleichungen d) und f) erhält man somit nach vorstehender Formel für das gesuchte Volumen $x$ der Pyramide die Bestimmungsgleichung:

$$1). \; x = \frac{3\sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung reduziert, gibt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9V^3}{\pi^3\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3^2}$$

$$x = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{9 \cdot \sqrt{3}}{3}} \cdot 3$$

$$x = \frac{3V}{\pi}\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{3V}{\pi}\sqrt[3]{\sqrt{3^2 \cdot 3}}$$

$$x = \frac{3V}{\pi}\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}$$

das gesuchte Volumen $x$ ist also:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{3V}{\pi}\sqrt{3}$$

Zur Berechnung der gesuchten Oberfläche $y$ der Pyramide besteht, wenn man die Seite $ab$ ($= bc = ca$) des gleichseitigen Dreiecks $abc$ mit $u$ bezeichnet, die Relation:

$$\text{g)} \ldots y = \frac{u^2}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{u \cdot \overline{ds}}{2}$$

Substituiert man hierin für $u$ ($= ab$) den mittels Gleichung e) gefundenen Wert und berücksichtigt man, dass sich aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $dms$:

$$\text{g)} \ldots \overline{ds} = \sqrt{\overline{ms}^2 + \overline{dm}^2} = \sqrt{H^2 - r^2}$$

bezw. nach der Gleich. a)

$$= \sqrt{(r\sqrt{3})^2 + r^2} = \sqrt{3r^2 + r^2}$$
$$= \sqrt{4r^2} = 2r$$

ergibt, dass also nach der Gleichung c)

$$\text{g)} \ldots ds = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}}$$

ist, so erhält man für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$2) \ldots y = \frac{\left(2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}\right)^2}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}}}{2}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

$$y = \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}}\right)^2 \cdot \left[\frac{4 \cdot (\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2}\right]$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9V^2}{\pi^2 \cdot 3}} \cdot \left[3\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right]$$

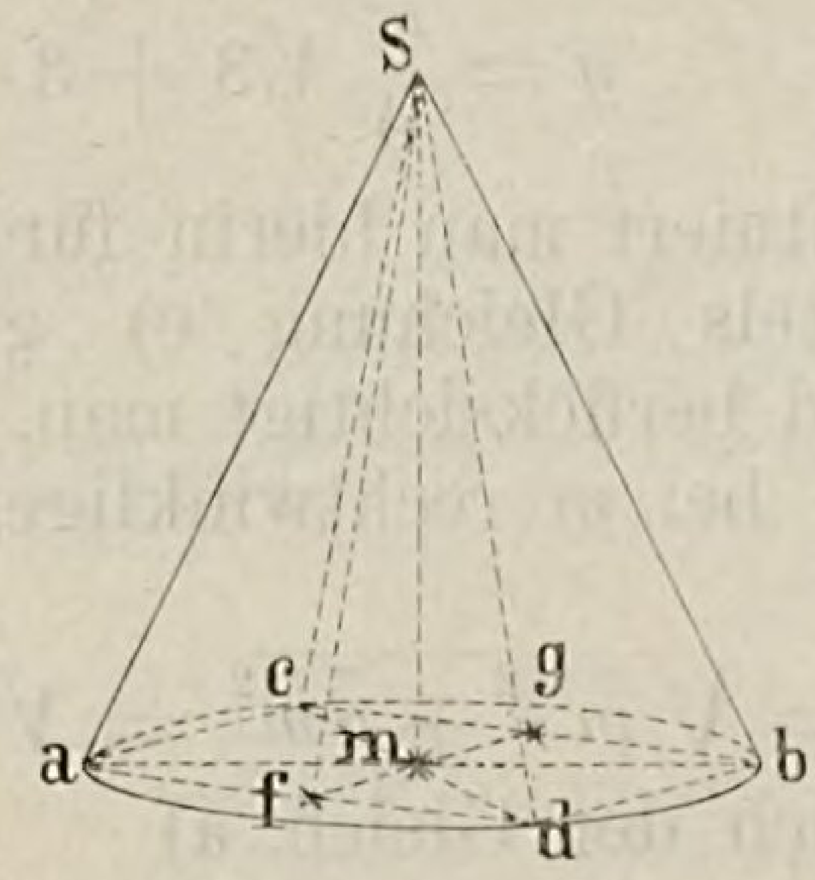
Die gesuchte Oberfläche $y$ ist also:

$$B) \ldots y = 9\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}}$$

---

**Aufgabe 486.** Einem geraden Kegel, dessen Grundflächenradius $R$ und dessen Höhe $H$ gegeben ist, denke man sich eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis einbeschrieben. Wie gross ist die Oberfläche dieser Pyramide?

Figur 125.




**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Fig. 125, durch die Höhe $ms$ des Kegels $sab$ und eine Seitenkante $as$ der diesem Kegel einbeschrieben gedachten Pyramide $sadbc$ eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $abs$, dessen Schenkel $as$ und $bs$ gleich den Seitenlinien und dessen Basis gleich dem Durchmesser des Grundkreises des Kegels ist; ferner schneidet diese Ebene die Pyramide in demselben gleichschenkligen Dreieck $abs$, dessen Schenkel $as$ und $bs$ gleich der Seitenkante der Pyramide und dessen Basis gleich der Diagonale der quadratischen Grundfläche der Pyramide ist.

Zur Bestimmung der gesuchten Oberfläche $y$ der Pyramide besteht die Relation:

$$a) \ldots y = \overline{ad}^2 + 4 \cdot \frac{\overline{ad} \cdot \overline{sf}}{2}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass $ad$ die Seite des Quadrats $adbc$ ist, dessen Diagonale $ab = 2R$ gegeben ist, dass also:

$$\overline{ad}^2 + \overline{db}^2 = \overline{ab}^2$$

oder

$$2\,\overline{ad}^2 = (2R)^2$$

mithin

$$b) \ldots \overline{ad}^2 = \frac{4R^2}{2} = 2R^2$$

und

$$c) \ldots ad = R\sqrt{2}$$

ist und dass ferner in dem rechtwinkligen Dreieck $fms$:

$$\overline{sf}^2 = \overline{ms}^2 + \overline{fm}^2 = \overline{ms}^2 + \left(\frac{fg}{2}\right)^2$$

$$= \overline{ms}^2 + \left(\frac{db}{2}\right)^2 = \overline{ms}^2 + \left(\frac{ad}{2}\right)^2$$

ist, dass also nach der Gleichung b):

$$\overline{sf} = \sqrt{H^2 + \frac{2R^2}{4}}$$

oder

$$\text{d)} \ldots \overline{sf} = \sqrt{H^2 + \frac{R^2}{2}}$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen a) bis d) für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$y = 2R^2 + 4 \cdot \frac{R\sqrt{2} \cdot \sqrt{H^2 + \frac{R^2}{2}}}{2}$$

Die gesuchte Oberfläche $y$ ist somit:

$$y = 2R^2 + 2R\sqrt{2H^2 + R^2}$$

oder

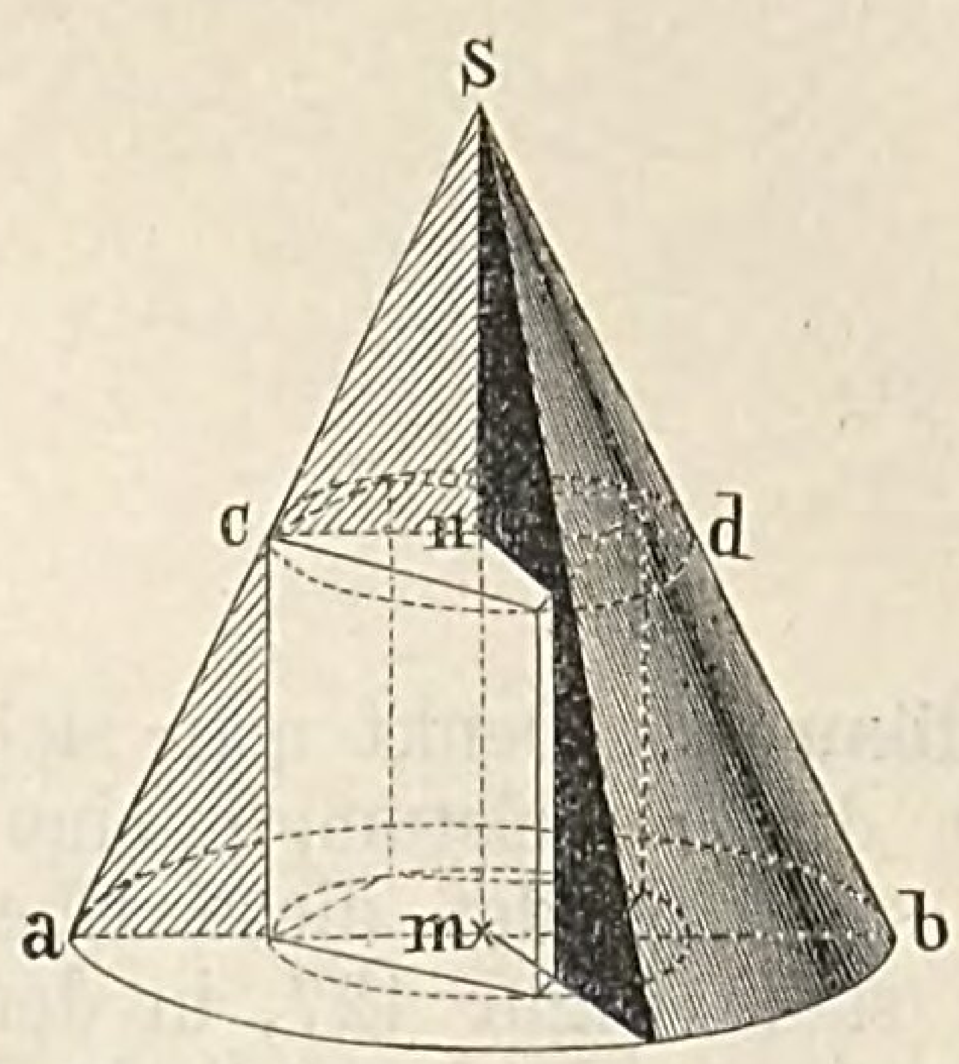
$$y = 2R(R + \sqrt{2H^2 + R^2})$$

---

## 11. Der Kegel in Verbindung mit dem Prisma.

**Aufgabe 487.** In einem geraden Kegel, dessen Höhe $= H$ ist, denke man sich ein gerades, 4-seitiges Prisma so konstruiert, dass dessen obere Begrenzungsfläche dem Schnittkreis des Kegels einbeschrieben ist, welcher den Mantel des Kegels, von der Kegelspitze aus gerechnet, im Verhältnis von $p:q$ teilt. Wie gross ist das Volumen jenes Prismas, wenn dessen untere Begrenzungsfläche in der Kegelgrundfläche liegt und ein Viereck mit den Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ ist?

Figur 126.




**Formeln:**

Für ein Prisma:

I. . . . $V = G \cdot H$ (s. Erkl. 1)

Für einen Kegel:

II. . . . $M = \pi R \cdot s$ (s. Erkl. 49).

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des in dem Kegel konstruiert gedachten Prismas hat man nach vorstehender Formel I, wenn man nach der Erkl. 406 für den Inhalt $G$ der Grundfläche desselben, welche ein unregelmässiges Kreisviereck mit den Seiten $a$, $b$, $c$ und $d$ ist:

$$\text{a)} \ldots G = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

und für die unbekannte Höhe $H = y$ setzt, die Relation:

$$1) \ldots x = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \cdot y$$

Zur Bestimmung der Höhe $y$ beachte man folgendes:

Ist, siehe Fig. 126, $cd$ der Schnittkreis des Kegels, welcher den Mantel desselben, von der Spitze $s$ aus gerechnet, im Verhältnis von $p:q$ teilt, so hat man für den Abstand $ns$ dieses Schnittkreises von der Spitze $s$ die Relation:

$$\text{b)} \ldots ns = ms - mn = H - y$$

**Erkl. 420.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Die Mantelflächen zweier ähnlichen, geraden Kegel (d. s. zwei solche gerade Kegel, deren Grundflächenradien in demselben Verhältnis wie ihre Höhen stehen) verhalten sich wie die Quadrate der Höhen, oder wie die Quadrate der Seitenlinien, oder wie die Quadrate der Grundflächenradien.“

Dies kann man wie folgt nachweisen:

In Figur 126 sind $abs$ und $cds$ zwei ähnliche Kegel, weil die Proportion $am : cn = ms : ns$ besteht.

Nun hat man nach umstehender Formel II) für den Mantel $M$ des Kegels $abs$:

$$\text{a) } \ldots M = \pi \cdot as \cdot am$$

und für den Mantel $M_1$ des Kegels $cds$:

$$\text{b) } \ldots M_1 = \pi \cdot cs \cdot cn$$

Somit besteht die Proportion:

$$\text{c) } \ldots \frac{M}{M_1} = \frac{\pi \cdot as \cdot am}{\pi \cdot cs \cdot cn}$$

Da nun, wie aus der Figur 126 ersichtlich ist:

$$\frac{as}{cs} = \frac{am}{cn} \text{ oder } = \frac{ms}{ns}$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus Gleich. c):

$$\text{d) } \ldots \frac{M}{M_1} = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cn}^2} = \frac{\overline{as}^2}{\overline{cs}^2} = \frac{\overline{ms}^2}{\overline{ns}^2}$$

d. i. vorstehende Aussage.

Denkt man sich nun den Kegelmantel $cds$ aus $p$ gleichen Teilen bestehend, so muss, gemäss der Aufgabe, der Kegelstumpfmantel $abdc$ aus $q$, also der ganze Kegelmantel $abs$ aus $(p+q)$ denselben Teilen bestehen und man hat nach der Erkl. 420, da das Verhältnis $p : (p+q)$ der beiden ähnlichen Kegelmäntel $cds$ und $abs$ bekannt ist, in bezug auf die Höhen $ms$ $(= H)$ und $ns$ $(= H - y)$, die Relation:

$$2) \ldots \frac{p}{p+q} = \frac{(H-y)^2}{H^2}$$

Aus dieser Gleichung findet man die Höhe $y\,(= mn)$ des Prismas wie folgt:

$$\sqrt{\frac{p}{p+q}} = \frac{H-y}{H}$$

$$H\sqrt{\frac{p}{p+q}} = H - y$$

$$y = H - H \cdot \sqrt{\frac{p}{p+q}}$$

oder

$$3) \ldots y = H\left(1 - \sqrt{\frac{p}{p+q}}\right)$$

Aus den Gleichungen 1) und 3) ergibt sich somit für das gesuchte Volumen $x$ des Prismas:

$$\text{A) } \ldots x = H\left(1 - \sqrt{\frac{p}{p+q}}\right)\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

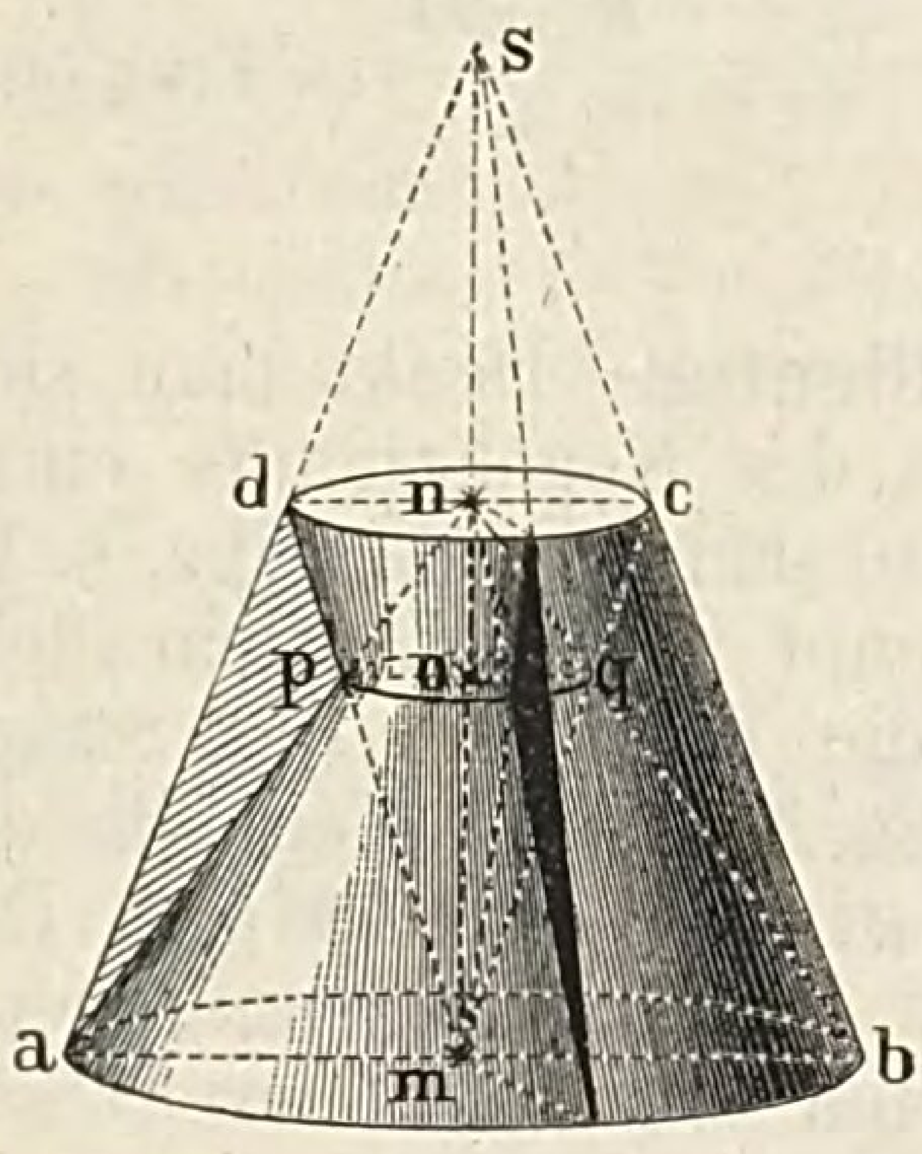
---

## 12. Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Kegel.

**Aufgabe 488.** In einem geraden Kegelstumpf, dessen Grundflächenradien $R$ und $r$ gegeben sind, seien zwei gerade Kegel so konstruiert, dass die Grundflächen des Stumpfes, bezw. die Grundflächen dieser Kegel und dass die Mitten jener Grundflächen, bezw. die Spitzen der beiden Kegel bilden. Wie gross ist der Radius des Kreises, in welchem sich die beiden in den Kegelstumpf konstruierten Kegel durchschneiden?

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe des Kegelstumpfs eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene den Stumpf, siehe Figur 127, in dem Antiparallelogramm $abcd$ und die beiden, der Aufgabe gemäss in jenen Stumpf konstruiert gedachten Kegel in den gleichschenkligen Dreiecken $abn$ und $dcm$.

Figur 127.




**Erkl. 421.** Nebenstehende Gleichung:

3) . . . $R \cdot y = r(H - y)$

nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$R \cdot y = rH - ry$$

$$Ry + ry = rH$$

$$y(R + r) = rH$$

a) . . . $y = \frac{rH}{R + r}$

Jene gedachte Ebene durchschneidet aber auch den Kreis, in welchem sich die beiden Kegel schneiden, in dem Durchmesser $pq$, welcher parallel den Seiten $ab$ und $dc$ des Antiparallelogramms $abcd$ ist.

Bezeichnet man den gesuchten Radius $po$ des Schnittkreises der beiden Kegel mit $x$, die Höhe $mn$ des Stumpfs mit $H$, den Abstand $on$ des Schnittkreises $pq$ von der Deckfläche $dc$ mit $y$, also den Abstand $om$ des Schnittkreises $pq$ von der Grundfläche $ab$ mit $(H - y)$ und berücksichtigt man, dass $am$ der gegebene Radius $R$ des Grundkreises, $dn$ der gegebene Radius $r$ der Deckfläche ist, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken $amn$ und $pqn$, bezw. aus den ähnlichen Dreiecken $dnm$ und $pom$ die Proportionen:

1) . . . $\frac{x}{R} = \frac{y}{H}$ $\left(\text{d. i. } \frac{po}{am} = \frac{on}{mn}\right)$

2) . . . $\frac{x}{r} = \frac{H - y}{H}$ $\left(\text{d. i. } \frac{po}{dn} = \frac{om}{nm}\right)$

Aus diesen Gleichungen erhält man zunächst:

a) . . . $x \cdot H = R \cdot y$

und

b) . . . $x \cdot H = r(H - y)$

oder die Bestimmungsgleichung für $y$:

3) . . . $R \cdot y = r(H - y)$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 421 für $y$:

4) . . . $y = \frac{rH}{R + r}$

Substituiert man diesen Wert für $y$ in Gleichung 1), so erhält man für den gesuchten Radius $x$:

$$\frac{x}{R} = \frac{rH}{(R + r)H}$$

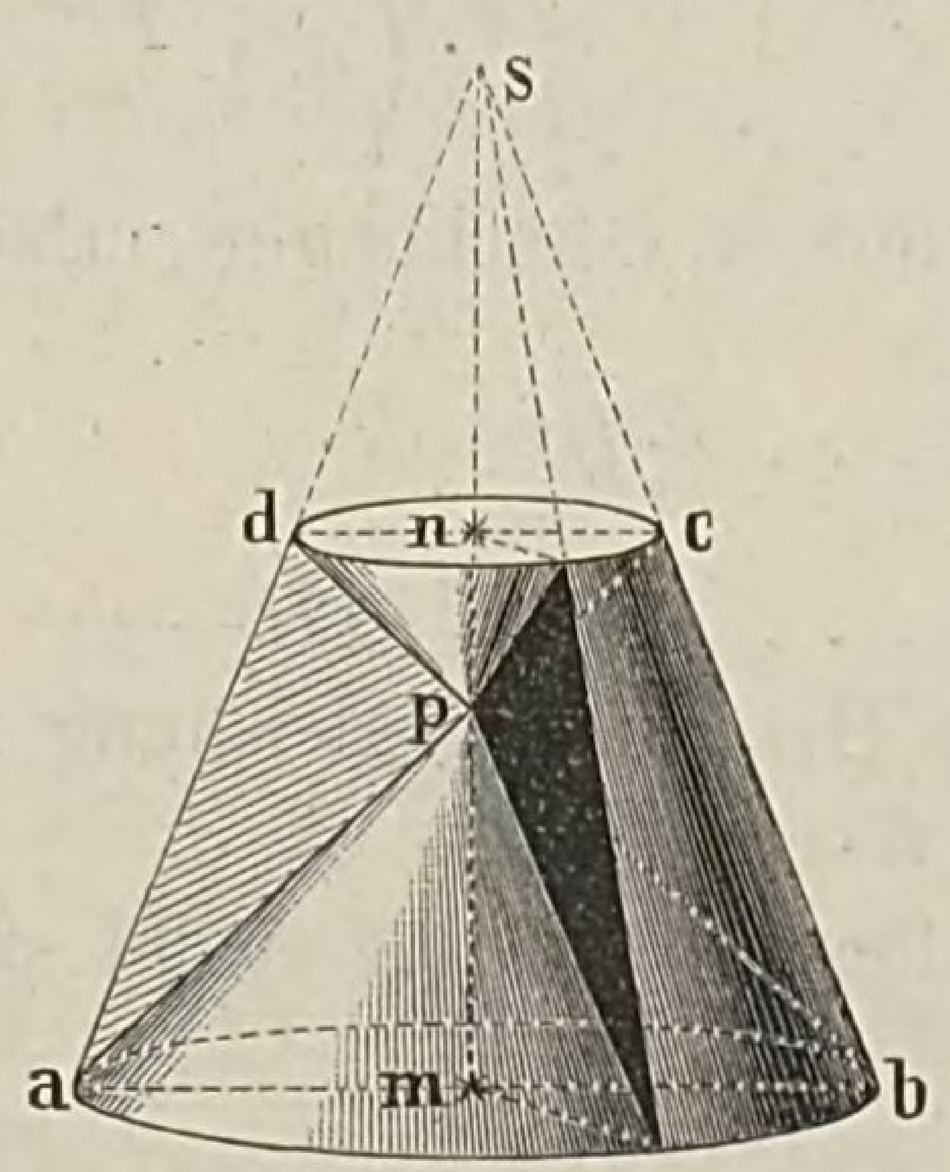
oder

A) . . . $x = \frac{rR}{R + r}$ *)

*) Aus dieser allgemeinen Lösung ergibt sich, dass der Radius des Schnittkreises der beiden Kegel unabhängig von der Höhe des Kegelstumpfs ist, in welchem jene Kegel der Aufgabe gemäss konstruiert sind.

**Aufgabe 489.** In einem geraden Kegelstumpf, dessen Grundflächenradien $R$ und $r$ gegeben sind, seien zwei ähnliche gerade Kegel so konstruiert, dass die Grundflächen derselben bezw. mit den Grundflächen des Kegelstumpfs zusammenfallen und dass sie eine gemeinschaftliche, in der Axe des Kegelstumpfs liegende Spitze haben. In welchem Verhältnis steht das Volumen des Kegelstumpfs zur Summe der Volumina beider Kegel?

Figur 128.




**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(s. Erkl. 53)

Für einen Kegel:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{R^2 \pi H}{3}$$ (s. Erkl. 50).

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe des Kegelstumpfs eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe, s. Fig. 128, den Stumpf in dem Antiparallelogramm $abcd$, die beiden in den Stumpf konstruierten ähnlichen Kegel in den ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken $abp$ und $dcp$, deren Grundlinien $ab$ und $dc$ parallel sind und deren Spitzen in dem Punkte $p$ liegen.

Bezeichnet man das Volumen des Kegelstumpfs $abcd$ mit $V$, das Volumen des Kegels $pab$ mit $V_1$, das Volumen des Kegels $pcd$ mit $V_2$, die unbekannte Höhe $mn$ des Stumpfs mit $x$, die unbekannte Höhe $mp$ des Kegels $pab$ mit $y$, also die Höhe $np$ des Kegels $pcd$ mit $(x - y)$, so besteht in Rücksicht der vorstehenden Formeln und in Rücksicht, dass die Radien $am$ und $dn$ der Grundflächen der drei Kegel, bezw. $= R$ und $r$ gegeben sind, für das gesuchte Verhältnis $V:(V_1 + V_2)$ die Relation:

$$\frac{V}{V_1 + V_2} = \frac{\frac{\pi \cdot x}{3}(R^2 + Rr + r^2)}{\frac{R^2 \cdot \pi \cdot y}{3} + \frac{r^2 \pi (x - y)}{3}}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Quotienten rechts durch $\frac{\pi}{3}$ dividiert, die einfachere Relation:

$$1) \ldots \frac{V}{V_1 + V_2} = \frac{x(R^2 + Rr + r^2)}{R^2 y + r^2 (x - y)}$$

Zur Entfernung der in dieser Proportion vorkommenden unbekannten Grössen $x$ und $y$ beachte man ferner, dass die Kegel $pab$ und $pcd$ ähnliche Kegel sein sollen, dass somit nach der Erkl. 122 zwischen den Höhen $mp$ ($= y$) und $np$ ($= mn - np = x - y$) und den

**Erkl. 422.** Nebenstehende Gleichung 3) kann man wie folgt reduzieren:

Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite dieser Gleichung durch $y$ und multipliziert man gleichzeitig Zähler und Nenner desselben Bruches mit $R$, so geht diese Gleichung über in:

$$\text{a)} \ldots \frac{V}{V_1 + V_2} = \frac{(R+r)(R^2+Rr+r^2)}{R^3+r^3}$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{V}{V_1+V_2} = \frac{R^3+rR^2+rR^2+r^2R+r^2R+r^3}{R^3+r^3}$$

oder

$$\frac{V}{V_1+V_2} = \frac{R^3+2rR^2+2r^2R+r^3}{R^3+r^3}$$

**Erkl. 423.** Dividiert man Zähler und Nenner der in der Erkl. 422 enthaltenen Gleichung a) durch $(R+r)$, so erhält man:

$$\frac{V}{V_1+V_2} = \frac{R^2+Rr+r^2}{R^2-2Rr+r^2} \quad \text{(s. Erkl. 424).}$$

**Erkl. 424.** Die durch $\frac{R^3+r^3}{R+r}$ angedeutete Partialdivision führt man folgendermassen aus:

$$\begin{array}{l|l}
R^3 + r^3 & R+r \\
+R^3 + rR^2 & R^2 - rR + r^2 \\
\underline{-\quad\;\; -} & \\
-rR^2 + r^3 & \\
-rR^2 - r^2R & \\
\underline{+\quad\;\; +} & \\
r^2R + r^3 & \\
r^2R + r^3 & \\
\underline{-\quad\;\; -} & \\
\text{„} \qquad \text{„} &
\end{array}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.

Radien $am$ ($= R$) und $dn$ ($= r$) die Proportion besteht:

$$2) \ldots y : R = (x-y) : r$$

Aus der Proportion 2) erhält man einmal:

$$\text{a)} \ldots x - y = \frac{ry}{R}$$

ferner erhält man aus dieser Proportion:

$$ry = Rx - Ry$$
$$Rx = Ry + ry$$

oder

$$\text{b)} \ldots x = \frac{y(R+r)}{R}$$

Substituiert man in Gleichung 1) für $x-y$ und $x$ die mittels der Gleichungen a) und b) in $y$, $R$ und $r$ ausgedrückten Werte, so geht dieselbe über in:

$$3) \ldots \frac{V}{V_1+V_2} = \frac{\frac{y(R+r)}{R}(R^2+Rr+r^2)}{R^2 \cdot y + r^2 \cdot \frac{ry}{R}}$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 422 für das gesuchte Verhältnis:

$$\text{A)} \ \frac{V}{V_1+V_2} = \frac{R^3+2rR^2+2r^2R+r^3}{R^3+r^3}$$

oder auch nach der Erkl. 423:

$$\text{B)} \ldots \frac{V}{V_1+V_2} = \frac{R^2+Rr+r^2}{R^2-Rr+r^2}$$

---

## 13. Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Cylinder.

**Aufgabe 490.** Ein gerader Kegelstumpf sei 7-mal so gross als der ihm einbeschriebene gerade Cylinder. In welchem Verhältnis stehen die Radien der beiden Grundflächen des Kegelstumpfs?

**Erkl. 425.** Unter dem einem Kegelstumpf einbeschriebenen Cylinder versteht man den Cylinder, welcher die Deckfläche (d. i. die kleinere Grundfläche) des Stumpfs zur Grundfläche und die Höhe des Stumpfs zur Höhe hat.

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)$$

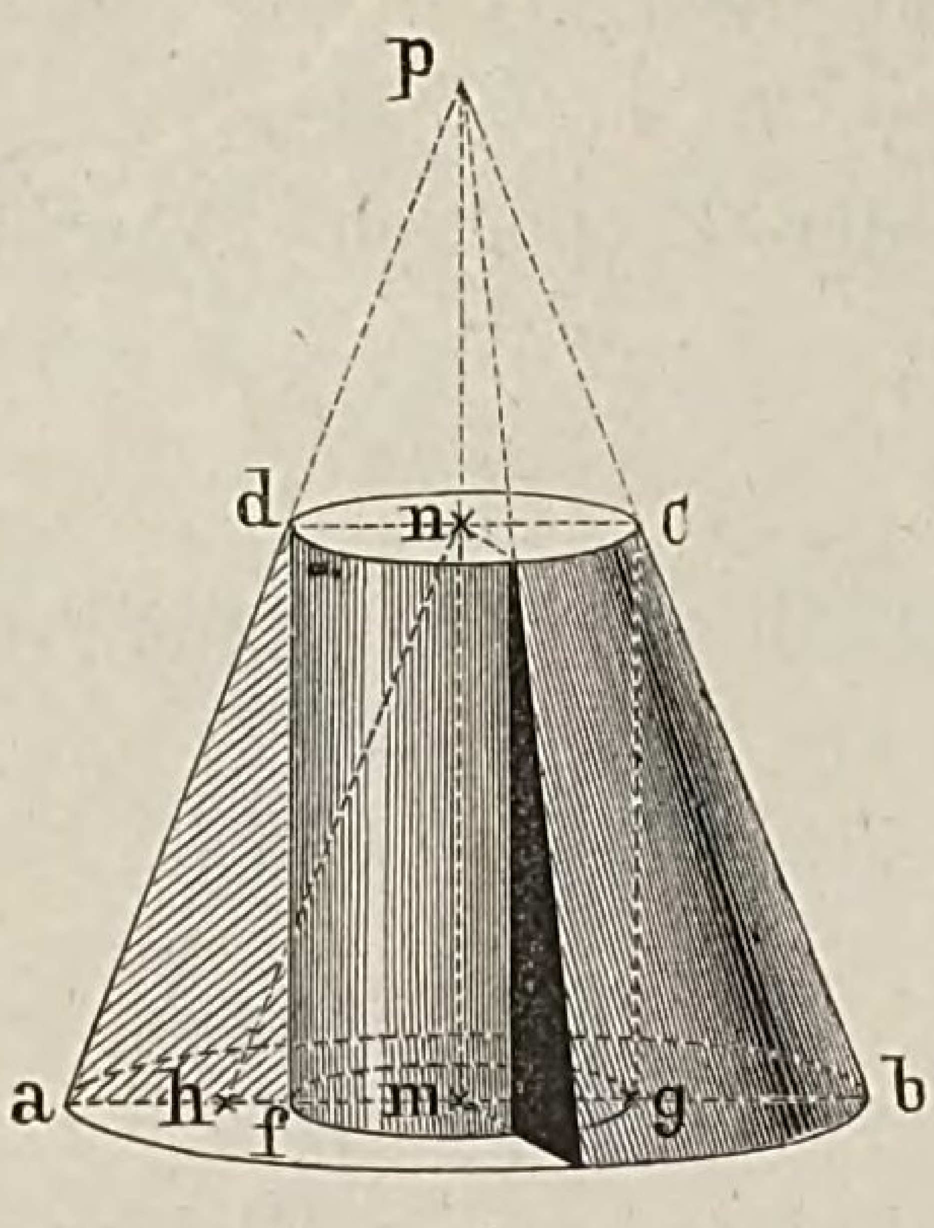
(s. Erkl. 53)

Für einen Cylinder:

$$\text{II.} \ldots V = R^2 \pi H \quad \text{(s. Erkl. 33).}$$

**Auflösung.** Bezeichnet man, siehe Fig. 129, den unbekannten Radius $am$ der Grundfläche des Kegelstumpfs $abcd$ mit $x$, den unbekannten Radius $dn$ der Deckfläche des Stumpfs, bezw. den unbekannten Radius $dn = fm$ des in den Kegelstumpf $abcd$ einbeschriebenen geraden Cylinders $fgcd$ (siehe Erkl. 425) mit $y$, die beiden Körpern gleichen aber

Figur 129.




**Erkl. 426.** Soll man nebenstehende Gleich.:

$$\text{b)} \ldots \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} = 20$$

nach $\frac{x}{y}$ auflösen, so kann man sich z. B.

$$\frac{x}{y} = u$$

setzen, wonach man erhält:

$$u^2 + u = 20$$

und diese unreine quadratische Gleichung nach $u$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$u^2 + u + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = 20 + \frac{1}{4}$$

$$u + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{20 + \frac{1}{4}}$$

$$u = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{80+1}{4}}$$

$$u = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$u = -\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Man erhält also hiernach:

$$u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}$$

oder

$$\alpha) \ldots u_1 = 4$$

und

$$u_2 = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2}$$

oder

$$\beta) \ldots u_2 = -5$$

Für den Quotienten $\frac{x}{y} (= u)$ kann man also $= 4$ oder $= -5$ setzen, beide Werte genügen obiger Gleichung b).

Siehe Kleyers Lehrbuch der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

ebenfalls unbekannte Höhe $mn$ mit $z$, so hat man der Aufgabe gemäss und mit Benutzung der vorstehenden Formeln zwischen den Volumina beider Körper die Relation:

$$\frac{\pi \cdot z}{3} \cdot (x^2 + xy + y^2) = 7 \cdot y^2 \pi \cdot z$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung durch $\pi z$ dividiert, die einfachere Gleichung:

$$1) \ldots \frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2) = 7y^2$$

Aus dieser Gleichung kann man das Verhältnis $x:y$ der beiden unbekannten Radien wie folgt berechnen:

Die Gleichung 1) reduziert gibt:

$$x^2 + xy + y^2 = 21y^2$$

oder

$$\text{a)} \ldots x^2 + xy = 20y^2$$

Dividiert man Glied für Glied dieser Gleichung durch $y^2$, so geht dieselbe über in:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} = 20$$

Betrachtet man nunmehr den gesuchten Quotienten $\frac{x}{y}$ als Unbekannten und löst diese Gleichung nach derselben auf, so erhält man:

$$\text{b)} \ldots \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} = 20$$

und nach der Erkl. 426:

$$\frac{x}{y} = 4 \text{ oder } = -5$$

Da jedoch keiner der Radien $x$ und $y$ eine negative Grösse darstellen kann und eine solche hier keinen geometrischen Sinn hat, so hat man nun den Wert $\frac{x}{y} = 4$ zu berücksichtigen und man erhält für das gesuchte Verhältnis:

$$\text{A)} \ldots x:y = 4:1$$

**Aufgabe 491.** Um einen geraden Cylinder, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Höhe $= H$ gegeben ist, sei ein gerader Kegelstumpf so konstruiert, dass die oberen Grundflächen beider Körper zusammenfallen und die untere des Kegels der unteren des Cylinders konzentrisch ist und dass sich die Inhalte der beiden letzteren Grundflächen wie $m:n$ verhalten.

Man berechne:
a). die Oberfläche des Kegelstumpfs und
b). die Oberfläche des durch Herausschneiden des Cylinders übrig bleibenden Teils des Kegelstumpfs?

**Erkl. 427.** Nebenstehende Gleichung:

$$\text{a)} \ldots \frac{R^2\pi}{r^2\pi} = \frac{m}{n}$$

reduziert und nach $R$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{m}{n}$$

$$R^2 = \frac{m}{n} \cdot r^2$$

$$R = \sqrt{r^2 \cdot \frac{m}{n}}$$

oder

$$R = r\sqrt{\frac{m}{n}}$$

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{I.} \ldots M = \pi s(R + r) \quad \text{(s. Erkl. 56)}$$

Für einen Cylinder:

$$\text{II.} \ldots M = 2R\pi \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 47)}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Oberflächen ist vor allem erforderlich, dass man den Mantel des Kegelstumpfs $abcd$, siehe Fig. 129, berechnet. Zur Berechnung desselben muss man nach vorstehender Formel I den Radius $R$ ($= am$ in Fig. 129) der Grundfläche und die Seitenlinie $s$ ($= ad$) jenes Stumpfes kennen.

Bezeichnet man, siehe Figur 129, den Radius $am$ der Grundfläche des Stumpfs $abcd$ mit $R$, den Radius $dn$ der Deckfläche des Stumpfs, d. i. der gegebene Radius des Cylinders $fgcd$ mit $r$, so besteht der Aufgabe gemäss und nach der Erkl. 57 die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{R^2\pi}{r^2\pi} = \frac{m}{n}$$

und hieraus erhält man für den Radius $R$ nach der Erkl. 427:

$$\text{b)} \ldots R = r\sqrt{\frac{m}{n}}$$

Zur Bestimmung der Seitenlinie $s = ad$ des Kegelstumpfs $abcd$ ziehe man sich in Figur 129 die Linie $nh \parallel ad$, wodurch man das bei $m$ rechtwinklige Dreieck $hmn$ erhält, in welchem

$nh = ad = s$, nämlich gleich der zu bestimmenden Seitenlinie,

$mn = H$, nämlich gleich der gegebenen Höhe des Cylinders oder des Kegelstumpfs,

und

$hm = am - ah = am - dn = R - r$,

bezw. nach der Gleichung b):

$$= r\sqrt{\frac{m}{n}} - r = r\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right) \text{ist.}$$

**Erkl. 428.** Nebenstehende Gleichung:

$$c) \ldots s^2 = H^2 + \left[r\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)\right]^2$$

reduziert und nach $s$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s^2 = H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2$$

$$s = \pm\sqrt{H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2}$$

oder, da das Minuszeichen keinen Sinn zulässt:

$$s = \sqrt{H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2}$$

**Erkl. 429.** Bezeichnet man die Radien der einen konzentrischen Kreis, einen konzentrischen Ring begrenzenden Kreislinien mit $R$ und $r$, so besteht für den Inhalt $J$ des konzentrischen Kreises, bezw. des konzentrischen Ringes die Relation:

$$J = R^2\pi - r^2\pi \text{ (siehe Erkl. 57)}$$

oder

$$a) \ldots J = \pi(R^2 - r^2)$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der planimetrischen Figuren handelt.

Man erhält somit nach dem pythagoräischen Lehrsatz die Relation:

$$\overline{nh}^2 = \overline{mn}^2 + \overline{hm}^2$$

oder die Relation:

$$c) \ldots s^2 = H^2 + \left[r\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)\right]^2$$

und hieraus erhält man für die Seitenlinie $s$ nach der Erkl. 428:

$$d) \ldots s = \sqrt{H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2}$$

In Rücksicht der mittels der Gleichungen b) und d) für $R$ und $s$ gefundenen Werte und mittels Benutzung der vorstehenden Formel I und der Erkl. 57 erhält man für das gesuchte Volumen $x$ der Oberfläche des Kegelstumpfs:

$$x = \pi\sqrt{H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2} \cdot \left(r\sqrt{\frac{m}{n}} + r\right) + \left(r\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2\pi + r^2\pi$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$A) \ldots x = r\pi\left[\sqrt{H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2}\left(\sqrt{\frac{m}{n}} + 1\right) + r\left(\frac{m}{n} + 1\right)\right]$$

Ferner erhält man in Rücksicht der mittels der Gleichungen b) und d) für $R$ und $s$ gefundenen Werte und mittels Benutzung der vorstehenden Formeln I und II und den Erkl. 57 und 429 für die gesuchte Oberfläche $y$ des Körpers, welcher übrig bleibt, wenn der Cylinder aus dem Kegelstumpf herausgenommen wird:

$$y = \pi\cdot\sqrt{H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2} \cdot \left(r\sqrt{\frac{m}{n}} + r\right) + 2r\pi H + \pi\left[\left(r\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2 - r^2\right]$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$B) \ldots y = \pi r\left[\sqrt{H^2 + r^2\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n}} + 1\right) + 2H + r\left(\frac{m}{n} - 1\right)\right]$$

---

**Aufgabe 492.** Wie viel beträgt der Fehler, welchen man begeht, wenn man bei der Berechnung des Volumens eines Baumstammes von der Gestalt eines abgestumpften Kegels, dessen Grundflächenradien $= R$ und $r$ und dessen Höhe $= H$ ist, denselben als einen

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

$$I. \ldots V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

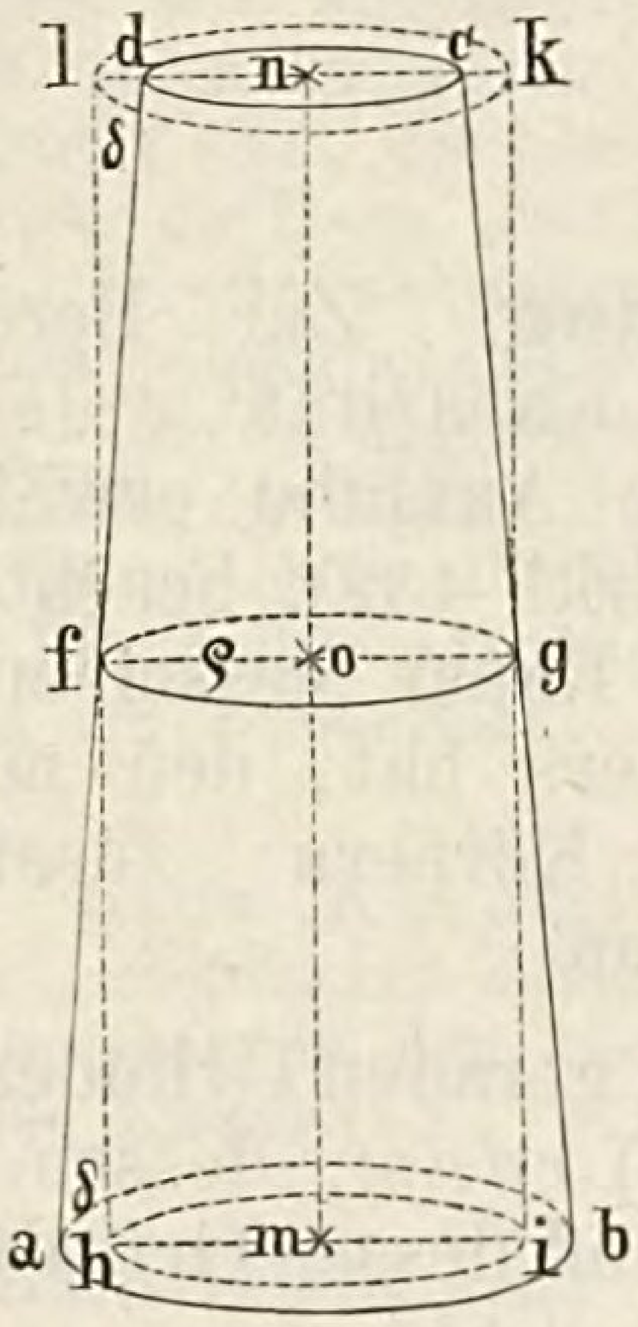
(s. Erkl. 53)

Für einen Cylinder:

$$II. \ldots V = R^2\pi H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

gleichhohen Cylinder ansieht, dessen Grundflächenradius das arithmetische Mittel zwischen den Radien der beiden Endflächen ist?

Figur 130.



**Erkl. 430.** Unter dem arithmetischen Mittel $m$ zweier Zahlen $a$ und $b$, bezw. zweier gleichartiger Grössen $a$ und $b$ versteht man die halbe Summe dieser beiden Grössen $a$ und $b$, in Zeichen:

$$m = \frac{a+b}{2}$$

**Erkl. 431.** Ein geometrischer Lehrsatz heisst: „Zieht man, siehe Figur 130, durch die Mitte ($o$) der Höhe ($mn$) eines Paralleltrapezes ($amnd$) eine Linie ($fo$) parallel zu den parallelen Seiten ($am$ und $dn$), so halbiert diese Linie ($fo$) auch die andre Seite ($ad$) des Paralleltrapezes und ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten ($am$ und $dn$)."

Nach diesem Lehrsatz ist in der Fig. 130:

$$fo = \frac{am + dn}{2}$$

d. h. der Radius $fo$ ($= \varrho$) des Kreises $fg$ ist nach der Erkl. 430 gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{am+dn}{2}$ $\left(= \frac{R+r}{2}\right)$ der Radien der Kreise $ab$ und $df$.

Vorstehenden Lehrsatz kann man aus der Figur 130 mittels Kongruenz der Dreiecke $fdl$ und $fha$ nachweisen.

Aus der Kongruenz dieser Dreiecke ergibt sich nämlich, dass $ah = ld = \varrho$ ist, man erhält also:

a) . . . $fo = ln = dn + ld = r + \varrho$

und

b) . . . $fo = hm = am - ah = R - \varrho$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man: $2 \cdot fo = R + r$

oder $fo = \frac{R+r}{2}$, bezw.

c) . . . $\varrho = \frac{R+r}{2}$

**Auflösung.** Stellt, siehe Fig. 130, der Kegelstumpf $abcd$ den gedachten Baumstamm dar und man denkt sich durch die Mitte $o$ der Höhe $mn$ des Stumpfs eine zu den Grundflächen desselben parallele Ebene $fg$ gelegt, so schneidet diese Ebene den Stumpf in einem Kreise, dessen Radius $fo$ ($= \varrho$) gleich dem arithmetischen Mittel (s. Erkl. 430) der Radien $am$ ($= R$) und $dn$ ($= r$) des Stumpfes ist. Der mit dem Querschnitt $fg$ konstruierte gerade Cylinder $hilk$ ist somit der in der Aufgabe erwähnte Cylinder.

Den gesuchten Fehler $x$, welchen man begeht, wenn man das Volumen eines Baumstamms, der die Form des durch die Fig. 130 dargestellten Kegelstumpfs $abcd$ hat, nicht mittels der für den Kegelstumpf aufgestellten Kubikinhaltsformel berechnet, sondern wenn man den Baumstamm als einen geraden Cylinder $hilk$ betrachtet, dessen Grundflächenradius $hm$ ($= \varrho$) gleich dem arithmetischen Mittel $R$ und $r$ (s. Erkl. 431) der Grundflächenradien des Stumpfs ist, und das Volumen nach der für den Cylinder aufgestellten Kubikinhaltsformel berechnet, ist gleich der Differenz der Volumina, welche man erhält, wenn man das Volumen des Baumstammes nach den beiden soeben erwähnten Formeln berechnet. Hiernach besteht unter Benutzung der vorstehenden Formeln I. und II. die Bestimmungsgleichung:

1) $x = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot H$

Diese Gleichung reduziert, giebt:

$$x = \pi H \left[\frac{R^2 + Rr + r^2}{3} - \frac{(R+r)^2}{4}\right]$$

$$x = \pi H \left[\frac{4(R^2+Rr+r^2)}{12} - \frac{3(R^2+2Rr+r^2)}{12}\right]$$

$$x = \frac{\pi H}{12}[4R^2+4Rr+4r^2-3R^2-6Rr-3r^2]$$

$$x = \frac{\pi H}{12}[R^2 - 2Rr - r^2]$$

Der gesuchte Fehler $x$ ist also:

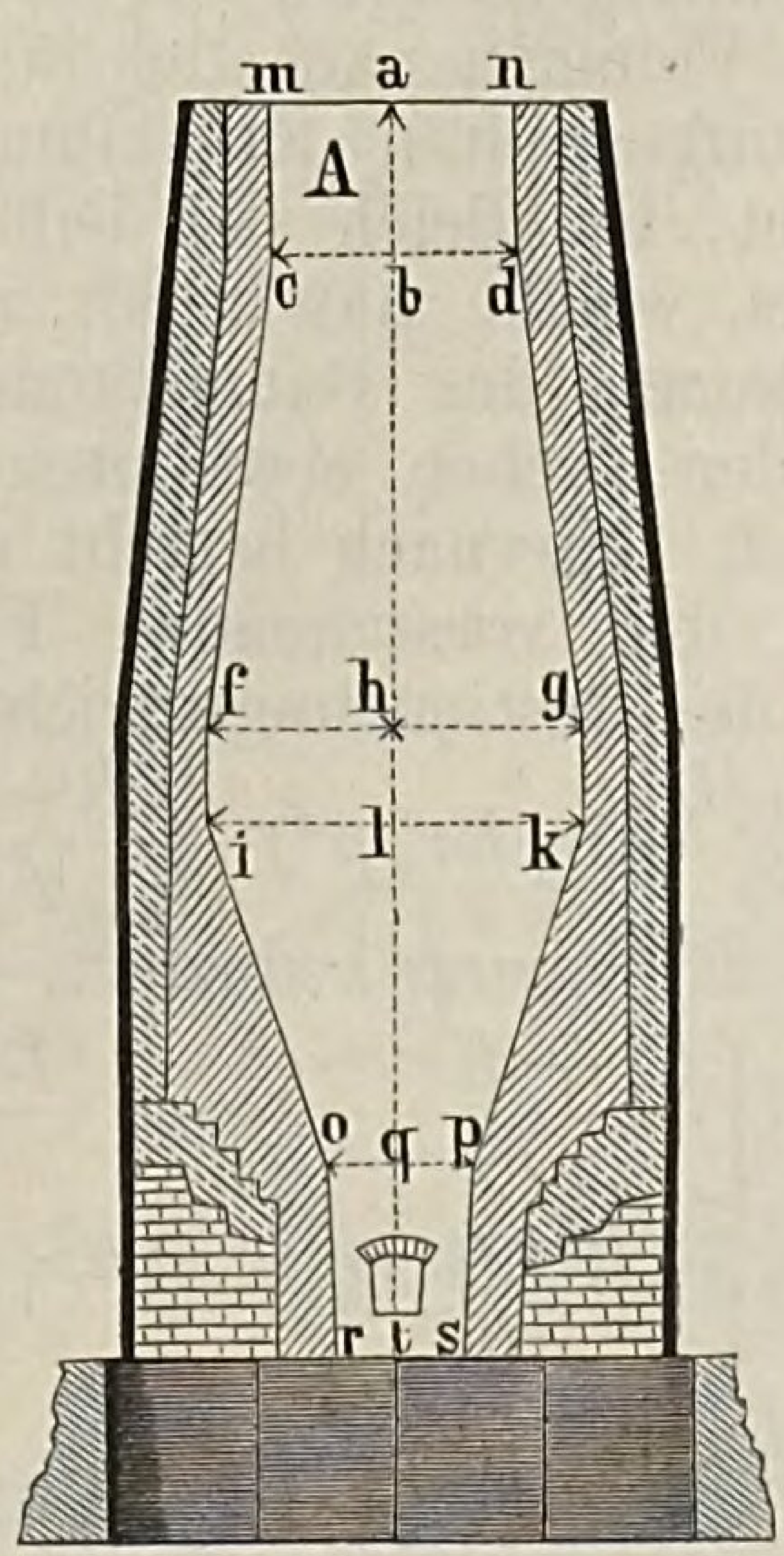
A) . . . $x = \frac{\pi H}{12}(R - r)^2$

**Aufgabe 493.** Der Hochofen einer Eisenhütte wie er durch die Fig. 131 im Durchschnitt dargestellt ist, habe folgende Dimensionen:

1) der Gichtcylinder $mncd$ habe die Höhe $ab = 1{,}88$ m und die im Lichten gemessene Breite $cd = 3{,}14$ m,
2) der Schacht $fgdc$ habe die Höhe $bh = 6{,}28$ m, die im Lichten gemessene untere Breite $fg = 5{,}02$ m und die obere Breite $cd = 3{,}14$ m,
3) der Kohlensack $ikgf$ habe die Höhe $hl = 1{,}26$ m und die im Lichten gemessene Breite $ik = 5{,}02$ m,
4) die Rast $opki$ habe die Höhe $lq = 3{,}77$ m und die im Lichten gemessene untere Breite $op = 1{,}88$ m und die obere Breite $ik = 5{,}02$ m,
5) das Gestell $rspo$ habe die Höhe $qt = 2{,}54$ m und die im Lichten gemessene untere Breite $rs = 1{,}56$ m und die obere Breite $op = 1{,}88$ m.

Welches ist die Kapazität dieses Hochofens?

Figur 131.




**Erkl. 432.** Die Hochöfen oder besser gesagt die Hohöfen sind grosse, feuerfeste Schachtöfen, die zur Herstellung des Roheisens aus den eisenhaltigen Erzen dienen.

Jeder Hochofen besteht aus dem sogenannten Kernschacht, das ist der in Figur 131 hell-

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{I.} \quad \ldots \quad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(s. Erkl. 53)

Für einen Cylinder:

$$\text{II.} \quad \ldots \quad V = R^2\pi \cdot H$$ (s. Erkl. 33).

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Kapazität $x$ (s. Erkl. 433) des in der Aufgabe erwähnten Hochofens (s. Erkl. 432), beachte man, dass der hohle Raum desselben die Form eines Körpers hat, den man sich aus folgenden Körpern zusammengesetzt denken kann:

1) aus dem geraden Cylinder (dem Gichtcylinder) $cdnm$, dessen Höhe $ab = 1{,}88$ m und dessen Grundflächenradius $= \frac{cd}{2} = \frac{3{,}14}{2}$ m beträgt,
2) aus dem abgestumpften, geraden Kegel (dem Schachte) $fgdc$, dessen Grundflächenradius $fh = \frac{fg}{2} = \frac{5{,}02}{2}$, dessen Deckflächenradius $cb = \frac{cd}{2} = \frac{3{,}14}{2}$ und dessen Höhe $bh = 6{,}28$ m beträgt,
3) aus dem geraden Cylinder (dem Kohlensack) $ikgh$, dessen Höhe $hl = 1{,}26$ m und dessen Grundflächenradius $il = \frac{ik}{2} = \frac{5{,}02}{2}$ m beträgt,
4) aus dem verkehrt stehenden Kegelstumpf (der eigentlichen Rast) $opki$, dessen Grundflächenradius $\frac{il}{2} = \frac{ik}{2} = \frac{5{,}02}{2}$, dessen Deckflächenradius $oq = \frac{op}{2} = \frac{1{,}88}{2}$ und dessen Höhe $lq = 3{,}77$ m beträgt und
5) aus dem verkehrt stehenden, geraden Kegelstumpf (dem Gestell) $rspo$, dessen Grundflächenradius $oq = \frac{op}{2}$

schattierte Teil und aus dem den Kernschacht umgebenden Rauchschacht, d. i. in Fig. 131 der dunkler schattierte Teil. Beide Schachte sind durch einen engen Zwischenraum getrennt, Füllung genannt, damit sich alle Teile bei der Erhitzung ausdehnen können. Der Kernschacht besteht im allgemeinen aus zwei Teilen, welche die Form von abgestumpften Kegeln haben, die mit ihren grösseren Grundflächen aufeinander gestellt sind, der obere Teil heisst Schacht, der untere die Rast. Der Schacht selbst zerfällt wieder, wie in vorstehender Aufgabe erwähnt, in den eigentlichen Schacht $fgdc$, siehe Figur 131 und in die Gicht $cdnm$; die Rast zerfällt in die eigentliche Rast $opki$ und in das Gestell, in welchem der Schmelzprozess vor sich geht. Der Teil $ikgf$ zwischen Schacht und Rast heisst der Kohlensack.

**Erkl. 433.** Unter „Kapazität“, welches Wort aus dem Lateinischen stammt, versteht man in der Stereometrie den körperlichen Inhalt eines hohlen Raumes?

**Hülfsrechnungen:**

1) $\log 3{,}14^2 \cdot 1{,}88 = 2 \cdot \log 3{,}14 + \log 1{,}88$

Nun ist: $\log 3{,}14 = 0{,}4969296$

$$\begin{array}{rr} & 0{,}4969296 \\ & \cdot 2 \\ \hline & 0{,}9938592 \\ +\log 1{,}88 = & 0{,}2741578 \\ \hline & 1{,}2680170 \\ & 0160 \end{array}$$

mithin ist:

$$3{,}14^2 \cdot 1{,}88 = 18{,}536$$

2) $5{,}02 \cdot 5{,}02$
$$\begin{array}{r} 1004 \\ 25100 \\ \hline 25{,}2004 \end{array}$$

3) $5{,}02 \cdot 3{,}14$
$$\begin{array}{r} 2008 \\ 502 \\ 1506 \\ \hline 15{,}7628 \end{array}$$

4) $3{,}14 \cdot 3{,}14$
$$\begin{array}{r} 1256 \\ 314 \\ 942 \\ \hline 9{,}8596 \end{array}$$

5) $\log 5{,}02^2 \cdot 1{,}26 = 2 \cdot \log 5{,}02 + \log 1{,}26$

Nun ist: $\log 5{,}02 = 0{,}7007037$

$$\begin{array}{rr} & \cdot 2 \\ \hline & 1{,}4014074 \\ +\log 1{,}26 = & 0{,}1003705 \\ \hline & 1{,}5017779 \\ & 7715 \end{array}$$

mithin ist:

$$5{,}02^2 \cdot 1{,}26 = 31{,}679$$

6) $5{,}02 \cdot 1{,}88$
$$\begin{array}{r} 4016 \\ 4016 \\ 502 \\ \hline 9{,}4376 \end{array}$$

7) $1{,}88 \cdot 1{,}88$
$$\begin{array}{r} 1504 \\ 1504 \\ 188 \\ \hline 3{,}5344 \end{array}$$

$= \frac{1{,}88}{2}$, dessen Deckflächenradius $rs = \frac{rt}{2} = \frac{1{,}56}{2}$ und dessen Höhe $qt = 2{,}54$ m beträgt.

Mittels wiederholter Anwendung der vorstehenden Formeln I. und II. hat man sonach für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$1)\; x = \left(\frac{3{,}14}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 1{,}88 + \frac{\pi \cdot 6{,}28}{3}\left[\left(\frac{5{,}02}{2}\right)^2 + \frac{5{,}02}{2} \cdot \frac{3{,}14}{2} + \left(\frac{3{,}14}{2}\right)^2\right] + \left(\frac{5{,}02}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 1{,}26 + \frac{\pi \cdot 3{,}77}{3}\left[\left(\frac{5{,}02}{2}\right)^2 + \frac{5{,}02}{2} \cdot \frac{1{,}88}{2} + \left(\frac{1{,}88}{2}\right)^2\right] + \pi \cdot \frac{2{,}54}{3}\left[\left(\frac{1{,}88}{2}\right)^2 + \frac{1{,}88}{2} \cdot \frac{1{,}56}{2} + \left(\frac{1{,}56}{2}\right)^2\right]$$

Durch Ausscheiden des in jedem Gliede vorkommenden Faktors $\frac{\pi}{4}$ erhält man:

$$x = \frac{\pi}{4} \cdot \left[3{,}14^2 \cdot 1{,}88 + \frac{6{,}28}{3} \cdot (5{,}02^2 + 5{,}02 \cdot 3{,}14 + 3{,}14^2) + 5{,}02^2 \cdot 1{,}26 + \frac{3{,}77}{3} \cdot (5{,}02^2 + 5{,}02 \cdot 1{,}88 + 1{,}88^2) + \frac{2{,}54}{3}(1{,}88^2 + 1{,}88 \cdot 1{,}56 + 1{,}56^2)\right]$$

$$x = \frac{\pi}{4} \cdot \left[18{,}536 + \frac{6{,}28}{3}(25{,}200 + 15{,}763 + 9{,}859) + 31{,}679 + \frac{3{,}77}{3}(25{,}200 + 9{,}438 + 3{,}534) + \frac{2{,}54}{3}(3{,}534 + 2{,}933 + 2{,}434)\right.$$

$$x = \frac{\pi}{4}\left[18{,}536 + 31{,}679 + \frac{1}{3} \cdot (6{,}28 \cdot 50{,}822 + 3{,}77 \cdot 38{,}172 + 2{,}54 \cdot 8{,}901\right]$$

$$x = \frac{\pi}{4}\left[50{,}215 + \frac{1}{3}(319{,}162 + 143{,}908 + 22{,}609)\right]$$

8) $1,88 \cdot 1,56$

1128
940
188

2,9328

9) $1,56 \cdot 1,56$

936
780
156

2,4336

10) $50,822 \cdot 6,28$

406576
101644
304932

319,16216

11) $38,172 \cdot 3,77$

267204
267204
114516

143,90844

12) $8,901 \cdot 2,54$

35604
44505
17802

22,60854

13) $\log x = \log \pi + \log 212,108 - \log 4$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971499 \\ + \log 212,108 &= 2,3265407 \\ &\quad + 163,2 \\ &\overline{\ 2,8237069\ } \\ - \log 4 &= 0,6020600 \\ \log x &= 2,2216469 \\ &\quad 6489 \end{aligned}$$

mithin:

$$\text{numlog}\, x = 166,59$$

$$x = \frac{\pi}{4}\left[50,215 + \frac{1}{3} \cdot 485,679\right]$$

$$x = \frac{\pi}{4}(50,215 + 161,893)$$

$$x = \frac{\pi}{4} \cdot 212,108$$

Hieraus erhält man schliesslich für die gesuchte Kapazität $x$ nach der Hülfsrechnung 13):

$$x = 166,59 \text{ cbm}$$

---

### 14. Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Pyramidenstumpf.

**Aufgabe 494.** Um und in einen geraden Kegelstumpf, dessen Volumen $= V$ ist, sei ein gerader Pyramidenstumpf konstruiert und zwar so, dass die Endflächen der beiden Pyramidenstumpfe den Grundkreisen des Kegelstumpfs um-, bezw. einbeschriebene, reguläre Sechsecke sind. Wie gross ist das Volumen desjenigen Körperteils, der zwischen den Mänteln beider Pyramidenstumpfe liegt?

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(s. Erkl. 53)

Für einen Pyramidenstumpf:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

(s. Erkl. 31).

**Auflösung.** Bezeichnet man das Volumen des dem Kegelstumpf umschriebenen, sechsseitigen Pyramidenstumpfs mit $V_1$, das Volumen des dem Kegelstumpf einbeschriebenen Pyramidenstumpfs mit $V_2$, so besteht für das gesuchte Volumen $x$ des zwischen beiden Pyramidenstumpfmänteln liegenden Körperteils die Relation:

$$1) \ldots x = V_1 - V_2$$

Bezeichnet man ferner eine Seite der unteren Grundfläche des dem Kegelstumpf umschriebenen Pyramidenstumpfs mit $a_1$, eine Seite der oberen Grundfläche dieses Pyramidenstumpfs mit $b_1$, die Höhe desselben, welche gleich der Höhe

des Kegelstumpfs ist mit $H$ und berücksichtigt man, dass die Grundflächen dieses Pyramidenstumpfs reguläre Sechsecke sind, so hat man nach vorstehender Formel II und nach der Erkl. 263 für das Volumen $V_1$ dieses Pyramidenstumpfs:

$$V_1 = \frac{H}{3}\left(\frac{3\,a_1^2}{2}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3\,a_1^2}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3\,b_1^2}{2}\sqrt{3}} + \frac{3\,b_1^2}{2}\sqrt{3}\right)$$

oder

$$V_1 = \frac{H}{3}\left(\frac{3\,a_1^2}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}a_1\cdot b_1\sqrt{3} + \frac{3\,b_1^2}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\text{a)} \ldots V_1 = \frac{H}{2}\sqrt{3}\,(a_1^2 + a_1\cdot b_1 + b_1^2)$$

In analoger Weise erhält man für das Volumen $V_2$ des Pyramidenstumpfs, welcher dem Kegelstumpf einbeschrieben ist, wenn man die Seite der unteren Grundfläche mit $a_2$, die Seite der oberen Grundfläche mit $b_2$ bezeichnet:

$$\text{b)} \ldots V_2 = \frac{H}{2}\sqrt{3}\,(a_2^2 + a_2\cdot b_2 + b_2^2)$$

Nunmehr müssen die Dimensionen der beiden Pyramidenstumpfe in die Dimensionen des Kegelstumpfs ausgedrückt werden, dies geschieht wie folgt:

Die Seite $a_1$ der unteren Grundfläche des grösseren Pyramidenstumpfs ist die Seite eines regulären Sechsecks, das einem Kreise mit dem Radius $R$ umbeschrieben ist, wenn man den Radius des unteren Grundkreises des Kegelstumpfs mit $R$ bezeichnet; dasselbe gilt für die Seite $b_1$ in bezug auf den oberen Grundkreis des Kegelstumpfs, dessen Radius mit $r$ bezeichnet sei.

Nach der Erkl. 434 hat man somit für die Sechseckseiten $a_1$ und $b_1$ in die Radien $R$ und $r$ der Grundkreise des Kegelstumpfs ausgedrückt:

$$\text{c)} \ldots a_1 = \frac{2R}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{d)} \ldots b_1 = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$$

Ferner ist die Seite $a_2$ der unteren Grundfläche des kleineren Pyramidenstumpfs die Seite eines regulären Sechsecks, das einem Kreise mit dem Radius $R$ einbeschrieben ist, wenn man wie vorhin den Radius des unteren Grundkreises des Kegelstumpfs mit $R$ bezeichnet; dasselbe gilt für die Seite $b_2$ in bezug auf den oberen Grundkreis des Kegelstumpfs, dessen Radius mit $r$ bezeichnet sei.

Nach der Erkl. 435 erhält man somit für die Sechseckseiten $a_2$ und $b_2$ in die Radien $R$ und $r$ der Grundkreise des Kegelstumpfs ausgedrückt:

$$\text{e)} \ldots a_2 = R$$

$$\text{f)} \ldots b_2 = r$$

**Erkl. 434.** Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit $r$ die Seite des diesem Kreis umschriebenen regulären Sechsecks mit $S_6$, so besteht zwischen beiden Grössen die Relation:

$$S_6 = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der regulären Polygone handelt (s. Erkl. 436).

**Erkl. 435.** Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit $R$, die Seite des diesem Kreis einbeschriebenen regulären Sechsecks mit $s_6$, so besteht zwischen beiden Grössen die Relation:

$$s_6 = R$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der regulären Polygone handelt (s. Erkl. 436).

**Erkl. 436.** Die in den Erkl. 434 und 435 aufgestellten Formeln kann man leicht herleiten, wenn man berücksichtigt, dass das Bestimmungsdreieck eines regulären Sechsecks ein gleichseitiges Dreieck ist.

In Rücksicht der mittels der Gleichungen c) bis f) für $a_1$, $b_1$, $a_2$ und $b_2$ gefundenen Werte gehen die Gleichungen a) und b) bezw. über in:

g) . . . $V_1 = \frac{2H}{3}\sqrt{3}\,(R^2 + Rr + r^2)$

(s. Erkl. 437)

h) . . . $V_2 = \frac{H}{2}\sqrt{3}\,(R^2 + Rr + r^2)$

Um nun in diese Gleichungen, bezw. in Gleichung 1) statt der unbekannten Dimensionen $H$, $R$ und $r$ des Kegelstumpfs, das gegebene Volumen $V$ desselben zu substituieren, beachte man, dass man nach vorstehender Formel 1) die Relation hat:

i) . . . $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

und dass sich hieraus:

k) . . . $H(R^2 + Rr + r^2) = \frac{3V}{\pi}$

ergibt.

Substituiert man in den Gleichungen g) und h) für $H(R^2 + Rr + r^2)$ den mittels der Gleichung k) gefundenen Wert, so erhält man:

$$V_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{3V}{\pi}$$

oder

2) . . . $V = \frac{2V}{\pi}\sqrt{3}$

und

$$V_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3V}{\pi}$$

oder

3) . . . $V_2 = \frac{3V}{2\pi}\sqrt{3}$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man somit für das gesuchte Volumen $x$:

$$x = \frac{2V}{\pi}\sqrt{3} - \frac{3V}{2\pi}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{V}{\pi}\sqrt{3}\left(2 - \frac{3}{2}\right)$$

oder

A) . . . $x = \frac{V}{2\pi}\sqrt{3}$

---

**Erkl. 437.** Setzt man in nebenstehender Gleichung a) für $a_1$ und $b_1$ die sich aus nebenstehenden Gleichungen c) und d) ergebenden Werte, so erhält man:

$$V_1 = \frac{H}{2}\sqrt{3}\left[\left(\frac{2R}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \frac{2R}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{2r}{3}\sqrt{3} + \left(\frac{2r}{3}\sqrt{3}\right)^2\right]$$

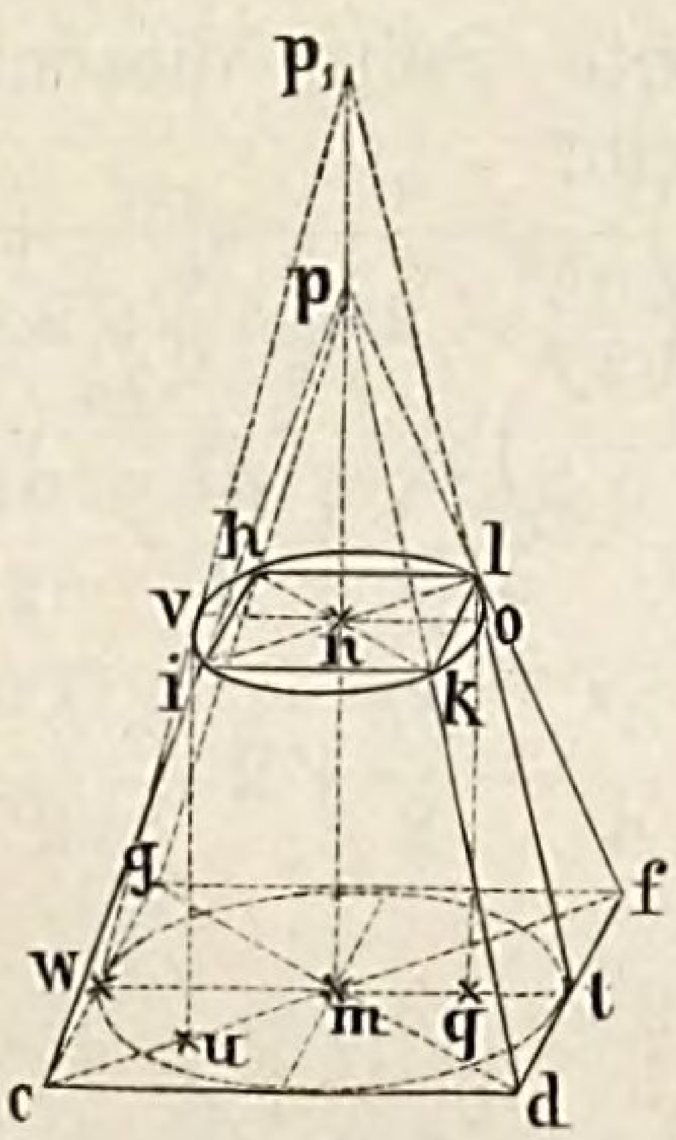
oder

$$V_1 = \frac{H}{2}\sqrt{3}\left(\frac{4R^2\cdot 3}{9} + \frac{4Rr\cdot 3}{9} + \frac{4r^2\cdot 3}{9}\right)$$

$$V_1 = \frac{2H}{3}\sqrt{3}\,(R^2 + Rr + r^2)$$

**Aufgabe 495.** Die Grundkanten eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfs seien bezw. $= a$ und $b$ gegeben, ferner sei eine Seitenkante desselben $= s$. Ein gerader Kegelstumpf sei nun so konstruiert, dass sein oberer Grundkreis der Deckfläche jenes Pyramidenstumpfs umbeschrieben, sein unterer Grundkreis aber der Grundfläche des Pyramidenstumpfs einbeschrieben ist. Wie gross ist die Seitenlinie dieses Kegelstumpfs?

Figur 132.




**Erkl. 438.** In Figur 132 ist $cm$ die halbe Diagonale $cf$ und da in dem bei $d$ rechtwinkligen Dreieck $cdf$ die Relation besteht:

$$\overline{cf} = \sqrt{\overline{cd}^2 + \overline{df}^2}$$

so erhält man aus dieser Relation, wenn man

$$\overline{cf} = 2 \cdot \overline{cm}$$

$$\overline{cd} = \overline{df} = a \text{ setzt:}$$

$$2 \cdot \overline{cm} = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$\overline{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$$

oder

a) . . . $\overline{cm} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

In analoger Weise erhält man für die halbe Diagonale $in$ des Quadrats $iklh$, dessen Seite $= b$ ist:

b) . . . $\overline{in} = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

**Auflösung.** Stellt, siehe Fig. 132, $cdfghikl$ den Pyramidenstumpf und gemäss der Aufgabe $wtov$ den Kegelstumpf dar, so erhält man zur Bestimmung der gesuchten Seitenlinie $x$ ($= ot$) des Kegelstumpfs, wenn man $oq \parallel nm$ zieht, aus dem bei $q$ rechtwinkligen Dreieck $oqt$, die Relation:

$$\overline{ot} = \sqrt{\overline{oq}^2 + \overline{qt}^2}$$

oder, wenn man:

$$\overline{ot} = x,\ \overline{oq} = \overline{nm} \text{ und}$$

$$\overline{qt} = \overline{mt} - \overline{mq} = \overline{mt} - \overline{no} \text{ setzt,}$$

die Relation:

1) . . . $x = \sqrt{\overline{nm}^2 + (\overline{mt} - \overline{no})^2}$

Die in dieser Relation vorkommende unbekannte Höhe $nm$ des Kegel-, bezw. des Pyramidenstumpfs kann man wie folgt in die gegebenen Dimensionen $a$, $b$ und $s$ des Pyramidenstumpfs ausdrücken. Zieht man $iu \parallel nm$, so besteht in dem bei $u$ rechtwinkligen Dreieck $cui$ die Relation:

$$\overline{iu}^2 = \overline{ic}^2 - \overline{cu}^2$$

oder, da

$\overline{iu} = \overline{nm},\ \overline{ic} = s$, nämlich gleich der gegebenen Seitenkante $s$ des Pyramidenstumpfs

und

$$\overline{cu} = \overline{cm} - \overline{um} = \overline{cm} - \overline{in}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2} \text{ (s. Erkl. 438)}$$

gesetzt werden kann, die Relation:

2) . . . $\overline{nm}^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2$

Da ferner die in der Gleichung 1) vorkommende Strecke $mt$ gleich dem Radius des dem Quadrat $cdfg$ einbeschriebenen Kreises und die Strecke $no$ gleich dem Radius des dem Quadrat

**Erkl. 439.** Zwischen dem Radius $r$ eines Kreises, welcher einem regulären Viereck **einbeschrieben** ist und zwischen der Seite $S_4$ dieses Vierecks besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots r = \frac{S_4}{2}$$

Zwischen dem Radius $R$ eines Kreises, welcher einem regulären Viereck **umbeschrieben** ist und zwischen der Seite $s_4$ dieses Vierecks besteht die Relation:

$$\text{b)} \ldots R = \frac{s_4}{2}\sqrt{2}$$

Diese Formeln sind leicht herzuleiten, wenn man $r$ als die halbe Mittellinie eines Quadrats und $R$ als die halbe Diagonale eines Quadrats betrachtet.

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der regulären Polygone handelt.

*iklh* **umbeschriebenen** Kreises ist, so kann man nach der Erkl. 439, wenn die Seiten dieser Quadrate bezw. mit $a$ und $b$ bezeichnet werden, für diese Strecken setzen:

$$3) \ldots \overline{mt} = \frac{a}{2}$$

$$4) \ldots \overline{no} = \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) erhält man schliesslich:

$$5)\; x = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung reduziert, gibt:

$$x = \sqrt{s^2 - \left[\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{2} + \left(\frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{2} + \left(\frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2\right]}$$

$$x = \sqrt{s^2 - \left(\frac{2a^2}{4} - \frac{2\cdot ab\cdot 2}{4} + \frac{2b^2}{4}\right) + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2}\sqrt{2} + \frac{2b^2}{4}}$$

$$x = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2} + ab - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2}\sqrt{2} + \frac{b^2}{2}}$$

$$x = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4} + ab - \frac{ab}{2}\sqrt{2}}$$

Die gesuchte Relation $x$ ist somit:

$$\text{A)} \ldots x = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4} + ab\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}$$

---

## 15. Der Kegelstumpf in Verbindung mit dem Prisma.

**Aufgabe 496.** Ein Baumstamm habe die Gestalt eines geraden abgekürzten Kegels. Die Länge des Stammes sei $L$, der Umfang am dickeren Teile sei $U$, der Umfang am dünneren Ende $u$. Dieser Baumstamm soll so zugehauen werden, dass der grösstmögliche parallelepipedische Balken entsteht. Wie viel cbm Holz müssen von dem Stamme abgehauen werden?

**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(s. Erkl. 53)

Für ein Prisma:

$$\text{II.} \ldots V = G\cdot H \text{ (s. Erkl. 1).}$$

**Auflösung.** Das gesuchte Volumen $x$ des abzuhauenden Holzes ist gleich der Differenz der Volumen des Baumstammes und des herzustellenden Balkens. Bezeichnet man also das Volumen des Baumstammes mit $V$, das des Balkens mit $V_1$, so besteht die Relation:

$$1) \ldots x = V - V_1$$

Setzt man in vorstehender Formel für $H = L$ und nach der Erkl. 39 für:

$$R = \frac{U}{2\pi}$$

für $$r = \frac{u}{2\pi}$$

so erhält man für das Volumen $V$ des Baumstammes, da derselbe die Gestalt eines Kegelstumpfs hat:

$$V = \frac{\pi L}{3}\left[\left(\frac{U}{2\pi}\right)^2 + \frac{U}{2\pi}\cdot\frac{u}{2\pi} + \left(\frac{u}{2\pi}\right)^2\right]$$

oder

$$V = \frac{\pi L}{3\cdot 4\pi^2}(U^2 + U\cdot u + u^2)$$

mithin

$$2) \ldots V = \frac{L}{12\pi}(U^2 + U\cdot u + u^2)$$

Berücksichtigt man ferner, dass die Grundfläche, bezw. der Querschnitt des zu hauenden prismatischen Balkens ein dem kleinen Grundkreis des gedachten Kegelstumpfs einbeschriebenes Quadrat ist, dessen Seite in den Radius $r = \frac{u}{2\pi}$ jenes Kreises ausgedrückt, nach der Erkl. 379 $= r\sqrt{2}$ bezw. $= \frac{u}{2\pi}\sqrt{2}$ ist und dass die Länge des Balkens, weil der Balken der grösstmögliche sein soll, gleich der Länge $L$ des Baumstammes ist, so erhält man mittels vorstehender Formel 2) für das Volumen $V_1$ des Balkens:

$$V_1 = \left(\frac{u}{2\pi}\sqrt{2}\right)^2\cdot L$$

oder

$$V_1 = \frac{u^2\cdot 2}{4\pi^2}\cdot L$$

mithin

$$3) \ldots V_1 = \frac{u^2}{2\pi^2}\cdot L$$

Aus den Gleichungen 1) bis 3) erhält man schliesslich für den gesuchten Holzabfall $x$:

$$x = \frac{L}{12\pi}(U^2 + Uu + u^2) - \frac{u^2}{2\pi^2}\cdot L$$

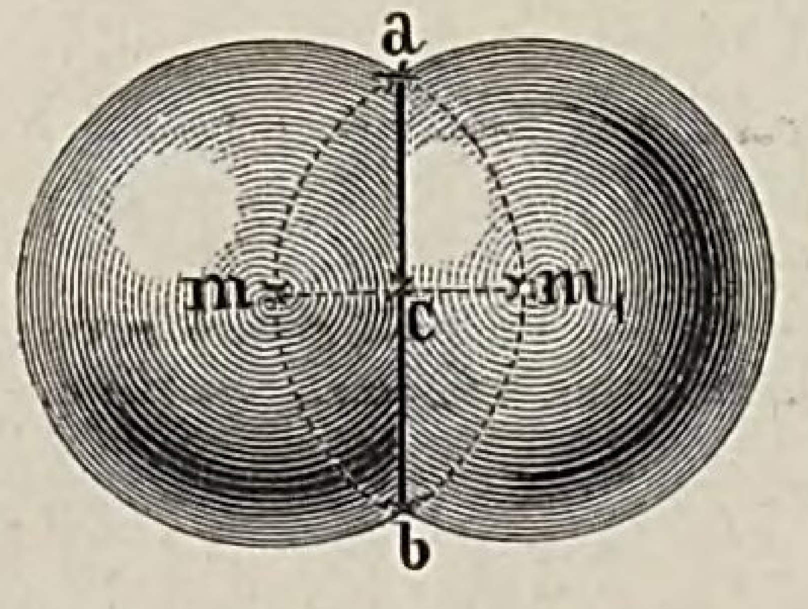
oder

$$A) \ldots x = \frac{L}{2\pi}\left(\frac{u^2 + Uu + u^2}{6} - \frac{u^2}{\pi}\right) \text{ cbm}$$

## 16. Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit der Kugel.

**Aufgabe 497.** Der Mittelpunkt einer Kugel liege auf der Oberfläche einer ihr gleichen Kugel. In welchem Verhältnis steht das Volumen des beiden Kugeln gemeinsamen Körperstücks zu dem Volumen einer der beiden Kugeln?

Figur 133.




**Erkl. 440.** Unter der Centrallinie zweier Kreise versteht man die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte dieser Kreise.

**Erkl. 441.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Durchschneiden sich zwei Kugelflächen, so ist die entstehende Durchschnittsfigur stets ein Kreis.“

Siehe Kleyers Lehrbuch der Stereometrie: Die stereometrischen Lehrsätze.

**Formeln:**

Für eine Kugel:

$$\text{I.} \quad \ldots \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67)}$$

Für ein Kugelsegment:

$$\text{II.} \quad \ldots \quad V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \quad \text{(s. Erkl. 151).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Mittelpunkte $m$ und $m_1$ der beiden sich schneidenden und durch die Fig. 133 dargestellten Kugeln eine horizontale Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die beiden Kugeln in den grössten Kreisen um $m$ und $m_1$. Diese beiden Kreise sind zwei gleiche Kreise, deren Radien $ma$ und $m_1 a$ und deren Centrallinie $mm_1$ (s. Erkl. 440) gleich einem der Radien der Kugeln um $m$ und $m_1$ sind; letzteres aus dem Grunde, weil der Mittelpunkt jeder der (gleichen) Kugeln auf der Oberfläche der andern Kugel liegen soll. Denkt man sich ferner durch den Schnittkreis $ab$, nach welchem sich die beiden Kugelflächen durchschneiden (s. Erkl. 441), eine Ebene gelegt, so steht diese Ebene senkrecht auf der Centrallinie $mm_1$ beider Kugeln und schneidet von jeder der Kugeln ein und dasselbe Kugelsegment $amb$ und $am_1b$ ab; diese Ebene schneidet ferner die grössten Kreise um $m$ und $m_1$ in der diesen beiden Kreisen gemeinschaftlichen Sehne $ab$.

Hiernach kann man das beiden sich schneidenden Kugeln gemeinschaftliche Kugelstück $ambm_1$ als die Summe der beiden gleichen Kugelsegmente $amb$ und $am_1b$ betrachten und man hat, wenn man das Volumen einer der gleichen Kugeln mit $V$, das Volumen des beiden gemeinsamen Kegelstücks mit $V_1$, den Radius einer der Kugeln, z. B. den Radius $m_1 a$ ($= m_1 m$) der Kugel um $m_1$ mit r, die Höhe eines jener erwähnten Kugelsegmente, z. B. die des Kugelsegments $amb$, wie in der Fig. 133 angedeutet, mit $\overline{cm}$ bezeichnet, unter Benutzung der vorstehenden Formeln I und II für das gesuchte Verhältnis die Proportion:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2 \cdot \frac{\pi \cdot \overline{cm}^2}{3}(3r - \overline{cm})}$$

oder

$$1) \ldots \frac{V}{V_1} = \frac{2r^3}{\overline{cm}^2(3r - \overline{cm})}$$

In dieser Proportion muss zur genauen Bestimmung des Verhältnisses $V : V_1$ die Höhe $\overline{cm}$ in den Radius $r$ ausgedrückt werden, was folgendermassen geschieht:

In Figur 134 ist:

$$\triangle mca \cong \triangle m_1ca$$
$$(\text{da } \sphericalangle mca = \sphericalangle m_1ca = R$$
$$ac = ac$$
$$ma = m_1a = r \text{ ist}),$$

**Erkl. 442.** Ein geometrischer Lehrsatz heisst:

„Schneiden sich zwei gleiche Kreise, in Figur 133 die gleichen Kreise um $m$ und $m_1$, so steht die gemeinschaftliche Sehne $ab$ beider Kreise senkrecht auf der Centrallinie $mm_1$ und halbiert dieselbe."

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie: „Die geometrischen Lehrsätze."

woraus sich ergibt, dass:

$$2) \ldots cm = cm_1 = \frac{mm_1}{2} = \frac{r}{2}$$

ist. Man erhält also:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{2r^3}{\left(\frac{r}{2}\right)^2\left(3r - \frac{r}{2}\right)}$$

oder

$$\frac{V}{V_1} = \frac{2r^3}{\frac{r^2}{4} \cdot r\left(3 - \frac{1}{2}\right)};\ \frac{V}{V_1} = \frac{8r^3}{r^3 \cdot 2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{8}{\frac{5}{2}}$$

mithin ergibt sich für das gesuchte Verhältnis:

$$A) \ldots \frac{V}{V_1} = \frac{16}{5}$$

---

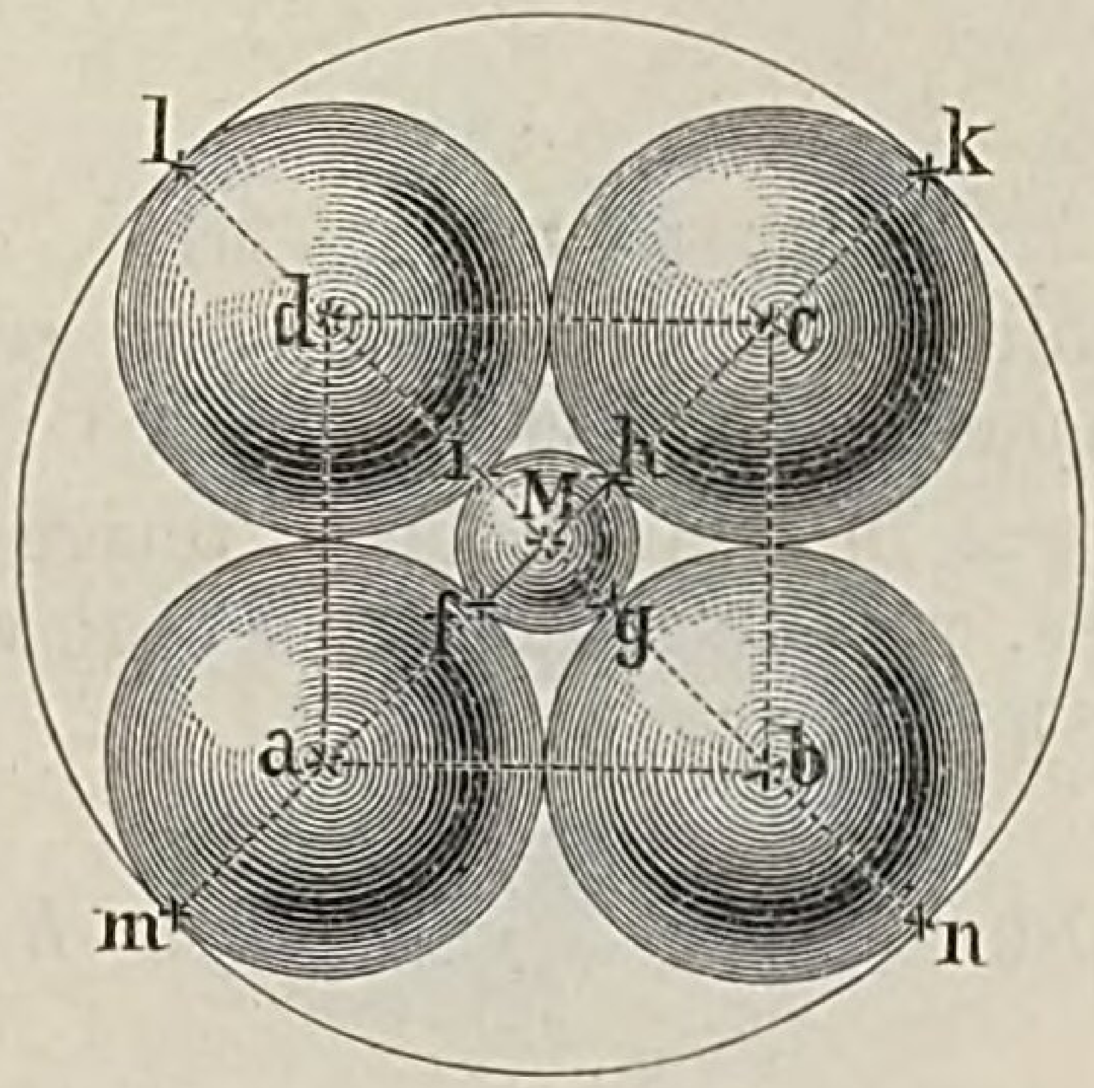
**Aufgabe 498.** Vier gleichgrosse Kugeln, deren Radien je $= r$ sind, liegen so auf einer Ebene, dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat bilden und dass jede der vier Kugeln die zwei zunächst liegenden berührt. Wie gross ist

a) der Radius der kleinsten Kugel, welche jene vier Kugeln ausschliessend berührt und wie gross ist

b) der Radius der kleinsten Kugel, welche jene vier Kugeln einschliessend berührt?

**Auflösung.** Im allgemeinen sind unzählig viele Kugeln möglich, welche die vier gegebenen gleichen Kugeln,

Figur 134.




**Erkl. 443.** Man sagt, eine Kugel berührt eine andere ausschliessend, wenn ihre Kugelflächen nur einen Punkt gemeinsam haben und die Kugelfläche der ersteren ganz ausserhalb der andern Kugelfläche liegt.

Man sagt ferner, eine Kugel berührt eine andere ein- oder umschliessend, wenn ihre Kugelflächen ebenfalls nur einen Punkt gemeinsam haben und die Kugelfläche der zweiten (der kleineren) aber ganz innerhalb der ersten (der grösseren) Kugelfläche liegt.

Diese Definitionen sind analog denen aus der Planimetrie in bezug auf zwei sich berührende Kreise.

**Erkl. 444.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Berühren sich zwei Kugeln ausschliessend, so ist ihre Centrallinie, d. i. die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, gleich der Summe der Radien beider Kugeln; berühren sich hingegen zwei Kugeln einschliessend, so ist ihre Centrallinie gleich der Differenz der Radien beider Kugeln."

Dieser Lehrsatz ist analog dem entsprechenden aus der Planimetrie in bezug auf zwei sich berührende Kreise.

deren Lage zu einander durch die Lage der gleichen Kugeln um $a$, $b$, $c$ und $d$ in Fig. 134 angedeutet ist, aus-, bezw. einschliessend berühren, (s. Erkl. 443). Die Mittelpunkte aller dieser denkbaren Kugeln müssen in der Axe liegen, welche man in dem Durchschnittspunkt der Diagonalen des Quadrats $abcd$ senkrecht zur Ebene desselben sich denkt, indem jeder Punkt dieser gedachten Axe gleichweit von den vier Ecken $a$, $b$, $c$ und $d$ des Quadrats $abcd$, mithin auch gleichweit von den um $a$, $b$, $c$ und $d$ beschriebenen gleichen Kugelflächen entfernt ist. Die kleinsten dieser Kugeln sind offenbar diejenigen, deren Mittelpunkte in dem Durchschnittspunkt $M$ der Diagonalen des Quadrats $abcd$ liegen, dessen Ecken zugleich die Mittelpunkte jener vier Kugeln bilden, indem dieser Punkt $M$ ebenfalls ein Punkt jener gedachten Axe ist und die kürzeste Entfernung von den Ecken des Quadrats $abcd$, bezw. somit auch die kürzeste Entfernung von den um $a$, $b$, $c$ und $d$ beschrieben gedachten gleichen Kugeln hat.

Denkt man sich nun durch die vier Mittelpunkte $a$, $b$, $c$ und $d$ der gleichen Kugeln eine horizontale Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die vier gleichen Kugeln in den grössten Kreisen um $a$, $b$, $c$ und $d$ und die jene vier Kugeln aus-, bezw. einschliessend berührenden Kugeln in den grössten Kreisen um $M$, von welchen der kleinere jener vier grössten Kreise ausschliessend, der grössere dieselben aber einschliessend berührt.

Zur Bestimmung des gesuchten Radius $x$ ($= Mf = Mg = Mh = Mi$) des kleineren Kreises um $M$ beachte man, dass z. B. die Centrallinie $Md$ ($= Mc = Mb = Mn$) einmal gleich der Summe der Radien $Mf$ und $df$, bezw. gleich der Summe der Radien $x$ und $r$ ein andermal gleich der halben Diagonale des Quadrats $abcd$ ist, dessen eine Seite, z. B. $dc = do + oc = r + r = 2r$ ist. Man hat somit die Relationen:

a) . . . $\overline{Md} = x + r$

b) . . . $Md = r\sqrt{2}$ (s. Erkl. 445)

**Erkl. 445.** Aus dem bei $c$ rechtwinkligen Dreieck $bcd$ in Figur 134, erhält man die Relation:

$$\overline{bd} = \sqrt{\overline{bc}^2 + \overline{cd}^2}$$

$$\frac{\overline{bd}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{bc}^2 + \overline{cd}^2}$$

$$\frac{\overline{bd}}{2} = Md = \frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2 + (2r)^2}$$

$$MD = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + 4r^2}$$

$$MD = \frac{1}{2}\sqrt{8r^2}$$

$$MD = \frac{2r}{2}\sqrt{2}$$

oder

$$MD = r\sqrt{2}$$

Aus diesen Relationen erhält man für den Radius $x$ der kleineren Kugel um $M$, d. i. die Kugel, welche die gleichen Kugeln um $a$, $b$, $c$ u. $d$ ausschliessend berührt:

$$x + r = r\sqrt{2}$$

mithin ist:

$$x = r\sqrt{2} - r$$

oder

A) . . . $x = r(\sqrt{2} - 1)$

Zur Bestimmung des gesuchten Radius $y$ ($= Ml = Mk = Mn = Mm$) des grösseren Kreises um $M$, beachte man, dass z. B.:

$$Ml = Mf + fd + dl$$

bezw. dass:

$$y = x + r + r$$

oder dass nach der Gleichung A):

$$y = r(\sqrt{2} - 1) + 2r$$

ist. Aus letzter Gleichung erhält man für den gesuchten Radius $y$ der grösseren Kugel um $M$, d. i. die Kugel, welche die gleichen Kugeln um $a$, $b$, $c$ und $d$ einschliessend berührt.

$$y = r(\sqrt{2} - 1 + 2)$$

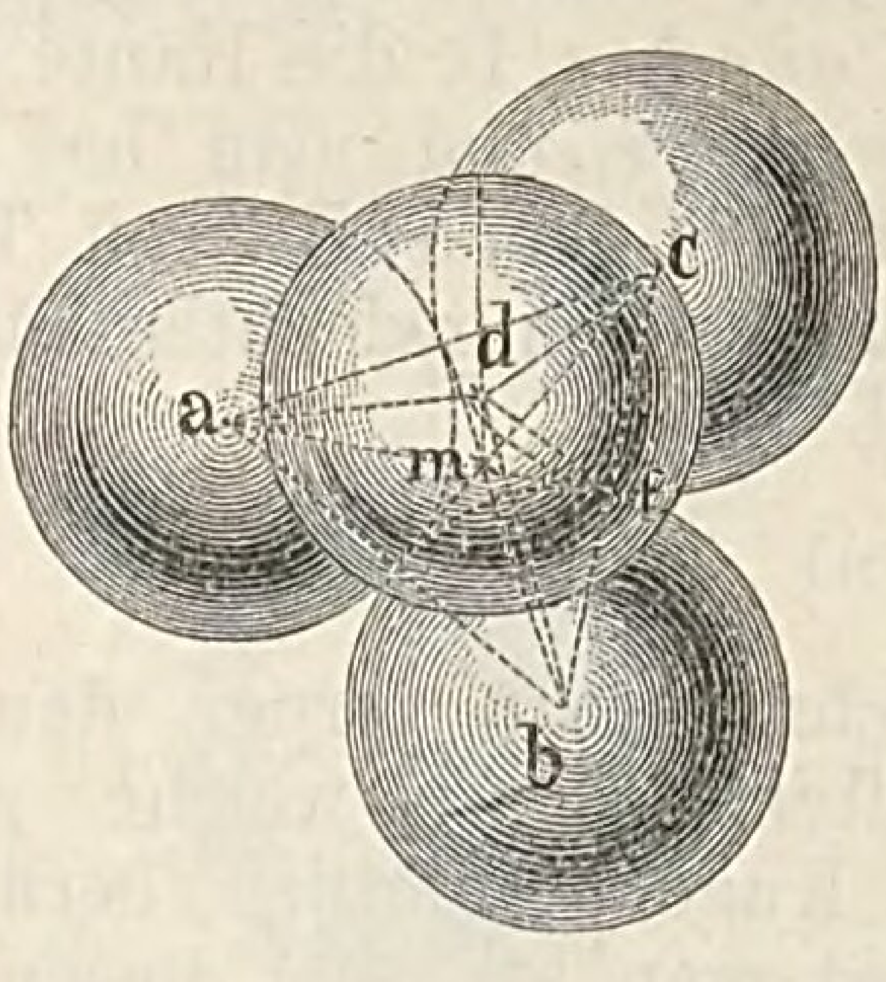
oder

B) . . . $y = r(\sqrt{2} + 1)$

---

**Aufgabe 499.** Vier gleiche Kugeln, von denen jede die drei andern berührt, werden sämtlich von einer fünften Kugel berührt. In welchem Verhältnis steht der Radius dieser fünften Kugel zu dem Radius einer jener vier Kugeln?

Figur 135.




**Auflösung.** Berühren sich, siehe Fig. 135, die drei gleichen Kugeln um $a$, $b$ und $c$ so, dass jede derselben die beiden übrigen Kugeln berührt, so bilden die Mittelpunkte derselben das gleichseitige Dreieck $abc$, von welchem jede Seite die Centrallinie zweier dieser Kugeln ist. Sollen diese drei Kugeln sämtlich von einer vierten Kugel berührt werden, so müssen die Verbindungslinien des Mittelpunkts der vierten Kugel mit den Mittelpunkten $a$, $b$ und $c$ einander gleich sein, es muss also das Centrum der vierten Kugel auf der in dem Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks $abc$ errichteten Axe liegen. Soll ferner diese vierte Kugel einer der drei

ersteren gleichen Kugeln gleich sein, so muss deren Centrum auf der soeben erwähnten Axe eine solche Lage haben, dass dessen Entfernung von den Mittelpunkten $a$, $b$ u. $c$ gleich einer der gleichen Centrallinien oder Dreieckseiten $ab$, $bc$ und $ca$ ist. Der Mittelpunkt der vierten Kugel bildet somit die Spitze einer über dem gleichseitigen Dreieck $abc$ konstruiert gedachten, geraden Pyramide, deren Kanten sämtlich gleich lang sind, er bildet also die Spitze eines mit $abc$ konstruierten, regulären Tetraeders. Die Berührungspunkte der vier Kugeln liegen auf den Mitten der Kanten dieses Tetraeders, dessen Kantennetz durch die Centrallinie je zweier der Kugeln gebildet wird.

Da nun der Mittelpunkt $m$ derjenigen gedachten Kugel, welche durch die Ecken des regulären Tetraeders $abcd$ geht gleich weit von den Ecken $a$, $b$, $c$ und $d$ entfernt ist, da ferner die fünfte Kugel, welche jene vier gleichen Kugeln sämtlich berühren soll, nur eine solche sein kann, welche entweder die vier gleichen Kugeln ein- oder welche dieselben ausschliessend berührt, so ist der Radius der gesuchten Kugel gleich dem Radius der dem regulären Tetraeder umschriebenen Kugel vermehrt oder vermindert um den Radius einer der vier gleichen Kugeln um $a$, $b$, $c$ und $d$ und zwar je nachdem die fünfte Kugel die gegebenen vier Kugeln ein- oder ausschliessend berührt. Bezeichnet man also den Radius einer der vier gleichen Kugeln um $a$, $b$, $c$ und $d$ mit $r$, so ist eine Kante des regulären Tetraeders $abcd$, z. B. die Kante (Centrallinie) $ac = 2r$ und man hat für den Radius $R$ der dem regulären Tetraeder $abcd$ umschrieben gedachten Kugel nach der Erkl. 353:

$$\text{a)} \ldots R = \frac{2r}{4}\sqrt{6}$$

Bezeichnet man ferner den Radius der fünften Kugel, welche jene vier gleichen Kugeln sämtlich berührt, mit $r_1$, so hat man also für diesen Radius:

$$r_1 = R \pm r$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

oder
$$r_1 = \frac{2r}{4}\sqrt{6} \pm r$$

$$\text{b)} \ldots r_1 = r\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} + 1\right)$$

Für das gesuchte Verhältnis der Radien $r$ und $r_1$ hat man also:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \pm 1\right)}{r}$$

oder
$$\frac{r_1}{r} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6} \pm 1}{1}$$

hieraus ergibt sich das gesuchte Verhältnis, wenn die fünfte Kugel die gegebenen vier Kugeln einschliessend berührt:

$$\text{A)} \ldots \frac{r_1}{r} = \frac{\sqrt{6} + 2}{2}$$

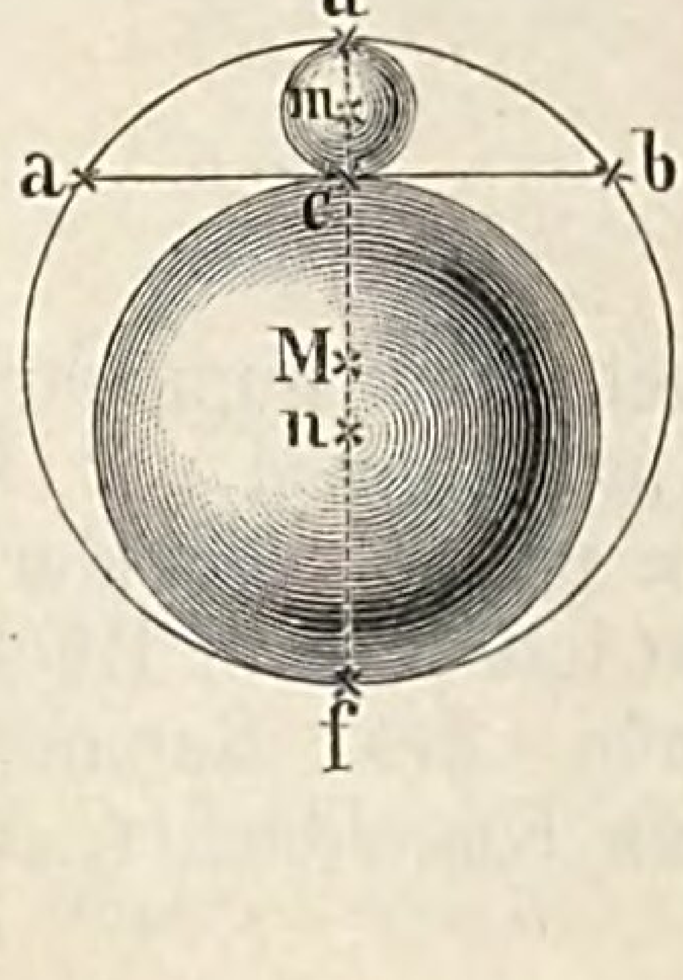
und wenn sie die gegebenen vier Kugeln ausschliessend berührt:

$$\text{B)} \ldots \frac{r_1}{r} = \frac{\sqrt{6} - 2}{2} \text{ ist.}$$

---

**Aufgabe 500.** Durch eine Kugel, deren Radius $= r$ gegeben ist, sei im Abstande $p$ vom Mittelpunkt desselben eine Ebene gelegt und in jedes der Kugelsegmente, in welche hierdurch die Kugel zerlegt wird, sei die grösstmögliche Kugel so konstruiert, dass sie jene Ebene und die Kugelfläche der gegebenen Kugel berührt. In welchem Verhältnis steht die Summe der Volumen der beiden so konstruierten Kugeln zum Volumen des Raumes, welcher zwischen den drei Kugelflächen liegt?

Figur 136.




**Formel:**

Für eine Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67).}$$

**Auflösung.** Stellt, siehe Fig. 136, der Kreis um $M$ den grössten Kreis der gegeb. Kugel dar, welchen man erhält, wenn man durch den Mittelpunkt $M$ eine horizontale Ebene gelegt denkt und man denkt sich alsdann in dem gegebenen Abstand $Mc = p$ vom Mittelpunkt $M$ eine vertikale Ebene durch die Kugel gelegt, so schneidet dieselbe die Kugel in einem Kreise, welcher in der Figur 136 durch die gerade Linie $ab$ dargestellt ist. Diese Ebene $ab$ zerlegt die Kugel um $M$ in die beiden Kugelsegmente $adb$ und $afb$. Wie nun aus der Figur leicht zu ersehen

ist, sind unzählig viele Kugeln möglich, welche man z. B. in das Kugelsegment $adb$ so konstruiert denken kann, dass sie den Grundkreis $ab$ des Segments und die zu demselben gehörige Calotte $adb$ berühren. Die grösste dieser unzählig vielen denkbaren Kugeln wird offenbar diejenige sein, deren Mittelpunkt $m$ in der Höhe $cd$ des Segments $adb$, bezw. in dem Radius $Md$ der Kugel um $M$ liegt, welcher auf dem Schnittkreis $ab$ senkrecht steht. Dasselbe gilt für die grösstmögliche Kugel um $n$, die in ähnlicher Weise in das Kugelsegment $afb$ konstruiert werden kann.

Da hiernach die durch den Mittelpunkt $M$ der gegebenen Kugel gelegt gedachte, horizontale Ebene auch die Mittelpunkte $m$ und $n$ der soeben erwähnten beiden Kugeln enthalten muss, so schneidet diese horizontale Ebene auch die beiden eingezeichneten Kugeln in den grössten Kreisen um $m$ und $n$ wie die Fig. 137 zeigt. Um nun eine Relation für das gesuchte Verhältnis aufstellen zu können, muss man die Radien $mc$ und $nc$ der Kugeln um $m$ und $n$ in den gegebenen Radius $Md$ ($= Mf$) $= r$ der Kugel um $M$ ausdrücken, was folgendermassen geschehen kann.

Bezeichnet man den Radius $mc$ ($= md$) mit $x$, den Radius $nc$ ($= nf$) mit $y$, und setzt man für den Radius $Md$ ($= Mf$) $= r$, so ergeben sich aus der Figur 136 nach der Erkl. 446 die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)} \ldots x + y = r \\ \text{b)} \ldots x = \dfrac{r - p}{2} \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 446)}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$1) \ldots x = \frac{r-p}{2}$$

$$2) \ldots y = \frac{r+p}{2}$$

Bezeichnet man nunmehr das Volumen der Kugel um $m$ mit $V_1$, das der Kugel um $n$ mit $V_2$, das der Kugel um $M$ mit $V$, so hat man in Rücksicht, dass das Volumen des Raumes, welcher zwischen den Kugelflächen der drei Ku-

**Erkl. 446.** Aus Figur 136 ergibt sich:

$$\overline{md} + \overline{mc} + \overline{nc} + \overline{nf} = \overline{df}$$

oder da:

$$\overline{md} = \overline{mc} = x$$

$$\overline{nc} = \overline{nf} = y$$

$$\overline{df} = \overline{Md} + \overline{Mf} = 2r$$

gesetzt werden kann:

$$2x + 2y = 2r$$

oder

$$\text{a)} \ldots x + y = r$$

Ferner ergibt sich aus der Figur 136:

$$\overline{md} + \overline{mc} + \overline{Mc} = \overline{Md}$$

oder da:

$$\overline{md} = \overline{mc} = x$$

und gemäss der Aufgabe 500:

$$\overline{Mc} = p$$

und $\overline{Md} = r$

gesetzt werden kann:

$$2x + p = r$$

oder

$$\text{b)} \ldots x = \frac{r-p}{2}$$

geln liegt $= V-(V_1+V_2)$ ist und mit Benutzung der vorstehenden Formeln und der Gleichungen 1) und 2) für das gesuchte Verhältnis:

$$\frac{V_1+V_2}{V-(V_1+V_2)}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r-p}{2}\right)^3+\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r+p}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3-\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r-p}{2}\right)^3+\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r+p}{2}\right)^3\right]}$$

oder wenn man Zähler und Nenner des Quotienten rechts durch $\frac{4}{3}\pi$ dividiert und gleichzeitig mit $2^3\,(=8)$ multipliziert:

$$3)\ \ldots\ \frac{V_1+V_2}{V-(V_1+V_2)}=\frac{(r-p)^3+(r+p)^3}{8r^3-(r-p)^3-(r+p)^3}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich schliesslich nach der Erkl. 447 für das gesuchte Verhältnis:

$$A)\ \ldots\ \frac{V_1+V_2}{V-(V_1+V_2)}=\frac{r^2+3p^2}{3(r^2-p^2)}$$

**Erkl. 447.** Die rechte Seite der nebenstehenden Gleichung 3) reduziert gibt der Reihe nach:

$$\frac{V_1+V_2}{V-(V_1+V_2)}=\frac{r^3-3r^2p+3rp^2-p^3+r^3+3r^2p+3rp^2+p^3}{8r^3-(r^3-3r^2p+3rp^2-p^3)-(r^3+3r^2p+rp^2+p^3)}$$
$$=\frac{2r^3+6rp^2}{8r^3-2r^3-6rp^2}$$
$$=\frac{2r(r^2+3p^2)}{6r^3-6rp^2}$$
$$=\frac{2r(r^2+3p^2)}{6r(r^2-p^2)}$$
$$=\frac{r^2+3p^2}{3(r^2-p^2)}$$

---

## 17. Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Kegelstumpf.

**Aufgabe 501.** Von vier gleichgrossen Kugeln, deren Radien $=r$ sind, berührt jede die drei übrigen. Diese vier Kugeln werden sämtlich von der Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfs berührt, dessen eine Endfläche drei der Kugeln und dessen andre Endfläche die vierte berührt. Wie gross ist das Volumen dieses Kegelstumpfs?

**Formel:**

Für einen Kegelstumpf:

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)\ \text{(s. Erkl. 53).}$$

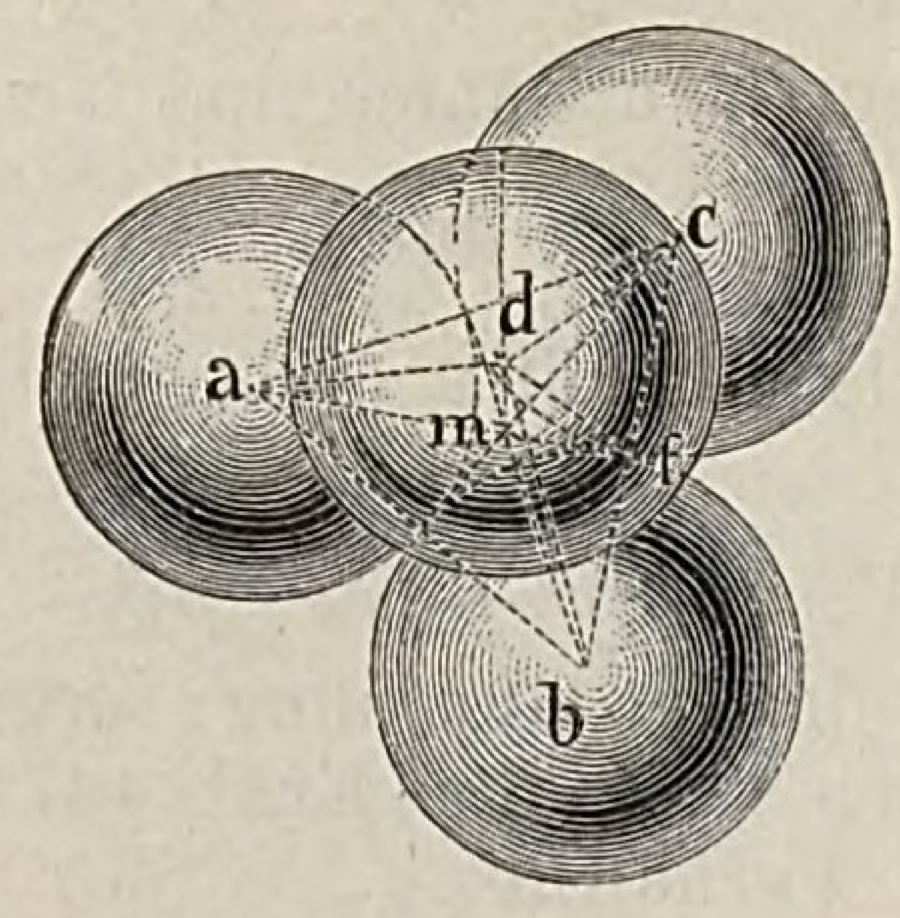
**Auflösung.** Analog wie in der Aufgabe 499 bereits erwähnt und durch die Fig. 135 gezeigt wurde, bilden die Mittelpunkte der vier gleichen, sich gegenseitig berührenden Kugeln das Kantennetz eines regulären Tetraeders, welches in der Fig. 137 durch *dabc* dargestellt sei.

Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des Kegelstumpfs, dessen Begrenzungsflächen die vier gleichen Ku-

geln berühren sollen, muss man nach vorstehender Formel die Höhe $y$, die Radien $z$ und $u$ der beiden Grundflächen desselben aus dem gegebenen Radius $r$ jener Kugeln finden, indem man alsdann die Beziehung hat:

$$1) \ldots x = \frac{\pi y}{3}(z^2 + z \cdot u + u^2)$$

Figur 137.




Die Berechnung der Dimensionen $y$, $z$ und $u$ des Kegelstumpfs geschieht wie folgt:

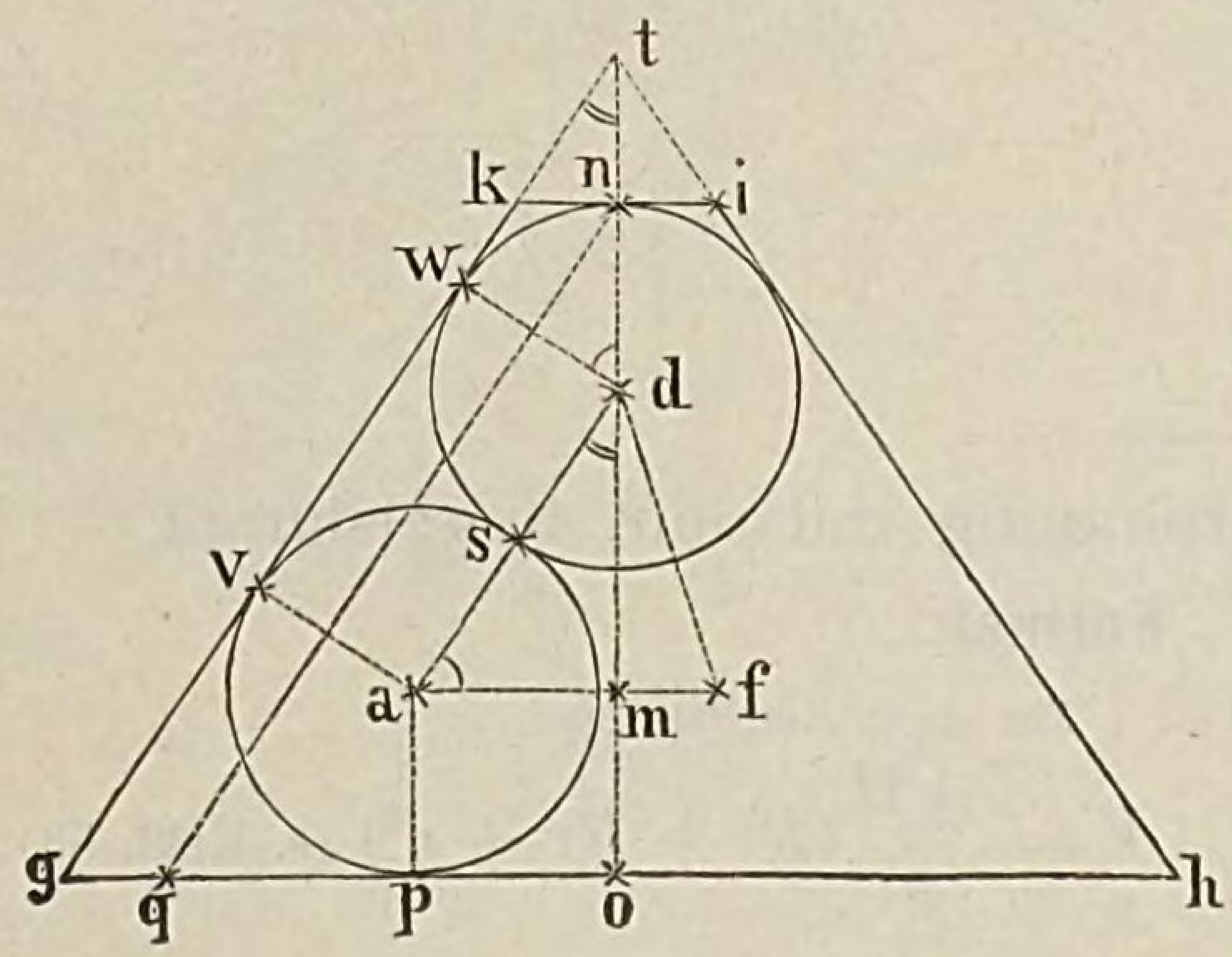
Denkt man sich, siehe Figur 137, durch die Höhe $md$ und die Seitenkante $ad$ des regulären Tetraeders $dabc$, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der gedachten vier gleichen, sich berührenden Kugeln bilden, eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene, vergleiche die Fig. 137 und 138, das Tetraeder in dem Dreieck $adf$, dessen Seite

a) $ad = 2r$ nämlich gleich der Kante des Tetraeders $dabc$, bezw. gleich der Centrallinie der Kugeln um $a$ und $d$ (siehe die Auflösung der Aufgabe 499) ist,

dessen Höhe:

b) $\overline{md} = \frac{2r}{3}\sqrt{6}$, nämlich gleich der Höhe des Tetraeders $dabc$ (dessen Kante $= 2r$) ist, siehe Erkl. 353

Figur 138.




und dessen beiden andern Seiten $af$ und $df$ gleich den Höhen der gleichseitigen und kongruenten Dreiecke $abc$ und $bcd$ sind. Ferner schneidet jene Ebene die Kugeln um $a$ und $d$ in grössten Kreisen und schneidet schliesslich noch den gemäss der Aufgabe um die vier Kugeln konstruiert gedachten geraden Kegelstumpf in dem Antiparallelogramm $ghik$, dessen Höhe $no$ gleich der zu bestimmenden Höhe $y$ des Kegelstumpfs, dessen parallele Seiten $gh$ u. $ki$, bezw. gleich den Durchmessern $2z$ und $2u$ der Grundkreise und dessen nichtparallele Seiten $gk$ und $hi$ gleich der Seitenlinie jenes Stumpfes sind.

Aus der Figur 138 erhält man für die Höhe $no = y$ des gedachten Kegelstumpfs:

$$y = \overline{no} = \overline{om} + \overline{md} + \overline{dn}$$

oder

$$y = \overline{pa} + \overline{md} + \overline{dn}$$

**Erkl. 448.** Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $qon$ und $amd$ in Fig. 138 ergibt sich die Proportion:

$$1) \ldots \frac{\overline{qo}}{\overline{am}} = \frac{\overline{on}}{\overline{md}}$$

oder, da:

$$a) \ldots \overline{qo} = \overline{go} - \overline{gq} = \overline{go} - \overline{kn} = z - u$$

$$b) \ldots \overline{am} = \frac{2r}{3}\sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 449)}$$

$$c) \ldots \overline{on} = y = 2r\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \text{[s. nebensteh. Gleich. 2)]}$$

$$d) \ldots \overline{md} = \frac{2r}{3}\sqrt{6} \text{ [s. nebenstehende Gleichung b)] ist,}$$

die Proportion:

$$\frac{z-u}{\frac{2r}{3}\sqrt{3}} = \frac{2r\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)}{\frac{2r}{3}\sqrt{6}}$$

und hieraus erhält man:

$$z - u = 2r \cdot \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3}$$

$$z - u = 2r \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$z - u = 2r \cdot \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

$$z - u = 2r \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$z - u = r\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{12}\right)$$

$$2) \ldots z - u = r\left(\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

**Erkl. 449.** Da in Figur 137 $m$ der Fusspunkt der Höhe $md$ des regulären Tetraeders ist, so ist $am$ der Radius des dem gleichseitigen Dreieck $abc$ umbeschriebenen Kreises. Da die Seite dieses gleichseitigen Dreiecks $= 2r$ ist, so erhält man nach der Erkl. 109:

$$\overline{am} = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$$

mithin nach Gleichung b):

$$y = r + \frac{2r}{3}\sqrt{6} + r$$

oder

$$2) \ldots y = 2r\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\right).$$

Zur Bestimmung der Radien $\overline{go} = z$ und $\overline{kn} = u$ der Kegelstumpfgrundflächen ziehe man in Figur 138 $\overline{nq} \parallel \overline{kg}$, fälle $dw \perp gk$ und verlängere die Linien $gk$, $hi$ und $on$ bis zu ihrem gemeinsamen Durchschnitt in $t$; man erhält alsdann die rechtwinkligen und ähnlichen Dreiecke $qon$, $amd$, $got$ und $wdt$, aus welchen sich nach den Erkl. 448 und 450 die Relationen:

$$3) \ldots z - u = r\left(\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

und

$$4) \ldots z = r\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$$

herleiten lassen.

Aus den Gleichungen 3) und 4) erhält man durch Substitution, für $u$:

$$u = r\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) - \frac{r}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

oder

$$u = r\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

mithin:

$$5) \ldots u = \frac{r}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) und 5) erhält man schliesslich für das gesuchte Volumen $x$:

$$x = \frac{\pi \cdot 2r\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)}{3} \cdot \left(\left[r\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\right]^2 + r\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \cdot \frac{r}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + \left(\frac{r}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\right)^2\right)$$

oder

$$x = \frac{2\pi}{3} \cdot r\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cdot \left[r^2\left(\frac{1}{4} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{4}{9} \cdot 3 + \right.\right.$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} + 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{4} \cdot 6\Big) + \frac{r^2}{2}\Big(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} +$$

$$\left.\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}\Big) + \frac{r^2}{4}\left(6 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + 2\right)\right]$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \cdot r^3\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{12} + \frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{2} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{4}\sqrt{12} + \frac{1}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{12} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + \frac{1}{2}\right]$$

$$x = \frac{2\pi}{3} r^3\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cdot \left(\frac{19}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{6} + \sqrt{18}\right)$$

$$x = \frac{2\pi}{3} r^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cdot \left(\frac{19}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)$$

$$x = \frac{2\pi}{3} r^3\left(\frac{19}{3} + \frac{19}{9}\sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6} + \frac{1}{9} \cdot 6 + 3\sqrt{2} + \sqrt{12}\right)$$

$$x = \frac{2\pi}{3} r^3\left(\frac{21}{3} + \frac{22}{9}\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$$

mithin ist das gesuchte Volumen $x$:

$$x = \frac{2\pi}{3} r^3 \cdot \left(7 + \frac{22}{9}\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$$

**Erkl. 450.** Denkt man sich den Kegelstumpf, welcher die vier Kugeln in Fig. 137 einschliessend berühren soll, zu einem vollständigen Kegel ergänzt und dementsprechend die Durchschnittsfigur 138 durch Verlängerung der Seitenlinien $gk$ und $hi$ des Kegelstumpfs ebenfalls ergänzt, so erhält man die ähnlichen Dreiecke $got$ und $amd$, berücksichtigt man ferner, dass $ot = od + dt$ ist, so kann man zunächst die Proportion aufstellen:

$$\text{a)} \ldots \frac{\overline{go}}{\overline{od} + \overline{dt}} = \frac{\overline{am}}{\overline{md}}$$

Fällt man noch die Senkrechte $dw$, so erhält man das bei $w$ rechtwinklige Dreieck $dwt$, das dem Dreieck $amd$ ähnlich ist (da $\sphericalangle wdt = \sphericalangle mad$, siehe Erkl. 451) und aus diesen beiden ähnlichen Dreiecken ergibt sich zur Bestimmung von $dt$ die weitere Proportion:

$$\text{b)} \ldots \frac{\overline{dt}}{\overline{ad}} = \frac{\overline{wd}}{\overline{am}}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass in den Proportionen a) und b):

$$\overline{go} = z$$

$$\overline{ad} = 2r$$

$$\overline{am} = \frac{2r}{3}\sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 449)}$$

$$\overline{md} = \frac{2r}{3}\sqrt{6} \quad \text{(s. nebensteh. Gleich. b)}$$

$$\overline{od} = \overline{om} + \overline{md} = r + \frac{2r}{3}\sqrt{6} = r\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$$

und

$$\overline{wd} = r \text{ ist,}$$

dass ferner in der Proportion a) für $\overline{dt}$ der sich aus Proportion b) ergebende Wert substituiert werden kann, so erhält man für $z$ die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{z}{r\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) + \frac{r}{\frac{2r}{3}\sqrt{3}} \cdot 2r} = \frac{\frac{2r}{3}\sqrt{3}}{\frac{2r}{3}\sqrt{6}}$$

Diese Gleichung nach $z$ aufgelöst und reduziert gibt der Reihe nach:

$$\frac{z}{r\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)+\frac{3r}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$z=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\left[r\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)+\frac{3r}{\sqrt{3}}\right]$$

$$z=r\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z=r\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{\sqrt{6}}\right)$$

$$z=r\left(\sqrt{\frac{3}{6}}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$z=r\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$$

$$z=r\left(\sqrt{\frac{2}{4}}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$$

oder

$$1)\;.\;.\;z=r\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$$

**Erkl. 451.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Stehen die Schenkel zweier Winkel paarweise aufeinander senkrecht, so sind zwei Winkel gleich.“

Da in Figur 138:

$wd \perp ad$

$dt \perp am$ ist,

so muss nach diesem Lehrsatz $\sphericalangle\, wdt = \sphericalangle\, mad$ sein.

---

## 18. Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Kegel.

**Aufgabe 502.** Der Mantel eines geraden Kegels berührt zwei Kugeln, deren Radien $\varrho$ und $\varrho_1$ sind und deren Mittelpunkte den Abstand $m$ haben, wie gross ist der Teil des Mantels jenes Kegels, der zwischen beiden Kugelflächen liegt?

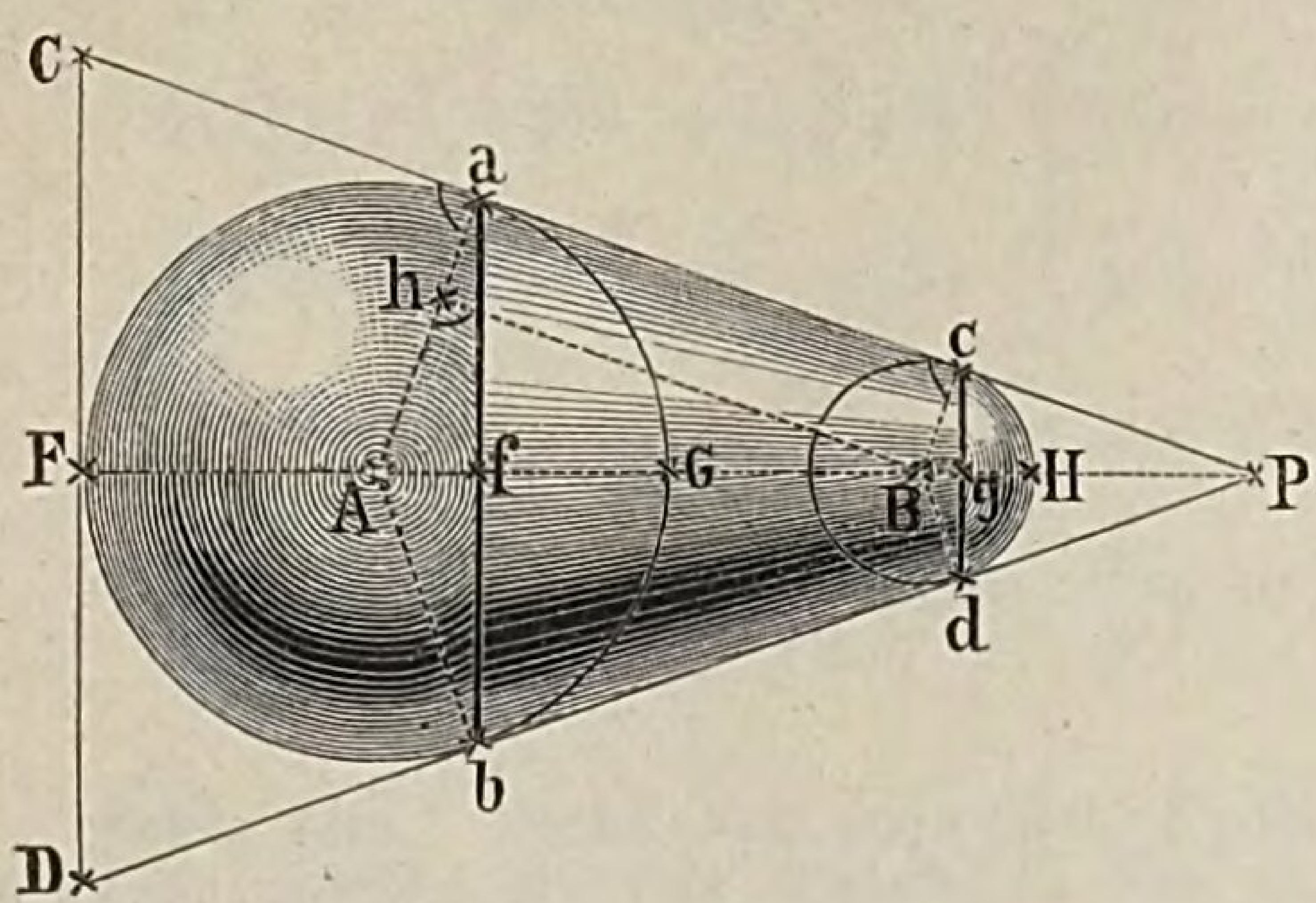
**Formel:**

Für einen Kegelstumpf:

$M = \pi s(R + r)$ (s. Erkl. 56).

**Auflösung.** Stellen, siehe Fig. 139, die Kugeln $A$ und $B$ die gegebenen Kugeln dar, deren Radien $\varrho$ u. $\varrho_1$ gegeben sind und deren Centrallinie $AB = m$ ist; und denkt man sich durch die Längsrichtung dieser Centrallinie $AB$ Ebenen gelegt, so schneiden dieselben die zwei Kugeln stets nach grössten Kreisen. Die an diese grössten Kreise gezogen gedachten, gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich sämtlich auf der verlängerten Centrallinie in einem Punkte und bilden die Seitenlinien desjenigen Kegels, dessen Mantelfläche jene beiden Kugeln berührt und dessen Spitze der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt

Figur 139.




**Erkl. 452.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Das Quadrat über der zur Hypotenuse gehörigen Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck, gebildet aus den Projektionen der Kathete auf die Hypotenuse (bezw. ist gleich dem Rechteck, gebildet aus den zwei Abschnitten der Hypotenuse, in welche dieselbe durch den Fusspunkt jener Höhe geteilt wird)."

Da in der Figur 139 das Dreieck $APa$ ein bei $a$ rechtwinkliges ist, indem $Aa$ der nach dem Berührungspunkt $a$ der Tangente $PC$ gezogene Radius ist, so besteht hiernach die Gleichung:

$$\overline{af}^2 = \overline{Af} \cdot \overline{Pf}$$

bezw. die Gleichung:

$$\text{a)} \ldots \overline{af}^2 = \overline{Af} \cdot (\overline{PA} - \overline{Af})$$

In analoger Weise ergibt sich aus dem bei $c$ rechtwinkligen Dreieck $BcP$ die Gleichung:

$$\text{b)} \ldots \overline{cg}^2 = \overline{Bg}\,(\overline{PB} - \overline{Bg})$$

**Erkl. 453.** Da in Figur 139 das Dreieck $BcP$ dem Dreieck $AaP$ ähnlich ist, so besteht die Proportion:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{Bc}}{\overline{Aa}}$$

bezw. die Proportion:

$$\text{a)} \ldots \frac{\overline{BP}}{\overline{AB} + \overline{BP}} = \frac{\overline{Bc}}{\overline{Aa}}$$

aller jener gedachten Tangenten ist. Der Teil dieses Kegelmantels, welcher zwischen den beiden Kugelflächen liegt, ist der Mantel eines Kegelstumpfs, dessen Grundkreise parallele Nebenkreise (welche Kreise zugleich die sämtlichen Berührungspunkte jener gedachten Tangenten enthalten) der Kugeln um $A$ und $B$ sind und dessen Höhe gleich dem Abstand $fg$ jener Nebenkreise ist. Denkt man sich eine jener Schnittebenen horizontal durch die Centrallinie $AB$, siehe Figur 139, gelegt, so schneidet dieselbe die Kugeln in den grössten Kreisen um $A$ und $B$ und den soeben erwähnten Kegelstumpfmantel in dem Antiparallelogramm $abdc$, dessen parallele Seiten $ab$ und $cd$, bezw. gleich den Durchmessern der Grundkreise und dessen nichtparallele Seiten $ac$ und $bd$ gleich der Seitenlinie dieses Kegelstumpfs sind.

Zur Bestimmung des gesuchten Mantels $x$ des Kegelstumpfs besteht, wenn man in vorstehender Formel:

$$M = x$$

$$\left.\begin{aligned} s &= \overline{ac} \\ R &= \frac{\overline{ab}}{2} = \overline{af} \\ r &= \frac{\overline{cd}}{2} = \overline{cg} \end{aligned}\right\} \text{(s. Fig. 139)}$$

setzt, die Relation:

$$1) \ldots \quad x = \pi \cdot \overline{ac}\,(\overline{af} + \overline{cg})$$

Um die in dieser Relation vorkommenden Stücke: $\overline{ac}$, $\overline{af}$ und $\overline{cg}$ in die gegebenen Kugelradien $\varrho$ und $\varrho_1$ und die gegebene Centrallinie $AB = m$ ausdrücken zu können, verfahre man folgendermassen:

Denkt man sich durch $B$ die Linie $Bh$ parallel zu $ac$ gezogen, so erhält man das bei $h$ rechtwinklige Dreieck $AhB$, in welchem

$$Bh = \overline{ac}$$
$$AB = m$$
$$Ah = Aa - ha = Aa - Bc = \varrho - \varrho_1$$

ist und man hat für $\overline{ac}$ die Beziehung:

$$2) \ldots \overline{ac} = \sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2}$$

Zur Bestimmung der Radien $\overline{af}$ und $\overline{cg}$ kann man die weiteren Relationen aufstellen:

a) . . . $\overline{af}^2 = \overline{aA}^2 - \overline{Af}^2$

b) . . . $\overline{cg}^2 = \overline{cB}^2 - \overline{Bg}^2$

c) . . . $\overline{af}^2 = \overline{Af} \cdot (\overline{AP} - \overline{Af})$ (s. Erkl. 452)

d) . . . $\overline{cg}^2 = \overline{Bg} \cdot (\overline{BP} - \overline{Bg})$ (s. Erkl. 452)

e) . . . $\frac{\overline{BP}}{\overline{BP} + \overline{AB}} = \frac{\overline{Bc}}{\overline{Aa}}$ (s. Erkl. 453)

Aus der Gleichung e) erhält man nach der Erkl. 454:

f) . . . $\overline{BP} = \frac{m \cdot \varrho_1}{\varrho - \varrho_1}$

ferner erhält man, da

$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP}$$

gesetzt werden kann:

$$\overline{AP} = m + \frac{m \cdot \varrho_1}{\varrho - \varrho_1}$$

$$\overline{AP} = \frac{m\varrho - m\varrho_1 + m\varrho_1}{\varrho - \varrho_1}$$

oder

g) . . . $\overline{AP} = \frac{m\varrho}{\varrho - \varrho_1}$

Setzt man die Werte für $\overline{BP}$ u. $\overline{AP}$ in die Gleichungen c) und d), so ergeben sich die weiteren Gleichungen:

h) . . . $\overline{af}^2 = \overline{Af} \cdot \left(\frac{m\varrho}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Af}\right)$

und

i) . . . $\overline{cg}^2 = \overline{Bg} \cdot \left(\frac{m\varrho_1}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Bg}\right)$

Aus den Gleichungen h) und a), bezw. aus den Gleichungen i) und b) erhält man nunmehr unter Berücksichtigung, dass in den Gleichungen a) und b) $\overline{aA} = \varrho$ und $\overline{cB} = \varrho_1$ gesetzt werden kann:

k) . . . $\varrho^2 - \overline{Af}^2 = \overline{Af} \cdot \left(\frac{m\varrho}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Af}\right)$

und

l) . . . $\varrho_1{}^2 - \overline{Bg}^2 = \overline{Bg}\left(\frac{m\varrho_1}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Bg}\right)$

Löst man die Gleichungen k) und l) nach $\overline{Af}$, bezw. nach $\overline{Bg}$ auf, so erhält man für diese Strecken:

**Erkl. 454.** Löst man nebenstehende Gleichung:

e) . . . $\frac{\overline{BP}}{\overline{AB} + \overline{BP}} = \frac{\overline{Bc}}{\overline{Aa}}$

nach $\overline{BP}$ auf und setzt $\overline{AB} = m$, $\overline{Bc} = \varrho_1$ und $\overline{Aa} = \varrho$, so erhält man:

$$\frac{\overline{BP}}{m + \overline{BP}} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$$

$$\overline{BP} \cdot \varrho = m \cdot \varrho_1 + \overline{BP} \cdot \varrho_1$$

$$\overline{BP} \cdot (\varrho - \varrho_1) = m \cdot \varrho_1$$

1) . . . $\overline{BP} = \frac{m \cdot \varrho_1}{\varrho - \varrho_1}$

**Erkl. 455.** Nebenstehende Gleichung:

k) . . . $\varrho^2 - \overline{Af}^2 = \overline{Af}\left(\frac{m \cdot \varrho}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Af}\right)$

nach $\overline{Af}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\varrho^2 - \overline{Af}^2 = \overline{Af} \cdot \frac{m\varrho}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Af}^2$$

$$\overline{Af} \cdot \frac{m\varrho}{\varrho - \varrho_1} = \varrho^2$$

$$\overline{Af} = \frac{\varrho^2 (\varrho - \varrho_1)}{m\varrho}$$

oder

$$\overline{Af} = \frac{\varrho (\varrho - \varrho_1)}{m}$$

**Erkl. 456.** Vorstehende Gleichung:

$$1) \ldots \varrho_1^2 - \overline{Bg}^2 = \overline{Bg}\left(\frac{m\varrho_1}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Bg}\right)$$

nach $\overline{Bg}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\varrho_1^2 - \overline{Bg}^2 = \overline{Bg} \cdot \frac{m\varrho_1}{\varrho - \varrho_1} - \overline{Bg}^2$$

$$\overline{Bg} \cdot \frac{m\varrho_1}{\varrho - \varrho_1} = \varrho_1^2$$

$$\overline{Bg} = \frac{\varrho_1^2(\varrho - \varrho_1)}{m \cdot \varrho_1}$$

oder

$$\overline{Bg} = \frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_1)}{m}$$

**Erkl. 457.** Die nebenstehend entwickelten Gleichungen m) und n) hätte man auch mittels der Proportionen:

$$\frac{\overline{Af}}{\varrho} = \frac{\varrho - \varrho_1}{m}$$

$$\frac{\overline{Bg}}{\varrho_1} = \frac{\varrho - \varrho_1}{m}$$

bezw. mittels der Proportionen:

$$\frac{\overline{Af}}{\overline{Aa}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{Bg}}{\overline{Bc}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{AB}}$$

aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AhB$ und $Afa$ und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AhB$ und $Bgc$ herleiten können, denn je zwei der erwähnten Dreiecke sind ähnlich, weil die Seiten des einen bezw. auf dem des andern senkrecht stehen.

**Erkl. 458.** Nebenstehende Gleichung 3) nach $\overline{af}$ aufgelöst, bezw. reduziert gibt der Reihe nach:

$$\overline{af} = \sqrt{\varrho^2 - \frac{\varrho^2(\varrho - \varrho_1)^2}{m^2}}$$

$$\overline{af} = \sqrt{\frac{m^2\varrho^2 - \varrho^2(\varrho - \varrho_1)^2}{m^2}}$$

$$\overline{af} = \frac{1}{m}\sqrt{\varrho^2[m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2]}$$

oder

$$\overline{af} = \frac{\varrho}{m}\sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2}$$

**Erkl. 459.** Nebenstehende Gleichung 4) nach $\overline{cg}$ aufgelöst, bezw. reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\overline{cg} = \sqrt{\varrho_1^2 - \frac{\varrho_1^2(\varrho - \varrho_1)^2}{m^2}}$$

$$\overline{cg} = \sqrt{\frac{m^2\varrho_1^2 - \varrho_1^2(\varrho - \varrho_1)^2}{m^2}}$$

$$\overline{cg} = \frac{1}{m}\sqrt{\varrho_1^2[m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2]}$$

oder

$$\overline{cg} = \frac{\varrho_1}{m}\sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2}$$

$$m) \ldots \overline{Af} = \frac{\varrho(\varrho - \varrho_1)}{m}$$

$$n) \ldots \overline{Bg} = \frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_1)}{m}$$

(siehe die Erkl. 455, 456 und 457).

Setzt man diese Werte für $\overline{Af}$ und $\overline{Bg}$ in die Gleichungen a) und b), so erhält man in Rücksicht, dass in den Gleichungen a) und b) $\overline{aA} = \varrho$ und $\overline{cB} = \varrho_1$ gesetzt werden kann für $\overline{af}$ und $\overline{cg}$ die Bestimmungsgleichungen:

$$3) \ldots \overline{af}^2 = \varrho^2 - \left(\frac{\varrho(\varrho - \varrho_1)}{m}\right)^2$$

und

$$4) \ldots \overline{cg}^2 = \varrho_1^2 - \left(\frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_1)}{m}\right)^2$$

Aus letzteren Gleichungen erhält man nach der Erkl. 458 und 459:

$$5) \ldots \overline{af} = \frac{\varrho}{m}\sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2}$$

und

$$6) \ldots \overline{cg} = \frac{\varrho_1}{m}\sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2}$$

Aus den Gleichungen 1), 2), 5) und 6) erhält man nunmehr für die Mantelfläche $x$ des Kegelstumpfs die Bestimmungsgleichung:

$$x = \pi \cdot \sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2} \cdot \left(\frac{\varrho}{m}\sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2} + \frac{\varrho_1}{m}\sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2}\right)$$

Die rechte Seite reduziert gibt:

$$x = \pi \cdot \left(\sqrt{m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varrho}{m} + \frac{\varrho_1}{m}\right)$$

$$x = \pi \cdot [m^2 - (\varrho - \varrho_1)^2] \cdot \frac{\varrho + \varrho_1}{m}$$

oder, wenn man den Ausdruck in der Klammer nach der Formel:

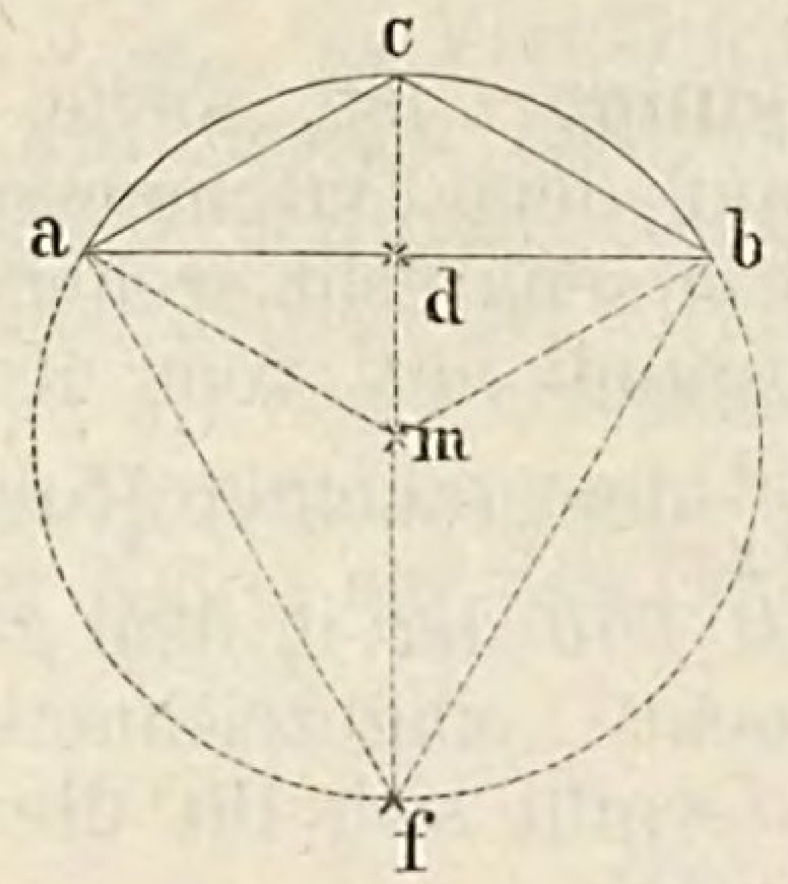
$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

zerlegt:

$$A) \ldots x = \pi \cdot \frac{\varrho + \varrho_1}{m} \cdot (m + \varrho - \varrho_1) \cdot (m - \varrho + \varrho_1)$$

**Aufgabe 503.** Die krumme Oberfläche eines Kugelsegments sei $p$-mal so gross, als der Mantel des demselben einbeschriebenen geraden Kegels. In welchem Verhältnis steht die Höhe des Kugelsegments zum Durchmesser der Kugel?

Figur 140.




**Erkl. 460.** Nebenstehende Gleichung 4) reduziert und in bezug auf das Verhältnis $\frac{h}{2r}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2rh = p\sqrt{(2r-h)\cdot h\cdot 2rh}$$
$$4r^2h^2 = p^2\cdot(2r-h)\cdot 2rh^2$$
$$2r = p^2\cdot(2r-h)$$
$$2r = 2rp^2 - p^2h$$
$$p^2h = 2rp^2 - 2r$$
$$p^2h = 2r(p^2-1)$$
$$p^2\cdot\frac{h}{2r} = p^2 - 1$$

oder

$$\frac{h}{2r} = \frac{p^2-1}{p^2}$$

**Formeln:**

Für eine Calotte:

I. . . . I. d. C. $= 2r\pi\cdot h$ (s. Erkl. 63)

Für einen Kegel:

II. . . . $M = \pi R\cdot s$ (s. Erkl. 49).

**Auflösung.** Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses besteht gemäss der Aufgabe, wenn man den Radius der zu dem Kugelsegment $abc$ gehörigen Kugel um $M$, siehe Fig. 140, mit $r$, die Höhe $cd$ des Segments mit $h$, den Grundflächenradius $ad$ des in jenes Segment konstruierten geraden Kegels $cab$ mit $x$, die Seitenlinie $ac$ desselben mit $y$ bezeichnet, und wenn man berücksichtigt, dass die krumme Oberfläche des Segments gleich dem Inhalt der das Segment begrenzenden Calotte ist, mittels Benutzung der vorstehenden Formeln I und II die Beziehung:

1) . . . $2r\pi\cdot h = p\cdot\pi\cdot x\cdot y$

Um zunächst auch $x$ und $y$ in $r$ und $h$ auszudrücken, verfahre man wie folgt:

Verbindet man $a$ mit $f$ und berücksichtigt man, dass das Dreieck $caf$ ein bei $a$ rechtwinkliges ist und dass in demselben $ad = x$, $cd = h$ u. $df = fc - cd = 2r - h$ ist, so hat man nach dem in der Erkl. 378 angeführten planimetrischen Lehrsatze die Relation:

2) . . . $x^2 = (2r-h)\cdot h$

Berücksichtigt man ferner, dass in demselben rechtwinkligen Dreieck $ac = y$ ist, so hat man nach dem in der Erkl. 376 angeführten planimetrischen Lehrsatze die weitere Relation:

3) . . . $y^2 = 2r\cdot h$

Substituiert man die sich aus den Gleichungen 2) und 3) für $x$ und $y$ ergebenden Werte in Gleichung 1), so erhält man:

4) . $2r\pi h = p\cdot\pi\cdot\sqrt{(2r-h)\cdot h}\cdot\sqrt{2r\cdot h}$

und aus dieser Gleichung findet man nach der Erkl. 460 für das gesuchte Verhältnis $h:2r$ den Wert:

A) . . . $\frac{h}{2r} = \frac{p^2-1}{p^2}$

**Aufgabe 504.** Eine Kugel sei in einem Abstand vom Mittelpunkt, der $=\frac{p}{q}$ des Kugelradius ist, durch eine Ebene in 2 Segmente geteilt. Im grössten Segment wird über der Schnittfigur als Grundfläche ein gerader Kegel konstruiert, dessen Spitze auf der Oberfläche der Kugel liegt und dessen Volumen $= V$ ist. Wie gross ist der Halbmesser der Kugel und wie gross ist der Radius des Schnittkreises?

**Formel:**

Für einen Kegel:

$$V = \frac{R^3\pi \cdot H}{2} \text{ (s. Erkl. 50).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Fig. 140, $ab$ eine auf dem Durchmesser $cf$ der Kugel um $m$ senkrecht stehende Ebene, deren Abstand $md$ vom Kugelmittelpunkt $= \frac{p}{q}$ des gesuchten Kugelradius $x$ ist, und ist $fab$ der in dem grösseren Kugelsegment eingezeichnete gerade Kegel, so ergibt sich für die Höhe $df$ dieses Kegels:

$$\text{a) } df = dm + mf = \frac{p}{q}x + x = x\left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

Ferner ergibt sich für den Radius $ad$ des Grundkreises des Kegels $fab$ nach der Erkl. 378:

$$\begin{aligned}\text{b) } . \overline{ad}^2 &= df \cdot dc = df \cdot (cf - df) \\ &= \left(\frac{p}{q}x + x\right) \cdot \left[2x - \left(\frac{p}{q}x + x\right)\right] \\ &= \left(x + \frac{p}{q}x\right)\left(x - \frac{p}{q}\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{p^2}{q^2}x^2\right) = x^2\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right)\end{aligned}$$

Mittels Benutzung der vorstehenden Kubikinhaltsformel für einen Kegel erhält man somit für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots V = \frac{x^2\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) \cdot \pi \cdot x \cdot \left(1 + \frac{p}{q}\right)}{3}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 461 für den gesuchten Kugelradius $x$:

$$\text{A) } \ldots x = q \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \cdot (q^2 - p^2)(q + p)}}$$

Zur Bestimmung des gesuchten Radius $y\,(= ad)$ des Schnittkreises hat man nach vorstehender Relation b), wenn man in derselben $ad = y$ und für $x$ den vorstehenden gefundenen Wert substituiert, die Bestimmungsgleich.:

$$2)\ y^2 = \left(q\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(q^2 - p^2)(q + p)}}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right)$$

**Erkl. 461.** Nebenstehende Gleichung 1) reduziert und nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{3V}{\pi} = x^3\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

$$x^3 \cdot \frac{q^2 - p^2}{q^2} \cdot \frac{q + p}{q} = \frac{3V}{\pi}$$

$$x^3 \cdot \frac{(q^2 - p^2)(q + p)}{q^3} = \frac{3V}{\pi}$$

$$x^3 = \frac{3q^3V}{\pi(q^2 - p^2)(q + p)}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3q^3V}{\pi(q^2 - p^2)(q + p)}}$$

$$x = q\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(q^2 - p^2)(q + p)}}$$

**Erkl. 462.** Nebenstehende Gleichung 2) reduziert und nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$y = q\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(q^2 - p^2)(q + p)}} \cdot \sqrt{\frac{q^2 - p^2}{q^2}}$$

$$y = q\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(q^2 - p^2)(q + p)}} \cdot \frac{1}{q}\sqrt{q^2 - p^2}$$

oder

$$y = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(q^2 - p^2)(q + p)}} \cdot \sqrt{(q + p)(q - p)}$$

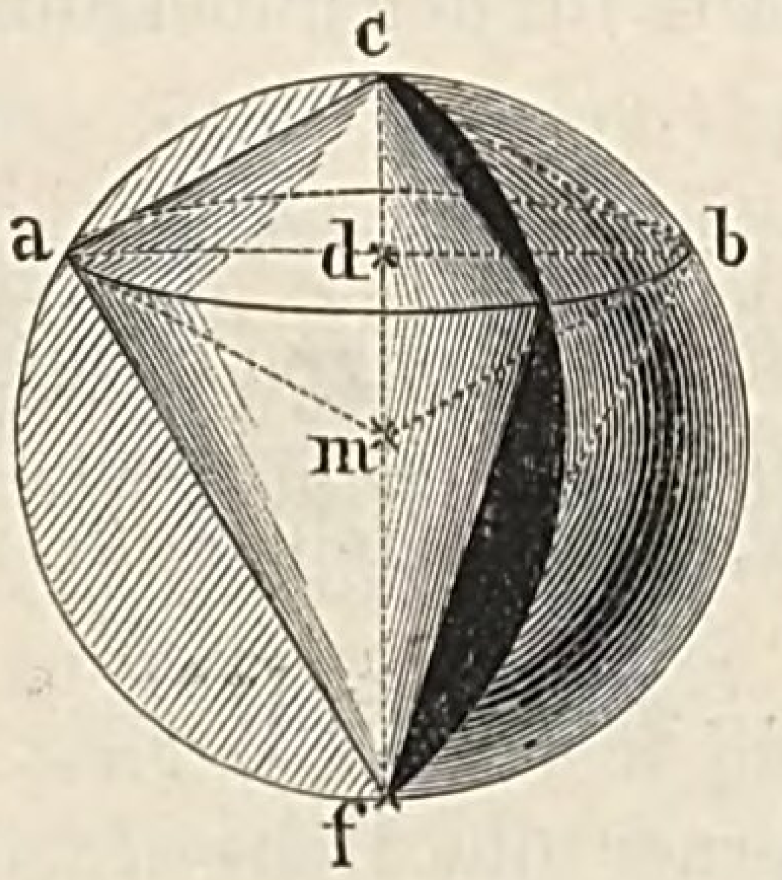
Aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 462 für den gesuchten Radius $y$ des Schnittkreises $ab$:

$$\text{B)}\ y = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(q^2 - p^2)(q+p)}} \cdot \sqrt{(q+p)(q-p)}$$

---

**Aufgabe 505.** Die Oberfläche einer Kugel wird von einem Kreise, dessen Inhalt $= J$ ist, im Verhältnis von $1:3$ geteilt. Auf diesem Kreise sind zwei gerade Kegel errichtet, deren Spitzen in der Oberfläche der Kugel liegen. Welches ist a). der Unterschied der Volumen und b). der Unterschied der Oberflächen der Kugel und des Doppelkegels?

Figur 141.




**Erkl. 463.** Nebenstehende Gleichung b) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{y}{2x-y} = \frac{1}{3}$$

$$3y = 2x - y$$

$$4y = 2x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. . . . $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62)

II. . . . $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67).

Für eine Calotte:

III. . . . I. d. C. $= 2r\pi h$ (s. Erkl. 63).

Für einen Kegel:

IV. . . . $V = \frac{R^2\pi H}{3}$ (s. Erkl. 50)

V. . . . $M = \pi Rs$ (s. Erkl. 49).

**Auflösung.** In Fig. 141 stelle $ab$ den Kreis dar, dessen Inhalt $J$ gegeben ist und welcher die Oberfläche der Kugel in die zwei Calotten $acb$ und $afb$ teilt, deren Inhalte sich wie $1:3$ verhalten; ferner seien $cab$ und $fab$ die beiden der Aufgabe gemäss über jenen Kreis konstruierten Kegel, welche zusammen den Doppelkegel $cafb$ bilden.

Zur Berechnung des gesuchten Unterschiedes der Volumen und der Oberflächen der Kugel und des Doppelkegels $cafb$ muss man zunächst den Radius der Kugel und die Höhen $dc$ und $df$ der beiden Kegel in die gegebenen Grössen ausdrücken, was folgendermassen geschehen kann:

Nach der in der Erkl. 57 angeführten Formel: $J = r^2\pi$ zur Berechnung des Inhalts $J$ eines Kreises, dessen Radius $= r$ ist, erhält man zunächst für den Radius $\overline{ad}$ des Kreises $ab$ die Relation:

$$\text{a)} \ldots \overline{ad} = \sqrt{\frac{J}{\pi}}$$

Bezeichnet man ferner den unbekannten Radius der Kugel mit $x$, die unbekannte Höhe $dc$ der Calotte $acb$ mit $y$, also die Höhe $df$ der Calotte $afb$ mit $2x - y$, so hat man mittels Benutzung der vorstehenden Formel 3) und gemäss der Aufgabe für $x$ und $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$\text{b)} \ldots \frac{2x\pi \cdot y}{2x\pi(2x-y)} = \frac{1}{3}$$

**Erkl. 464.** Nebenstehende Gleichung d) nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x^2 = \frac{J}{\pi} + \frac{1}{4} x^2$$

$$x^2 - \frac{1}{4} x^2 = \frac{J}{\pi}$$

$$\frac{3}{4} x^2 = \frac{J}{\pi}$$

$$x^2 = \frac{4J}{3\pi}$$

$$x = \sqrt{\frac{4J}{3\pi}}$$

$$x = 2\sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

**Erkl. 465.** Der Doppelkegel $cafb$ in Figur 141 besteht aus der Summe der Kegel $cab$ und $fab$.

Nach umstehender Formel 4) erhält man für das Volumen $V_1$ des Doppelkegels:

$$V_1 = \frac{\overline{ad}^2 \cdot \pi \cdot \overline{dc}}{3} + \frac{\overline{ad}^2 \cdot \pi \cdot \overline{df}}{3}$$

oder

$$V_1 = \frac{\pi \cdot \overline{ad}^2}{3} \cdot (\overline{dc} + \overline{df})$$

**Erkl. 466.** Nebenstehende Gleichung 1) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 \cdot \frac{J}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{J}{3\pi}} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{J}{\pi} \cdot 4\sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

$$V - V_1 = \frac{32J}{9}\sqrt{\frac{J}{3\pi}} - \frac{4J}{3}\sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

$$V - V_1 = \sqrt{\frac{J}{3\pi}}\left(\frac{32J}{9} - \frac{4J}{3}\right)$$

$$V - V_1 = \sqrt{\frac{J}{3\pi}} \cdot \frac{32J - 12J}{9}$$

$$V - V_1 = \frac{20J}{9}\sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

**Erkl. 467.** Die Oberfläche des Doppelkegels $cafb$ in Figur 141 besteht aus der Summe der Kegelmäntel $cab$ und $fab$. Nach umstehender Formel 5) erhält man für die Oberfläche $O_1$ des Doppelkegels:

$$O_1 = \pi \cdot \overline{ad} \cdot \overline{ac} + \pi \cdot \overline{ad} \cdot \overline{af}$$

oder, wenn man für:

für: $\overline{ad} = \sqrt{\frac{J}{\pi}}$ [s. umsteh. Gleichung a)]

$$\overline{ac} = \sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{dc}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{J}{\pi}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{J}{3\pi}}\right)^2}$$

[siehe nebenstehende Gleichungen a) und f)]

$$= \sqrt{\frac{J}{\pi} + \frac{J}{3\pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{3J + J}{3\pi}} = \sqrt{\frac{4J}{3\pi}}$$

oder nach der Erkl. 463 die einfachere Gleichung:

$$\text{c)} \ldots y = \frac{1}{2} x$$

d. h. für den gegeb. Fall ist die Höhe $y (= dc)$ der kleineren Calotte halb so gross als der Radius $x$ der Kugel.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $adm$ ergibt sich die weitere Relation:

$$\overline{am}^2 = \overline{ad}^2 + \overline{md}^2$$

oder, wenn man

$$am = x$$

$$ad = \sqrt{\frac{J}{\pi}} \text{ [s. Gleichung a)]}$$

und $md = mc - dc = x - y$

oder nach der Gleichung c) $=$

$$x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x \text{ setzt,}$$

für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)} \ldots x^2 = \frac{J}{\pi} + \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 464 für den unbekannten Kugelradius $x$:

$$\text{e)} \ldots x = am = cm = 2\sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

Aus den Gleichungen c) und e) erhält man für die Höhe $y (= dc)$ der Calotte $acb$, bezw. des Kegels $cab$:

$$\text{f)} \ldots y = dc = \sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

und da ferner die Höhe $df$ des Kegels $fab = fc - dc$, bezw. $= 2x - y$

$$\text{oder} = 4\sqrt{\frac{J}{3\pi}} - \sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

ist, so erhält man für diese Höhe $df$:

$$\text{g)} \ldots df = 3\sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

Mittels Benutzung der vorstehenden Formeln II und IV und mit Benutzung der vorstehenden Gleichungen a), e), f) und g) erhält man schliesslich für die gesuchte Differenz der Volumen $V$ und $V_1$ der Kugel und des Doppelkegels $cafb$

$$1) \ldots V - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(2\sqrt{\frac{J}{3\pi}}\right)^3 - \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{J}{\pi}}\right)^2}{3}\left(\sqrt{\frac{J}{3\pi}} + 3\sqrt{\frac{J}{3\pi}}\right) \text{ (s. Erkl. 465)}$$

oder nach der Erkl. 466:

$$\text{A)} \ldots V - V_1 = \frac{20}{9} J \sqrt{\frac{J}{3\pi}}$$

und für:

$$\overline{af} = \sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{df}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{J}{\pi}}\right)^2 + \left(3\sqrt{\frac{J}{3\pi}}\right)^2}$$

[s. nebensteh. Gleichungen a) und g)]

$$= \sqrt{\frac{J}{\pi} + 9 \cdot \frac{J}{3\pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{J}{\pi} + \frac{3J}{\pi}} = \sqrt{\frac{4J}{\pi}}$$

setzt und die Gleichung reduziert:

$$O_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{\pi}} \cdot \left(\sqrt{\frac{4J}{3\pi}} + \sqrt{\frac{4J}{\pi}}\right)$$

$$O_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{4J}{\pi}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + 1\right)$$

$$O_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{4J^2}{\pi^2}}\left(\sqrt{\frac{3}{9}} + 1\right)$$

$$O_1 = \pi \cdot \frac{2J}{\pi}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{3}{3}\right)$$

$$O_1 = \frac{2J}{3}(\sqrt{3} + 3)$$

Mittels Benutzung der vorstehenden Formeln 1) und 5) und mit Benutzung der vorstehenden Gleichungen a), e), f) und g) erhält man in analoger Weise für die gesuchte Differenz der Oberflächen $O$ und $O_1$ der Kugel und des Doppelkegels:

$$2)\quad O - O_1 = 4\pi \cdot \left(2\sqrt{\frac{J}{3\pi}}\right)^2 - \frac{2J}{3}(\sqrt{3} + 3)$$

(s. Erkl. 467)

oder

$$O - O_1 = 4\pi \cdot 4\frac{J}{3\pi} - \frac{2J}{3}(\sqrt{3} + 3)$$

$$O - O_1 = \frac{16J}{3} - \frac{2J}{3}(\sqrt{3} + 3)$$

$$O - O_1 = \frac{2J}{3}(8 - \sqrt{3} - 3)$$

mithin:

$$B) \ldots O - O_1 = \frac{2J}{3}(5 - \sqrt{3})$$

---

**Aufgabe 506.** Der Durchmesser $2r$ einer Kugel ist so in 2 Stücke geteilt, dass der grösste Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Abschnitt und dem ganzen Durchmesser ist. Durch den Teilpunkt ist eine Ebene senkrecht zu dem Durchmesser der Kugel gelegt und über diese Ebene nach beiden Seiten hin ein senkrechter Kegel so konstruiert, dass dessen Spitze in der Kugelfläche liegt. Welches ist der Kubikinhalt des Doppelkegels?

**Auflösung.** Wie in der zur vorigen Aufgabe gehörigen Erkl. 465 gezeigt wurde, hat man für das gesuchte Volumen $x$ des in die Kugel konstruierten Doppelkegels, siehe Figur 141, die Beziehung:

$$x = \frac{\pi \cdot \overline{ad}^2}{3}(\overline{dc} + \overline{df})$$

oder, da $\overline{dc} + \overline{df}$ gleich dem gegebenen Durchmesser $2r$ der Kugel ist:

$$1) \ldots x = \frac{\pi \cdot \overline{ad}^2}{3} \cdot 2r$$

In dieser Gleichung ist $\overline{ad}$, d. i. der Radius des Schnittkreises $ab$, noch unbekannt und muss gemäss der Aufgabe wie folgt bestimmt werden:

Nach dem in der Erkl. 378 angegebenen planimetrischen Lehrsatze hat man die Relation:

**Erkl. 468.** Nebenstehende Gleichung b) nach $\overline{df}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$4r^2 - 2r \cdot \overline{df} = \overline{df}^2$$

$$\overline{df}^2 + 2r \cdot \overline{df} = 4r^2$$

$$\overline{df}^2 + 2r \cdot \overline{df} + \left(\frac{2r}{2}\right)^2 = 4r^2 + \left(\frac{2r}{2}\right)^2$$

$$\left(\overline{df} + \frac{2r}{2}\right)^2 = 4r^2 + r^2$$

$$(\overline{df} + r) = \pm\sqrt{5r^2}$$

$$\overline{df} + r = r\sqrt{5} \quad \text{(unter Vernachlässigung des Minuszeichens)}$$

$$\overline{df} = r\sqrt{5} - r$$

oder

$$\overline{df} = r(\sqrt{5} - 1)$$

**Erkl. 469.** Nebenstehende Gleichung d) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\begin{aligned}\overline{ad}^2 &= r(\sqrt{5} - 1)(2r - r\sqrt{5} + r)\\ &= r(\sqrt{5} - 1)(3r - r\sqrt{5})\\ &= r^2(\sqrt{5} - 1)(3 - \sqrt{5})\\ &= r^2(3\sqrt{5} - 3 - 5 + \sqrt{5})\\ &= r^2(4\sqrt{5} - 8)\\ &= 4r^2(\sqrt{5} - 2)\end{aligned}$$

$$\overline{ad}^2 = \overline{df} \cdot \overline{dc}$$

oder, wenn man $\overline{dc} = \overline{fc} - \overline{df} = 2r - \overline{df}$ setzt:

a) . . . $\overline{ad}^2 = \overline{df} \cdot (2r - \overline{df})$

Ferner hat man gemäss der Aufgabe die weitere Relation:

$$\overline{dc} : \overline{df} = \overline{df} : \overline{fc}$$

oder, wenn man wie vorhin:

$$\overline{dc} = 2r - \overline{df}$$

und

$$\overline{fc} = 2r \text{ setzt:}$$

b) . . . $(2r - \overline{df}) : \overline{df} = \overline{df} : 2r$

Aus der Gleichung b) erhält man nach der Erkl. 468:

c) . . . $\overline{df} = r(\sqrt{5} - 1)$

Setzt man diesen Wert für $\overline{df}$ in Gleichung a), so erhält man:

d) $\overline{ad}^2 = r(\sqrt{5} - 1)[2r - r(\sqrt{5} - 1)]$

oder nach der Erkl. 469:

2) . . . $\overline{ad}^2 = 4r^2(\sqrt{5} - 2)$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich somit für das gesuchte Volumen $x$ des Doppelkegels:

$$x = \frac{\pi}{3} \cdot 2r \cdot 4r^2(\sqrt{5} - 2)$$

oder

A) . . . $x = \dfrac{8\pi r^3}{3}(\sqrt{5} - 2)$

---

**Aufgabe 507.** Die Axe eines geraden Kegels sei ein Durchmesser einer Kugel, welche die Grundfläche des Kegels berührt. Man berechne die Grösse des dem Kegel und der Kugel gemeinsamen Körperstücks aus dem Radius $R$ der Kugel und dem Radius $r$ des Kegelgrundkreises.

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. . . . $V = \dfrac{R^2 \pi H}{3}$ (s. Erkl. 50)

Für ein Segment:

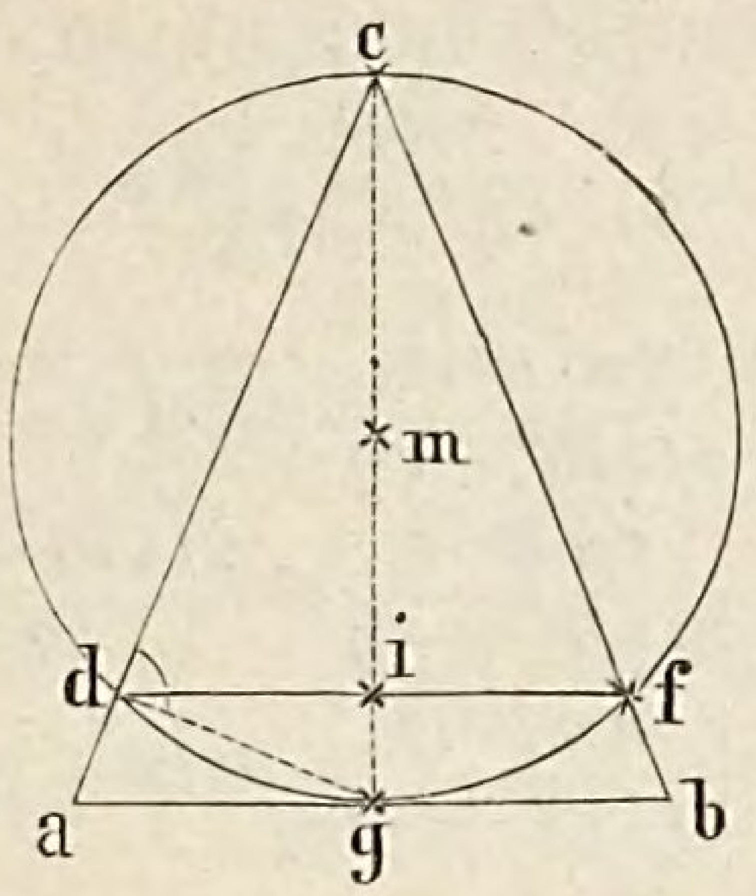
II. . . . $V = \dfrac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ (s. Erkl. 151).

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 142, durch die Axe des Kegels eine vertikale Ebene gelegt, so schneidet dieselbe das der Kugel um $m$ und dem Kegel $abc$ gemeinsame Körperstück, nach der Figur $cdgf$. Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ dieses Körperstücks denke man sich dasselbe zusammengesetzt aus dem Kegel $cdf$ und dem Kugelsegment $dgf$. Setzt man in vorstehender Formel I:

$$R = \overline{di}$$

$$H = \overline{ic} = \overline{gc} - \overline{gi} = 2R - \overline{gi}$$

Figur 142.




**Erkl. 470.** Nebenstehende Gleichung:

$$x = \frac{\pi}{3}\left[\overline{gi}\,(2R - \overline{gi})\,(2R - \overline{gi}) + \overline{gi}^2\,(3R - \overline{gi})\right]$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x = \frac{\pi}{3}\cdot\overline{gi}\left[(2R - \overline{gi})^2 + \overline{gi}\,(3R - \overline{gi})\right]$$

$$x = \frac{\pi}{3}\cdot\overline{gi}\,(4R^2 - 4R\cdot\overline{gi} + \overline{gi}^2 + 3R\cdot\overline{gi} - \overline{gi}^2)$$

$$x = \frac{\pi}{3}\cdot\overline{gi}\,(4R^2 - R\cdot\overline{gi})$$

$$x = \frac{\pi R}{3}\cdot\overline{gi}\,(4R - \overline{gi})$$

**Erkl. 471.** Nebenstehende Gleichung 4) nach $\overline{gi}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$r^2 : \overline{gi}\,(2R - \overline{gi}) = 4R^2 : (4R^2 - 4R\cdot\overline{gi} + \overline{gi}^2)$$

$$4R^2r^2 - 4Rr^2\cdot\overline{gi} + r^2\cdot\overline{gi}^2 = 8R^3\cdot gi - 4R^2\cdot\overline{gi}^2$$

$$\overline{gi}^2\,(4R^2 + r^2) - gi\,(4Rr^2 + 8R^3) = -4R^2r^2$$

$$\overline{gi}^2 - \overline{gi}\cdot\frac{4Rr^2 + 8R^3}{4R^2 + r^2} = -\frac{4R^2r^2}{4R^2 + r^2}$$

$$\overline{gi}^2 - \overline{gi}\cdot\frac{4Rr^2 + 8R^3}{4R^2 + r^2} + \left(\frac{4Rr^2 + 8R^3}{2(4R^2 + r^2)}\right)^2 = -\frac{4R^2r^2}{4R^2 + r^2} + \left(\frac{4Rr^2 + 8R^3}{2(4R^2 + r^2)}\right)^2$$

$$\left(\overline{gi} - \frac{4Rr^2 + 8R^3}{2(4R^2 + r^2)}\right)^2 = -\frac{4R^2r^2}{4R^2 + r^2} + \frac{(2Rr^2 + 4R^3)^2}{(4R^2 + r^2)^2}$$

$$\overline{gi} - \frac{2Rr^2 + 4R^3}{4R^2 + r^2} = \pm\sqrt{\frac{-4R^2r^2(4R^2 + r^2) + (2Rr^2 + 4R^3)^2}{(4R^2 + r^2)^2}}$$

$$\overline{gi} = \frac{2Rr^2 + 4R^3}{4R^2 + r^2} \pm \frac{1}{4R^2 + r^2}\cdot\sqrt{-16R^4r^2 - 4R^2r^4 + 4R^2r^4 + 16R^4r^2 + 16R^6}$$

$$\overline{gi} = \frac{2Rr^2 + 4R^3 \pm \sqrt{16R^6}}{4R^2 + r^2}$$

und in vorstehender Formel 2):

$$h = gi$$
$$r = R$$

so erhält man nach Vorstehendem für $x$ die Beziehung:

$$x = \frac{\overline{di}^2\cdot\pi\cdot(2R - \overline{gi})}{3} + \frac{\pi\cdot\overline{gi}^2}{3}(3R - gi)$$

oder

$$1)\; x = \frac{\pi}{3}\left[\overline{di}^2\,(2R - gi) + \overline{gi}^2\,(3R - \overline{gi})\right]$$

Eine der in dieser Gleichung vorkommenden Unbekannten $\overline{di}$ und $\overline{gi}$ kann man zunächst wie folgt in die andre ausdrücken:

Denkt man sich in Figur 142 $d$ mit $g$ verbunden, so entsteht das bei $d$ rechtwinklige Dreieck $cdg$ und man hat nach dem in der Erkl. 378 angeführten planimetrischen Lehrsatze die Relation:

$$\overline{di}^2 = \overline{gi}\cdot\overline{ic}$$

oder, wenn man

$$\overline{ic} = \overline{gc} - \overline{gi} = 2R - \overline{gi} \text{ setzt:}$$

$$2)\;\ldots\;\overline{di}^2 = \overline{gi}\cdot(2R - \overline{gi})$$

Setzt man zunächst diesen Wert für $\overline{di}^2$ in Gleichung 1) ein, so erhält man:

$$x = \frac{\pi}{3}\left[\overline{gi}\,(2R - \overline{gi})\,(2R - \overline{gi}) + \overline{gi}^2\,(3R - \overline{gi})\right]$$

oder nach der Erkl. 470:

$$3)\;\ldots\; x = \frac{\pi R}{3}\cdot\overline{gi}\,(4R - \overline{gi})$$

Zur Bestimmung der in dieser Gleichung noch vorkommenden unbekannten Grösse $\overline{gi}$ ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $agc$ und $dic$ die Relation:

$$\overline{ag} : \overline{di} = \overline{gc} : \overline{ic}$$

oder, wenn man

$$\overline{ag} = r$$
$$\overline{di} = \sqrt{\overline{gi}\,(2R - \overline{gi})} \quad \text{(s. vorstehende Gleichung 2)}$$
$$\overline{gc} = 2R$$

und $\overline{ic} = \overline{gc} - \overline{gi} = 2R - \overline{gi}$ setzt, die Relation:

$$4)\;.\; r : \sqrt{\overline{gi}\,(2R - \overline{gi})} = 2R : (2R - \overline{gi})$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 471:

$$5)\;\ldots\;\overline{gi} = \frac{2Rr^2}{4R^2 + r^2}$$

oder

a) . . . $\overline{gi} = \frac{2Rr^2 + 4R^3 \pm 4R^3}{4R^2 + r^2}$

mithin ist einmal, wenn man nur das Vorzeichen + berücksichtigt:

$$\overline{gi} = \frac{2Rr^2 + 8R^3}{4R^2 + r^2} = \frac{2R(r^2 + 4R^2)}{4R^2 + r^2} = \frac{2R(4R^2 + r^2)}{4R^2 + r^2}$$

oder

b) . . . $\overline{gi} = 2R$

welcher Wert, wie aus der Figur 142 ersichtlich ist, keinen Sinn zulässt. Ferner ist ein andermal, wenn man in vorstehender Gleichung a) nur das Minuszeichen berücksichtigt:

c) . . . $\overline{gi} = \frac{2Rr^2}{4R^2 + r^2}$

Setzt man den Wert für $\overline{gi}$ aus Gleichung 5) in Gleichung 3), so erhält man:

$$x = \frac{\pi R}{3} \cdot \frac{2Rr^2}{4R^2 + r^2}\left(4R - \frac{2Rr^2}{4R^2 + r^2}\right)$$

oder

$$x = \frac{2\pi \cdot R^2 r^2}{3(4R^2 + r^2)} \cdot 2R \cdot \left(2 - \frac{r^2}{4R^2 + r^2}\right)$$

$$x = \frac{4\pi R^3 r^2}{3(4R^2 + r^2)} + \frac{2(4R^2 + r^2) - r^2}{4R^2 + r^2}$$

$$x = \frac{4\pi R^3 r^2}{3(4R^2 + r^2)^2}(8R^2 + 2r^2 - r^2)$$

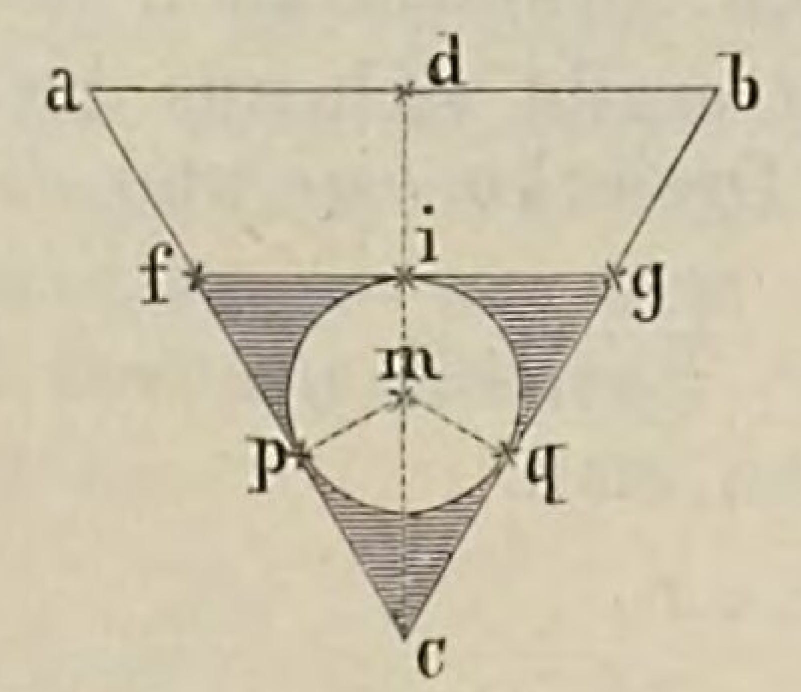
oder

A) . . $x = \frac{4\pi R^3 r^2}{3(4R^2 + r^2)^2}(8R^2 + r^2)$

---

**Aufgabe 508.** In einem auf der Spitze vertikal stehenden, gleichseitigen Hohlkegel liegt eine Kugel von $r = \frac{1}{2}$ cm Radius. Wie viel ccm Wasser müssen in die Kugel gegossen werden, um die Kugel gerade zu bedecken und wie hoch steht das Wasser in dem Kegel, wenn die Kugel herausgenommen wird?

Figur 143.




**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. . . . $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67)

Für einen Kegel:

II. . . . $V = \frac{R^2 \pi H}{3}$ (s. Erkl. 50).

**Auflösung.** Soll, siehe Figur 143, das in den Kegel $cab$ gegossene Wasser die Kugel um $m$ gerade bedecken, wie in der Figur angedeutet ist, so muss das gesuchte Volumen $x$ des Wassers gleich dem Volumen $y$ des Kegels $cfg$ weniger dem Volumen $z$ der Kugel um $m$ sein, man hat also die Relation:

1) . . . $x = y - z$

Da der Radius $r$ der Kugel gegeben ist, so hat man nach vorstehender Formel 1) für das Volumen $z$ der Kugel:

2) . . . $z = \frac{4}{3}\pi r^3$

Zur Bestimmung des Volumens $y$ des Kegels $cfg$ verfahre man wie folgt:

Da der Kegel $cab$ ein gleichseitiger ist und die Axe $dc$ desselben vertikal steht, so muss die Wasserfläche $fg$, welche sich stets wagrecht (horizontal) stellt, parallel der Kegelgrundfläche $ab$ sein, woraus folgt, dass der Kegel $cfg$ ebenfalls ein gleichseitiger sein muss. Da man ferner von dem durch die Figur 143 dargestellten Axenschnitt $cfg$ des Wasserkegels, welcher Schnitt nach Vorstehendem ein gleichseitiges

Dreieck sein muss, den Radius $r$ des demselben einbeschriebenen Kreises, d. i. ein grösster Kreis der Kugel um $m$, kennt, so hat man nach der Erkl. 342 zwischen der Seite $fg$ des gleichseitigen Dreiecks $cfg$ und dem Radius $r$ die Relation:

a) . . . $\overline{fg} = 2r\sqrt{3}$

woraus sich für den Radius $\overline{fi}$ des Grundkreises des Kegels $cfg$ ergibt:

b) . . . $\overline{fi} = \frac{1}{2}\overline{fg} = \frac{2r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$

Für die Höhe $\overline{ic}$ des Kegels $cfg$, bezw. für die Höhe $\overline{ic}$ des gleichseitigen Dreiecks $cfg$, dessen Seiten nach vorstehender Gleichung a) je $= 2r\sqrt{3}$ sind, hat man nach der Erkl. 266:

c) $\overline{ic} = \frac{\overline{fg}}{2}\sqrt{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = r\sqrt{3^2} = 3r$

Setzt man in vorstehender Formel 2) für $R$ und $H$ die mittels der Gleichungen b) und c) in $r$ ausgedrückten Werte, so erhält man für das Volumen $y$ des Kegels $cfg$:

$$y = \frac{(r\sqrt{3})^2\cdot\pi\cdot 3r}{3}$$

oder

$$y = 3r^2\cdot\pi\cdot r$$

und

2) . . . $y = 3\pi r^3$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Wassers:

$$x = 3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

oder

A) . . . $x = \frac{5}{3}\pi r^3$

Für das gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$x = \frac{5}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

oder nach der Erkl. 472:

$$x = 65{,}450 \text{ ccm}$$

Nimmt man die Kugel aus dem Kegel, bezw. aus dem Wasser heraus, so bildet das Wasser, dessen Volumen nach vorstehender Gleichung A) $= \frac{5}{3}\pi r^3$ ist, einen gleichseitigen massiven Wasserkegel. Bezeichnet man dessen gesuchte Höhe mit $v$, so hat man nach der Er-

**Erkl. 472.** Aus der Gleichung:

$$x = \frac{5}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

erhält man $x$ wie folgt:

$$x = \frac{5}{3}\pi\cdot\frac{1}{8}$$

$$x = \frac{5\pi}{24}$$

$$\log x = \log 5 + \log\pi - \log 24$$

Nun ist:

| | | |
|---|---|---|
| | log 5 = | 2,6989700 |
| + | log π = | 0,4971499 |
| | | 3,1961199 |
| − | log 24 = − | 1,3802112 |
| | log x = | 1,8159087 |
| | | 9030 |
| | | 57 |
| mithin: | | 53,6 |

numlog $x$ = 65,4498

**Erkl. 473.** Nach vorstehender Formel 2) hat man für das Volumen $V$ eines Kegels die Relation:

$$\text{a)} \ldots V = \frac{R^2 \pi \cdot H}{3}$$

ist dieser Kegel ein gleichseitiger, so besteht zwischen der Höhe $H$ und dem Durchmesser $2R$ des Grundkreises nach der Erkl. 266 die Relation:

$$H = \frac{2R}{2}\sqrt{3}$$

Setzt man den sich aus dieser Gleichung für $R$ ergebenden Wert:

$$R = \frac{H}{\sqrt{3}}$$

in Gleichung a), so erhält man für das Volumen $V$ eines gleichseitigen Kegels in die Höhe $H$ desselben ausgedrückt:

$$V = \frac{\left(\frac{H}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \pi \cdot H}{3}$$

$$V = \frac{\frac{H^2}{3} \cdot \pi \cdot H}{3}$$

oder

$$\text{b)} \ldots V = \frac{H^3 \pi}{9}$$

klärung 473 für dieselbe die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{5}{3}\pi r^3 = \frac{v^3 \cdot \pi}{9}$$

und hieraus erhält man für die gesuchte Höhe $v$ des Wasserstandes, wenn die Kugel aus dem Kegel herausgenommen wird:

$$5r^3 = \frac{v^3}{3}$$

$$v^3 = 15r^3$$

$$v = \sqrt[3]{15r^3}$$

oder

$$\text{B)} \ldots v = r\sqrt[3]{15}$$

Für das gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt[3]{15}$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot 2{,}466$$

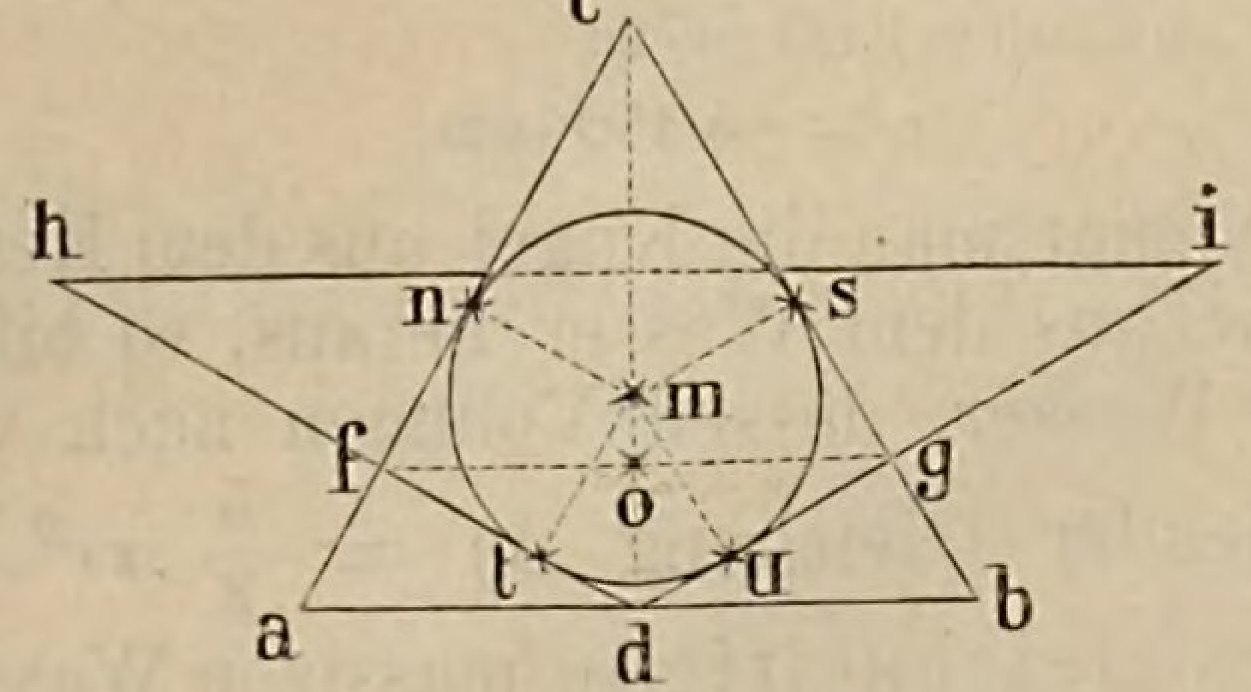
oder

$$v = 1{,}233 \text{ ccm}$$

---

**Aufgabe 509.** Der Mittelpunkt der Grundfläche eines geraden Kegels sei die Spitze eines andern geraden Kegels, dessen Seitenlinien auf den entsprechenden Seitenlinien des ersteren senkrecht stehen. Wie gross ist der Radius einer Kugel, welche beide Kegelmäntel von innen berührt und wie verhält sich ihr Volumen zu dem des entstandenen Doppelkegels, wenn der Radius der Grundfläche des ersten Kegels $= R$ und seine Höhe $= H$ ist?

Figur 144.




**Formeln:**

Für einen Kegel:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{R^2 \pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 67).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich durch die gemeinschaftliche Axe der beiden Kegel eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe, wie die Figur 144 zeigt, den einen Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $abc$, den andern Kegel in dem gleichschenkligen Dreieck $hid$ und die Kugel in dem grössten Kreis um $m$. Da die Seitenlinien des einen Kegels senkrecht auf denen des andern Kegels stehen sollen, so bilden die Schenkel jener Dreiecke das Kreis- oder Sehnenviereck $cfdg$ (s. Erkl. 474), welches zwei Paar gleiche Seiten, $fc = gc$ und $fd = gd$ hat (s. Erkl. 475) und welchem jener grösste Kreis der Kugel einbeschrieben ist (s. Erkl. 476). Das Vier-

**Erkl. 474.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Sind in einem Viereck die Summen je zweier gegenüberliegender Winkel $= 2R$, so ist das Viereck ein sogenanntes Kreis- oder Sehnenviereck, d. i. ein solches, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt."

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.

In Fig. 144 ist $\sphericalangle dfc = R$ und $\sphericalangle dgc = R$, folglich ist $\sphericalangle dfc + \sphericalangle dgc = 2R$.

**Erkl. 475.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Fällt man von dem Fusspunkt der Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks Perpendikel auf die Schenkel, so sind diese Perpendikel gleich und die Abstände der Fusspunkte dieser Perpendikel von der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks sind ebenfalls gleich."

Nach diesem Lehrsatz ist in Figur 144:

$$fd = gd$$

und $$fc = gc$$

Beweisen kann man dies mittels Kongruenz der Dreiecke $adf$ und $dbg$.

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.

**Erkl. 476.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Sind in einem Viereck die Summen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich, so ist das Viereck ein sogenanntes Tangentenviereck, d. i. ein solches, in welches sich ein Kreis beschreiben lässt."

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.

In Figur 144 ist: $fc = gc$

und $gd = fd$

folglich ist auch $fc + gd = gc + fd$.

eck $cfdg$ in Fig. 144 ist also ein Sehnen- und zugleich auch ein Tangentenviereck, indem sich demselben ein Kreis um- und ein Kreis einbeschreiben lässt.

Zur Bestimmung des gesuchten Radius $x$ der beide Kegelmäntel von innen berührenden Kugel, bezw. zur Bestimmung des Radius des dem Viereck $cfdg$ einbeschriebenen Kreises verfahre man wie folgt:

Den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks $dfc$ kann man auf zweierlei Art ausdrücken, einmal ist er: $= \frac{\overline{fc} \cdot \overline{fd}}{2}$, ein andermal ist er $= \frac{\overline{fc} \cdot \overline{nm}}{2} + \frac{\overline{fd} \cdot \overline{tm}}{2}$, setzt man $nm$ und $tm = x$, so hat man hiernach die Relation:

$$\frac{\overline{fc} \cdot x}{2} + \frac{\overline{fd} \cdot x}{2} = \frac{\overline{fc} \cdot \overline{fd}}{2}$$

oder

$$x(\overline{fc} + \overline{fd}) = \overline{fc} \cdot \overline{fd}$$

und

$$\text{a)} \ldots x = \frac{\overline{fc} \cdot \overline{fd}}{\overline{fc} + \overline{fd}}$$

Hiernach wären zunächst die Seiten $\overline{fc}$ und $\overline{fd}$ des Vierecks $cfdg$ zu bestimmen. Nach dem in der Erkl. 376 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $adc$ die Relation:

$$\overline{dc}^2 = \overline{ac} \cdot \overline{fc}$$

Da nun:

$\overline{ac} = \sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{dc}^2}$ u. $\overline{ad} = R$, $\overline{dc} = H$ ist, so geht letztere Gleichung über in:

$$H^2 = \sqrt{R^2 + H^2} \cdot \overline{fc}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{b)} \ldots \overline{fc} = \frac{H^2}{\sqrt{R^2 + H^2}}$$

Ferner ergibt sich aus dem Dreieck $dfc$ die Relation:

$$\overline{fd} = \sqrt{\overline{dc}^2 - \overline{fc}^2}$$

oder, wenn man die Gleichung b) berücksichtigt, ausserdem $\overline{dc} = H$ setzt:

$$\overline{fd} = \sqrt{H^2 - \left(\frac{H^2}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right)^2}$$

oder

**Erkl. 477.** Nach dem in der Erkl. 478 ausgesprochenen Lehrsatz ist in Figur 144:

$$\overline{fg}\cdot\overline{dc}=\overline{fc}\cdot\overline{dg}+\overline{gc}\cdot\overline{fd}$$

oder, da $\overline{dg}=\overline{fd}$

und $\overline{gc}=\overline{fc}$ ist:

$$\overline{fg}\cdot\overline{dc}=\overline{fc}\cdot\overline{fd}+\overline{fc}\cdot\overline{fd}$$

also

$$\overline{fg}\cdot\overline{dc}=2\cdot\overline{fc}\cdot\overline{fd}$$

Setzt man hierin:

$$\overline{dc}=H$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{fc}&=\frac{H^2}{\sqrt{R^2+H^2}}\\ \overline{fd}&=\frac{RH}{\sqrt{R^2+H^2}}\end{aligned}\right\}\text{ s. nebenstehende Gleich. b) und c)}$$

so erhält man:

$$\overline{fg}\cdot H=2\cdot\frac{H^2}{\sqrt{R^2+H^2}}\cdot\frac{RH}{\sqrt{R^2+H^2}}$$

oder

$$\overline{fg}\cdot H=\frac{2H^3R}{(\sqrt{R^2+H^2})^2}$$

und

$$\text{a)}\ \ldots\ \overline{fg}=\frac{2H^2\cdot R}{R^2+H^2}$$

**Erkl. 478.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Kreis- oder Sehnenviereck ist das Rechteck gebildet aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke gebildet aus je zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks.“

Dieser Satz ist unter dem Namen der Ptolemäische Lehrsatz bekannt.

„Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.

Nach diesem Satze ist in der Fig. 144:

$$\overline{fg}\cdot\overline{dc}=\overline{fc}\cdot\overline{dg}+\overline{gc}\cdot\overline{fd}$$

**Erkl. 479.** Nach vorstehender Formel I hat man für das Volumen $V$ des Doppelkegels in Figur 144:

$$V=\frac{\overline{fo}^2\cdot\pi\cdot\overline{oc}}{3}+\frac{\overline{fo}^2\cdot\pi\cdot\overline{od}}{3}$$

$$V=\frac{\overline{fo}^2\cdot\pi}{3}\cdot(\overline{oc}+\overline{od})$$

oder, da $\overline{oc}+\overline{od}=\overline{cd}=H$

und $\overline{fo}=\frac{\overline{fg}}{2}$ ist:

$$V=\frac{\overline{fg}^2\cdot\pi\cdot H}{12}$$

$$\overline{fd}=\sqrt{\frac{H^2(R^2+H^2)}{R^2+H^2}-\frac{H^4}{R^2+H^2}}$$

$$\overline{fd}=\sqrt{\frac{R^2H^2+H^4-H^4}{R^2+H^2}}=\sqrt{\frac{R^2H^2}{R^2+H^2}}$$

mithin erhält man:

$$\text{c)}\ \ldots\ \overline{fd}=\frac{RH}{\sqrt{R^2+H^2}}$$

Aus den Gleichungen a), b) und c) erhält man schliesslich für den gesuchten Kugelradius $x$:

$$x=\frac{\frac{H^2}{\sqrt{R^2+H^2}}\cdot\frac{RH}{\sqrt{R^2+H^2}}}{\frac{H^2}{\sqrt{R^2+H^2}}+\frac{RH}{\sqrt{R^2+H^2}}}$$

oder

$$x=\frac{H^2\cdot RH}{(H^2+RH)\sqrt{R^2+H^2}}$$

$$=\frac{H^3\cdot R}{H(H+R)\sqrt{R^2+H^2}}\quad\text{mithin:}$$

$$\text{A)}\ \ldots\ x=\frac{H^2R}{(H+R)\sqrt{R^2+H^2}}$$

Nach der Erkl. 477 erhält man für den Durchmesser $fg$ des den beiden Kegeln $cfg$ u. $dfg$ gemeinsamen Grundkreises:

$$\text{d)}\ \ldots\ \overline{fg}=\frac{2H^2\cdot R}{R^2+H^2}$$

und somit nach der Erkl. 479 für das Volumen $V$ des Doppelkegels $cfdg$:

$$V=\frac{4H^4\cdot R^2:\pi\cdot H}{(R^2+H^2)^2\cdot 12}$$

oder

$$\text{f)}\ \ldots\ V=\frac{\pi\cdot H^5\cdot R^2}{3(R^2+H^2)^2}$$

Da man ferner nach vorstehender Formel II für das Volumen $V_1$ der Kugel um $m$, wenn man für deren Radius den mittels vorstehender Gleichung A) gefundenen Wert substituiert, die Relation:

$$V_1=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{H^6R^3}{(H+R)^3(\sqrt{R^2+H^2})^3}$$

oder

$$\text{g)}\ \ldots\ V_1=\frac{4\pi\cdot H^6\cdot R^3}{3(H+R)^3\cdot(R^2+H^2)\sqrt{R^2+H^2}}$$

erhält, so ergibt sich für das gesuchte Verhältnis das Volumen $V_1$ und $V$:

$$V_1:V=\frac{4\pi H^6R^3}{3(H+R)^3(R^2+H^2)\sqrt{R^2+H^2}}:\frac{\pi H^5R^2}{3(R^2+H^2)^2}$$

oder

$$\frac{V_1}{V}=\frac{4\pi H^6R^3\cdot 3(R^2+H^2)^2}{3(H+R)^3(R^2+H^2)\sqrt{R^2+H^2}\cdot\pi H^5R2}$$

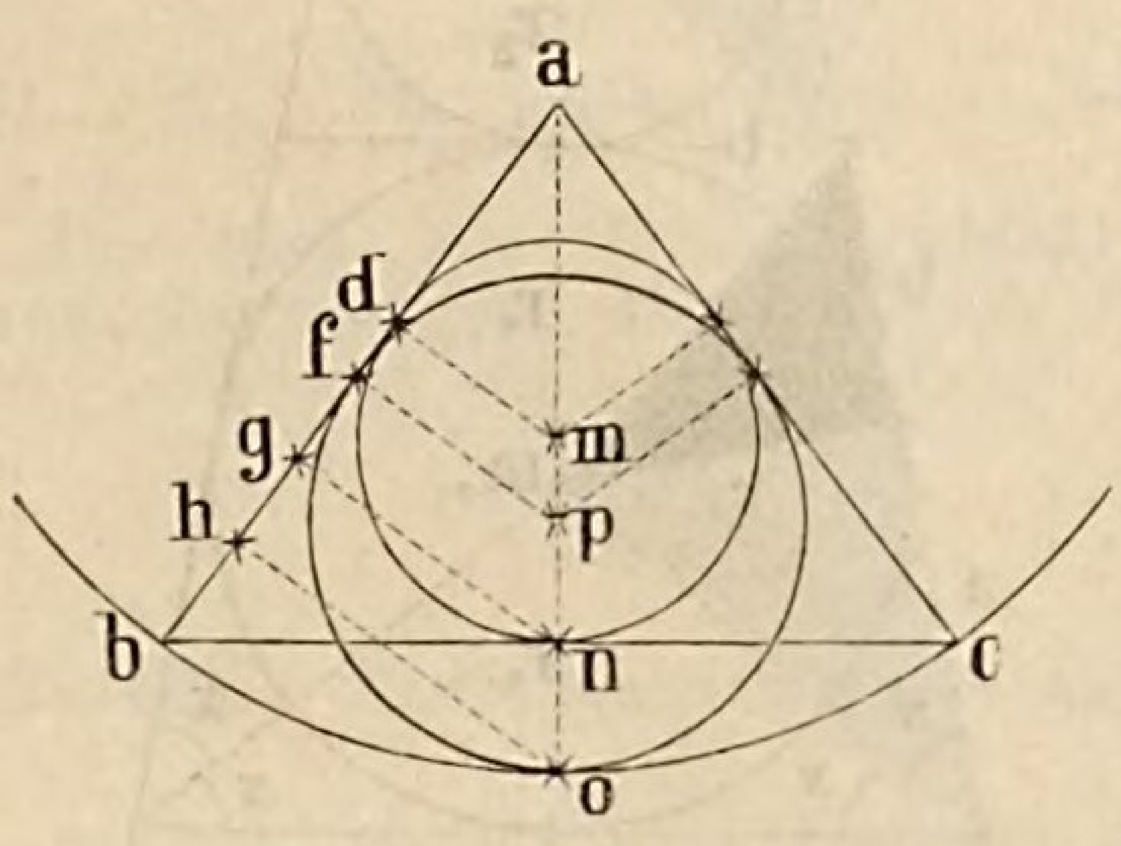
$$\frac{V_1}{V} = \frac{4HR(R^2+H^2)}{(H+R)^3\sqrt{R^2+H^2}} = \frac{4HR(\sqrt{R^2+H^2})^2}{(H+R)^3\sqrt{R^2+H^2}}$$

mithin

$$\text{B)} \ldots \frac{V_1}{V} = \frac{4HR\sqrt{R^2+H^2}}{(H+R)^3}$$

**Aufgabe 510.** In einen geraden Kegel sei eine Berührungskugel beschrieben. Eine zweite Kugel sei um die Spitze des Kegels mit der Seitenlinie als Radius beschrieben. Eine dritte Kugel endlich berühre die zweite von innen und den Kegelmantel in einem Kreise. Wie verhält sich der Radius der dritten Kugel zum Radius der ersten in bezug auf die Dimensionen des Kegels?

Figur 145.




**Auflösung.** Die Figur 145 stelle einen Axenschnitt des Kegels dar. In demselben ist der Kreis um $m$ ein grösster Kreis der Kugel, welche dem Kegel einbeschrieben ist; dann ist der Kreis um $a$ ein grösster Kreis der zweiten Kugel, deren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels liegt und deren Radius gleich der Seitenlinie $ab$ des Kegels ist und schliesslich ist der Kreis um $p$ der grösste Kreis der dritten Kugel, welche die Kugel um $a$ von innen und den Kegelmantel nach einem Kreise berührt.

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses der Radien der dritten und ersten Kugel fälle man sich die Perpendikel $md$, $pf$, $ng$ und $oh$. Aus der Aehnlichkeit der hierdurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke erhält man die Proportionen:

$$1) \ldots \frac{pf}{md} = \frac{oh}{ng}$$

und

$$\frac{oh}{ng} = \frac{oa}{na} \text{ oder, da } oa = ba \text{ ist:}$$

$$2) \ldots \frac{oh}{ng} = \frac{ba}{na}$$

Aus diesen Proportionen 1) und 2) ergibt sich für das gesuchte Verhältnis der Kugelradien $pf$ und $md$:

$$\text{A)} \ldots pf : md = ba : na$$

d. h. der Radius $pf$ der dritten Kugel verhält sich zum Radius $md$ der zweiten Kugel wie sich die Seitenlinie $ba$ des Kegels zur Höhe $na$ des Kegels verhält.

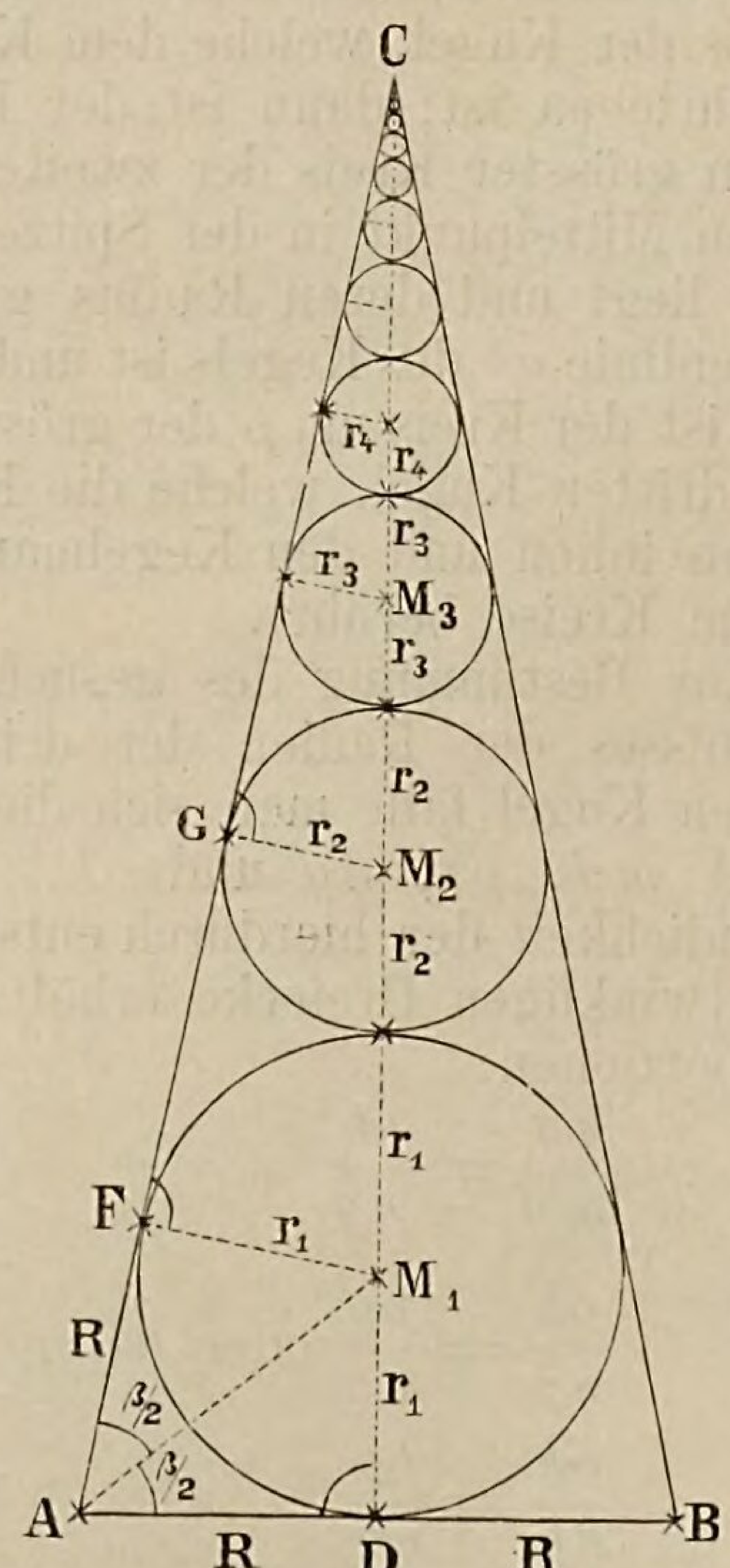
**Aufgabe 511.** In einem geraden Kegel, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist, wird auf die Grundfläche eine den Mantel des Kegels berührende Kugel gelegt, darauf in dem nach der Spitze zu noch übrigen Raum wieder eine Kugel und so immer fort. Wie gross ist:

a). die Summe der Oberflächen und
b). die Summe der Volumen dieser unendlich vielen Kugeln?

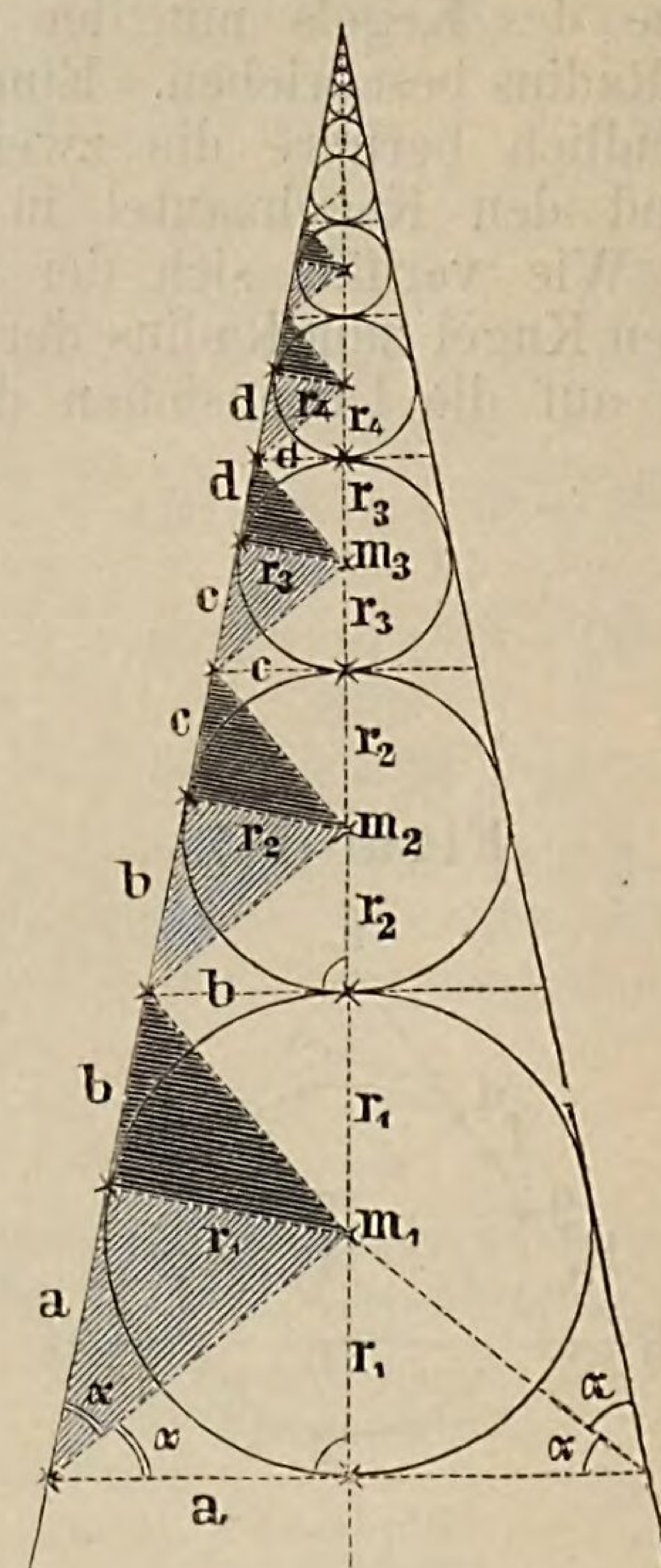
**Auflösung.** Die Auflösung dieser Aufgabe ist in ausführlicher Weise in Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Reihen, Aufgabe 55, angegeben.

Die Auflösung geschah mittels der Figuren 146 und 147.

Figur 146.




Figur 147.




---

**Aufgabe 512.** Durch eine Kugel sei eine Ebene gelegt, über dem Schnittkreis derselben sei ein gerader Kegel konstruiert, dessen Mantelfläche die Kugelfläche berührt. In welchem Verhältnis muss jene Ebene den zur ihr senkrechten Durchmesser der Kugel teilen, damit der Kegelmantel zu der innerhalb desselben liegenden Calotte in dem Verhältnis von $m:n$ steht?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

I. . . . $M = \pi \cdot R \cdot s$ (s. Erkl. 49)

Für eine Calotte:

II. . . . I. d. C. $= 2\pi \cdot r \cdot h$ (s. Erkl. 63).

**Auflösung.** In Figur 148 stelle $ab$ eine Ebene dar, welche senkrecht auf dem Durchmesser $fd$ der gedachten Kugel um $m$ steht; ferner stelle $cab$ einen Axenschnitt des über dem Schnittkreis $ab$ konstruiert gedachten, geraden Kegels dar, dessen Mantelfläche die Kugel in dem Schnittkreis $ab$ berührt.

Bezeichnet man nun den kleineren der Abschnitte $\overline{id}$ und $\overline{if}$, in welche

die Ebene $ob$ den zu ihr senkrechten Durchmesser $\overline{fd}$ teilt, nämlich $\overline{id}$ mit $x$, den Kugelradius mit $y$, also den grösseren Abschnitt $\overline{if}$ mit $2y-x$, so ist gemäss der Aufgabe das Verhältnis:

$$\text{a)} \; \ldots \; \frac{x}{2y-x}$$

zu bestimmen.

Zur Aufstellung einer Gleichung zwischen den in vorstehendem Verhältnis vorkommenden Grössen $x$ $(=\overline{id})$ und $y$ $(=\overline{md}=\overline{mf}=\overline{ma}=\overline{mb})$ muss man die in der Aufgabe gegebene Beziehung zwischen dem Mantel des Kegels $cab$ und dem Inhalt der Calotte $dab$ benutzen, hierbei kann man wie folgt verfahren:

Verbindet man $m$ mit $a$, so ist das entstandene Dreieck $mac$ ein bei $a$ rechtwinkliges (s. Erkl. 480) und man hat nach der Erkl. 378:

$$\overline{ai}^2 = \overline{im} \cdot \overline{ic}$$

oder, wenn man: $\overline{im} = \overline{md} - \overline{id} = y - x$ setzt:

$$\text{b)} \; \ldots \; \overline{ai}^2 = (y-x) \cdot \overline{ic}$$

Verbindet man ferner $a$ mit $d$ und $f$, so erhält man das bei $a$ rechtwinklige Dreieck $daf$ (s. Erkl. 481), und man hat nach der Erkl. 378:

$$\overline{ai}^2 = \overline{id} \cdot \overline{if}$$

oder, wenn man: $\overline{id} = x$

$\overline{if} = \overline{df} - \overline{id} = 2y - x$ setzt:

$$\text{c)} \; \ldots \; \overline{ai}^2 = x \cdot (2y-x)$$

Aus den Gleichungen b) und c) ergibt sich:

$$(y-x) \cdot \overline{ic} = x(2y-x)$$

oder:

$$\text{d)} \; \ldots \; \overline{ic} = \frac{x \cdot (2y-x)}{y-x}$$

Aus dem bei $i$ rechtwinkligen Dreieck $aic$ erhält man für die Seitenlinie $\overline{ac}$ des Kegels $cab$:

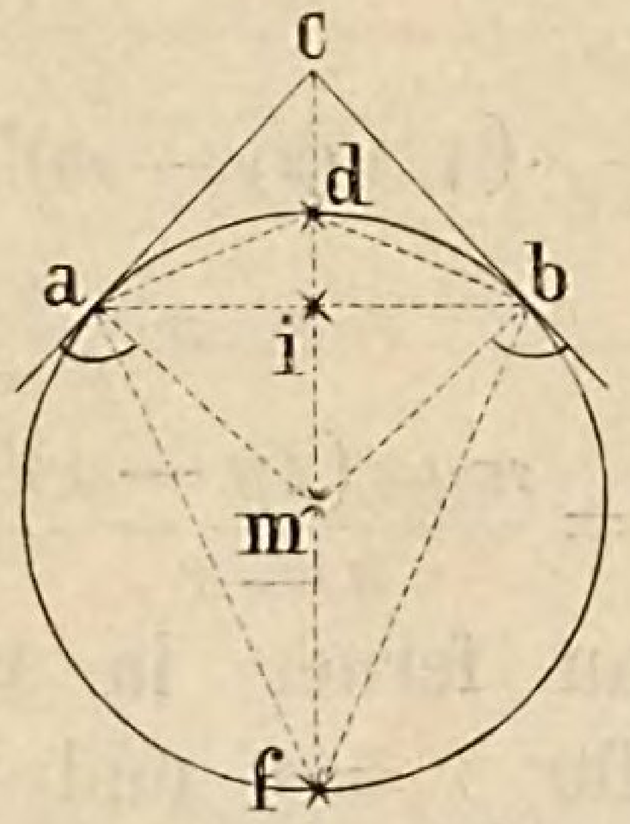
$$\overline{ac} = \sqrt{\overline{ai}^2 + \overline{ic}^2}$$

oder nach den Gleichungen c) und d):

$$\overline{ac} = \sqrt{x \cdot (2y-x) + \left(\frac{x \cdot (2y-x)}{y-x}\right)^2}$$

oder nach der Erkl. 482:

Figur 148.




**Erkl. 480.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der nach dem Berührungspunkt einer Tangente gezogene Radius eines Kreises steht senkrecht auf der Tangente.“

**Erkl. 481.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Alle Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises sind rechte Winkel.“

**Erkl. 482.** Nebenstehende Gleichung:

$$\overline{ac} = \sqrt{x \cdot (2y-x) + \left(\frac{x(2y-x)}{y-x}\right)^2}$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\overline{ac} = \sqrt{x(2y-x)\left(1 + \frac{x(2y-x)}{(y-x)^2}\right)}$$

$$\overline{ac} = \sqrt{x(2y-x) \cdot \frac{y^2 - 2yx + x^2 + 2xy - x^2}{(y-x)^2}}$$

$$\overline{ac} = \sqrt{x(2y-x) \cdot \frac{y^2}{(y-x)^2}}$$

oder

$$\overline{ac} = \frac{y}{y-x} \sqrt{x(2y-x)}$$

e) . . . $\overline{ac} = \frac{y}{y - x} \sqrt{x(2y - x)}$

Setzt man nunmehr in vorstehender Formel I für $R$ und $s$ die sich aus den Gleichungen c) und e) ergebenden Werte, so erhält man für den Mantel $M$ des Kegels, in $x$ und $y$ ausgedrückt:

$$M = \pi \cdot \sqrt{x(2y - x)} \cdot \frac{y}{y - x} \sqrt{x(2y - x)}$$

oder

$$M = \pi \cdot \frac{y}{y - x} \cdot (\sqrt{x(2y - x)})^2 =$$

$$\pi \cdot \frac{y}{y - x} \cdot x(2y - x)$$

f) . . . $M = \frac{\pi y x(2y - x)}{y - x}$

Setzt man ferner in vorstehender Formel II für $r = y$ und für $\overline{id} = x$, so erhält man für den Inhalt $J$ der Calotte in $x$ und $y$ ausgedrückt:

g) . . . $J = 2\pi \cdot y \cdot x$

Der Aufgabe gemäss erhält man mittels der Gleichungen f) und g) für $x$ und $y$ die Gleichung:

h) . . . $\frac{\pi y x(2y - x)}{y - x} : 2\pi y x = m : n$

und aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 483 für den gesuchten Quotienten $\frac{x}{2y - x}$, d. i. das gesuchte Verhältnis:

A) . . . $\frac{x}{2y - x} = \frac{m - n}{m}$

**Erkl. 483.** Nebenstehende Gleichung h) in bezug auf den Quotienten $\frac{x}{2y - x}$ aufgelöst, gibt:

$$\frac{2y - x}{2(y - x)} = \frac{m}{n}$$

oder

$$\frac{2y - x}{2y - 2x} = \frac{m}{n}$$

und hieraus erhält man mittels Anwendung des in der Erkl. 209 ausgesprochenen Differenzensatzes aus der Proportionslehre:

$$\frac{(2y - x) - (2y - 2x)}{m - n} = \frac{2y - x}{m}$$

oder

$$\frac{x}{m - n} = \frac{2y - x}{m}$$

mithin

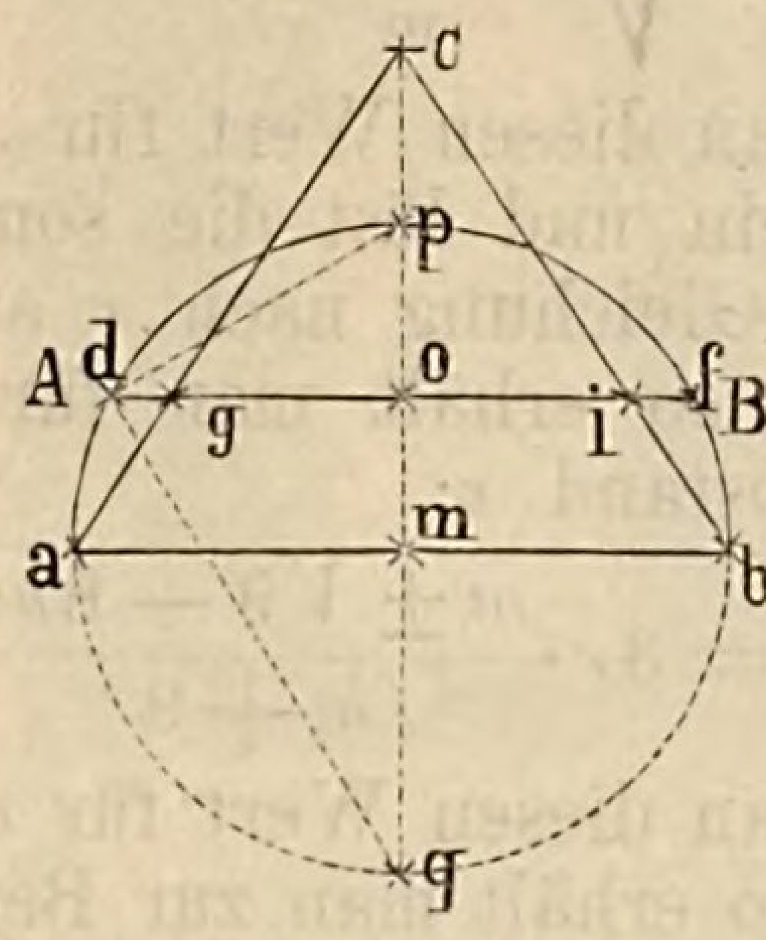
$$\frac{x}{2y - x} = \frac{m - n}{m}$$

---

**Aufgabe 513.** Ueber einem Kreise mit dem Radius $r$ ist eine Halbkugel und ein gerader Kegel konstruiert, dessen Höhe $= 3r$ ist. In welchem Abstande von jenem Kreise muss parallel zu dessen Ebene eine Ebene gelegt werden, dass die Durchschnittsfigur der Halbkugel $m$-mal so gross ist, als die des Kegels und welches sind die Radien der erhaltenen Durchschnittskreise?

**Auflösung.** Denkt man sich durch die Axe des über den gegebenen Kreis konstruierten Kegels eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Kegel in einem gleichschenkligen Dreieck, die Halbkugel in einem Halbkreis und den gegebenen Kreis in einem Durchmesser. Die Figur 149 stelle diese Durchschnittsfigur und

Figur 149.




**Erkl. 484.** Substituiert man den Wert für $y^2$ aus nebenstehender Gleichung 1) in Gleich. 2), so erhält man:

a) . . . $m \cdot z^2 + x^2 = r^2$

Diese Gleichung nach $z$ aufgelöst, gibt:

$$mz^2 = r^2 - x^2$$

$$z^2 = \frac{r^2 - x^2}{m}$$

oder

b) . . . $z = \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{m}}$

**Erkl. 485.** Setzt man in nebenstehender Gleichung 3) für $z$ den mittels der Gleichung 4) gefundenen Wert und löst die somit erhaltene neue Gleichung nach $x$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$3 \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{m}} + x = 3r$$

$$3\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{m}} = 3r - x$$

$$\left(3\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{m}}\right)^2 = (3r - x)^2$$

$$9 \cdot \frac{r^2 - x^2}{m} = 9r^2 - 6rx + x^2$$

$$\frac{9r^2 - 9x^2}{m} = 9r^2 - 6rx + x^2$$

$$9r^2 - 9x^2 = 9mr^2 - 6mrx + mx^2$$

$$9r^2 - 9mr^2 = mx^2 + 9x^2 - 6mrx$$

$$x^2(m+9) - 6mr \cdot x = 9r^2 - 9mr^2$$

$$x^2 - \frac{6mr}{m+9} \cdot x = \frac{9r^2 - 9mr^2}{m+9}$$

$$x^2 - \frac{6mr}{m+9} \cdot x + \left(\frac{6mr}{2(m+9)}\right)^2 = \frac{9r^2 - 9mr^2}{m+9} + \left(\frac{6mr}{2(m+9)}\right)^2$$

gleichzeitig die Halbkugel und den Kegel etc. in orthogonaler Projektionsart dar. Zur Bestimmung des gesuchten Abstandes $x = mo$, siehe Fig. 149, in welchem die Ebene $AB$ parallel zum gegebenen Kreise $ab$ gelegt werden muss, damit den Bedingungen der Aufgabe entsprochen wird, kann man folgendermassen verfahren:

Bezeichnet man den Radius $do$ des Kreises $df$, nach welchem die Ebene $AB$ die Halbkugel durchschneidet, mit $y$ und den Radius $go$ des Kreises $gi$, nach welchem die Ebene $AB$ den Kegel durchschneidet, mit $z$, so besteht gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 57 die Relation:

$$y^2\pi = m \cdot z^2\pi$$

oder

1) . . . $y^2 = m \cdot z^2$

Dann ergibt sich aus dem bei $d$ rechtwinkligen Dreieck $pdq$, welches entsteht, wenn man $d$ mit $p$ und $q$ verbindet (s. Erkl. 481) nach dem in der Erkl. 378 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz, die Relation:

$$\overline{do}^2 = \overline{op} \cdot \overline{oq}$$

oder, wenn man: $\overline{do} = y$

$\overline{op} = \overline{mp} - \overline{mo} = r - x$

und $\overline{oq} = \overline{mq} + \overline{mo} = r + x$ setzt:

$$y^2 = (r - x)(r + x) = r^2 - x^2$$

oder

2) . . . $y^2 + x^2 = r^2$

Ferner ergibt sich aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $amc$ und $goc$ die Relation:

$$\overline{am} : \overline{go} = \overline{mc} : \overline{oc}$$

oder, wenn man $\overline{am} = r$

$\overline{go} = z$

$\overline{mc} = 3r$ (gemäss der Aufgabe)

und $\overline{oc} = \overline{mc} - \overline{mo} = 3r - x$ setzt:

$$r : z = 3r : (3r - x)$$

oder

$$1 : z = 3 : (3r - x)$$

$$3r - x = 3z$$

mithin

3) . . . $3z + x = 3r$

$$\left(x - \frac{6mr}{2(m+9)}\right)^2 = \frac{9r^2 - 9mr^2}{m+9} + \frac{(3mr)^2}{(m+9)^2}$$

$$x - \frac{3mr}{m+9} = \pm\sqrt{\frac{(9r^2 - 9mr^2)(m+9) + 9m^2r^2}{(m+9)^2}}$$

$$x = \frac{3mr}{m+9} \pm \frac{1}{m+9} \cdot$$
$$\sqrt{9mr^2 - 9m^2r^2 + 81r^2 - 81mr^2 + 9m^2r^2}$$

$$x = \frac{3mr}{m+9} \pm \frac{1}{m+9}\sqrt{81r^2 - 72mr^2}$$

$$x = \frac{3mr \pm \sqrt{9r^2(9-8m)}}{m+9}$$

$$x = \frac{3mr \pm 3r\sqrt{9-8m}}{m+9}$$

$$x = 3r \cdot \frac{m \pm \sqrt{9-8m}}{m+9}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man nach der Erkl. 484:

$$4) \ldots z = \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{m}}$$

Setzt man diesen Wert für $z$ in Gleichung 3) ein und löst die somit erhaltene neue Gleichung nach $x$ auf, siehe Erkl. 485, so erhält man für den gesuchten Abstand $x$:

$$A) \ldots x = 3r \cdot \frac{m \pm \sqrt{9-8m}}{m+9}$$

Setzt man diesen Wert für $x$ in Gleichung 3), so erhält man zur Berechnung des Radius $z$ des Schnittkreises, in welchem die Ebene $AB$ den Kegel schneidet, die Bestimmungsgleichung:

$$5) \ldots 3z + 3r \cdot \frac{m \pm \sqrt{9-8m}}{m+9} = 3r$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 486 für $z$:

$$B) \ldots z = r \cdot \frac{9 \mp \sqrt{9-8m}}{m+9}$$

**Erkl. 486.** Nebenstehende Gleichung 5) nach $z$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$3z = 3r - 3r \cdot \frac{m \pm \sqrt{9-8m}}{m+9}$$

$$z = r - r\frac{m \pm \sqrt{9-8m}}{m+9}$$

$$z = r\left(1 - \frac{m \pm \sqrt{9-8m}}{m+9}\right)$$

$$z = r \cdot \frac{m + 9 - (m \pm \sqrt{9-8m})}{m+9}$$

$$z = r \cdot \frac{9 \mp \sqrt{9-8m}}{m+9}$$

Setzt man schliesslich den für $z$ gefundenen Wert in Gleichung 1), so erhält man zur Berechnung des Radius $y$ des Schnittkreises, in welchem die Ebene $AB$ die Halbkugel schneidet, die Bestimmungsgleichung:

$$6) \ldots y^2 = m \cdot \left(r \cdot \frac{9 \mp \sqrt{9-8m}}{m+9}\right)^2$$

und hieraus erhält man:

$$y = \sqrt{m \cdot \left(r \cdot \frac{9 \mp \sqrt{9-8m}}{m+9}\right)^2}$$

oder

$$y = \sqrt{m} \cdot r \cdot \frac{9 \mp \sqrt{9-8m}}{m+9}$$

mithin

$$C) \ldots y = r \cdot \frac{9 \mp \sqrt{9-8m}}{m+9} \cdot \sqrt{m}$$

---

## 19. Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Cylinder.

**Aufgabe 514.** Ein Silo von der durch die Fig. 150 dargestellten Form hat am Boden $7\frac{1}{2}$ m Durchmesser und eine Tiefe von 10 m. Wie viel Hektoliter Getreide fasst dasselbe?

**Formeln:**

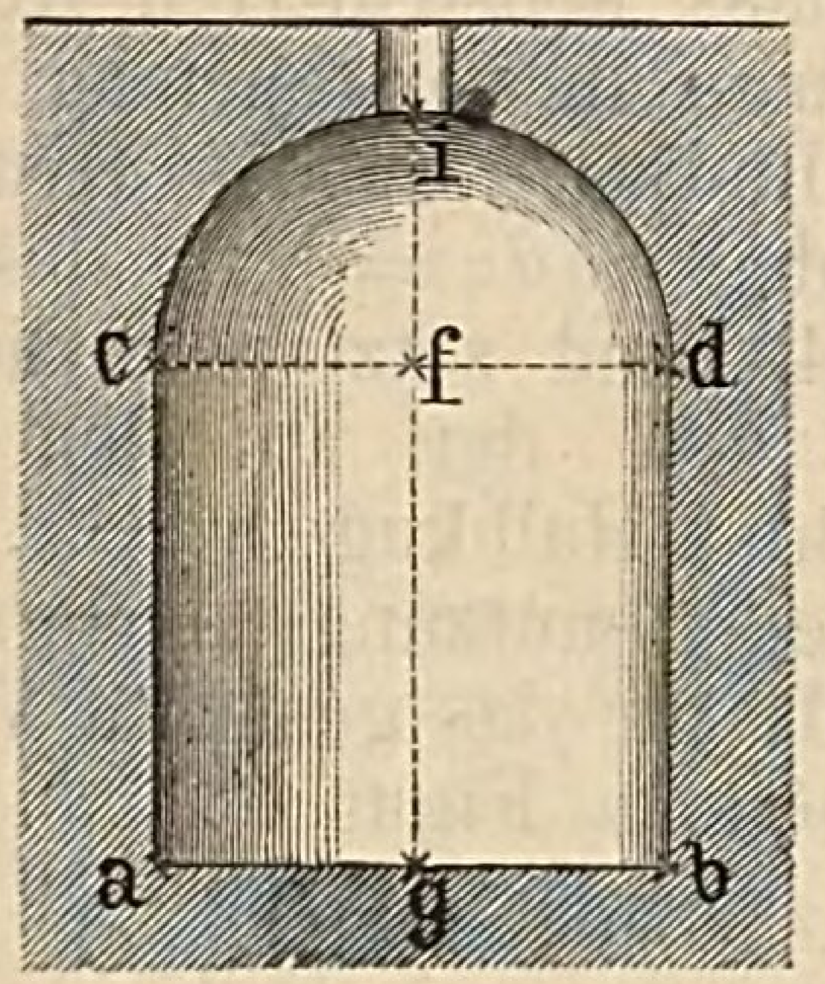
Für einen Cylinder:

$$I. \ldots V = R^2 \pi H \quad \text{(s. Erkl. 33)}$$

Für eine Halbkugel:

$$II. \ldots V = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad \text{(s. Erkl. 147).}$$

Figur 150.




**Erkl. 487.** Unter einem Silo (span., d. h. Kornkeller) versteht man einen gegrabenen oder gemauerten, meist cylindrischen (s. Fig. 150), oft auch flaschen- oder kegelförmigen Behälter unter der Erde, welcher zur trockenen Aufbewahrung von Getreide dient.

Ehe in ein Silo Getreide zum Aufbewahren gebracht wird, wird das Silo ausgefeuert, bezw. durch Feuer vollständig ausgetrocknet, dann das Silo mit Stroh umschlossen; nach der Füllung mit Getreide wird die obere Oeffnung luftdicht verschlossen.

In den Silos ist das Getreide besser vor Feuchtigkeit und schädlichen Insekten geschützt, hält sich somit länger als auf Speichern etc.

**Hülfsrechnung:**

$\log x = 2 \cdot \log 3{,}75 + \log \pi + \log 8{,}75$

Nun ist: $\log 3{,}75 = 0{,}5740313$

$\cdot 2$

$1{,}1480626$

$+ \log \pi = 0{,}4971499$

$+ \log 8{,}75 = 0{,}9420081$

$\log x = 2{,}5872206$

$2169$

$37$

mithin: $33{,}6$

$\text{numlog}\, x = 386{,}563$

**Erkl. 488.** 1 cdm = 1 Liter
1 cbm = 1000 cdm = 1000 Lit.
100 Liter = 1 Hektoliter
$1 \text{ cbm} = \frac{1000}{100}$ od. = 10 Hektol.

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des durch die Figur 150 im Durchschnitt dargestellten Silos, siehe Erkl. 487, beachte man, dass dasselbe zusammengesetzt gedacht werden kann aus dem Cylinder $abdc$ und aus der Halbkugel $cid$.

Da der Radius $ag$ des Grundkreises des Cylinders $abdc = \frac{7{,}5}{2}$ oder $= 3{,}75$ m, der Radius $\overline{cf} = \overline{fi} = \overline{fd}$ der Halbkugel $cid$ ebenfalls $= \frac{7{,}5}{2} = 3{,}75$ m, mithin die Höhe $\overline{gf}$ des Cylinders $abdc = \overline{gi} - \overline{fi} = 10 - 3{,}75 = 6{,}25$ m ist, so erhält man mittels Benutzung der vorstehenden Formeln zur Bestimmung des gesuchten Volumens $x$ des Silos:

1) . . . $x = 3{,}75^2 \cdot \pi \cdot 6{,}25 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}75^3$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$x = 3{,}75^2 \cdot \pi \cdot \left(6{,}25 + \frac{2}{3} \cdot 3{,}75\right)$$
$$x = 3{,}75^2 \cdot \pi \cdot (6{,}25 + 2{,}50)$$
$$x = 3{,}75^2 \cdot \pi \cdot 8{,}75$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung:

2) . . . $x = 386{,}563$ cbm

Da in der Aufgabe nicht nach Kubikmeter sondern nach **Hektoliter** gefragt ist, so erhält man hieraus unter Berücksichtigung der Erkl. 488:

$$x = 386{,}563 \cdot 10$$

oder

$$x = 3865{,}63 \text{ Hektoliter}$$

---

**Aufgabe 515.** Auf den beiden Enden eines geraden Cylinders, dessen Grundflächenradius $= r$ und dessen Höhe $= 4r$ ist, sind zwei Halbkugeln angebracht, deren grösste Kreise gleich den Grundkreisen des Cylinders sind. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des somit gebildeten Körpers?

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

I. . . . $V = R^2 \pi H$ (s. Erkl. 33)

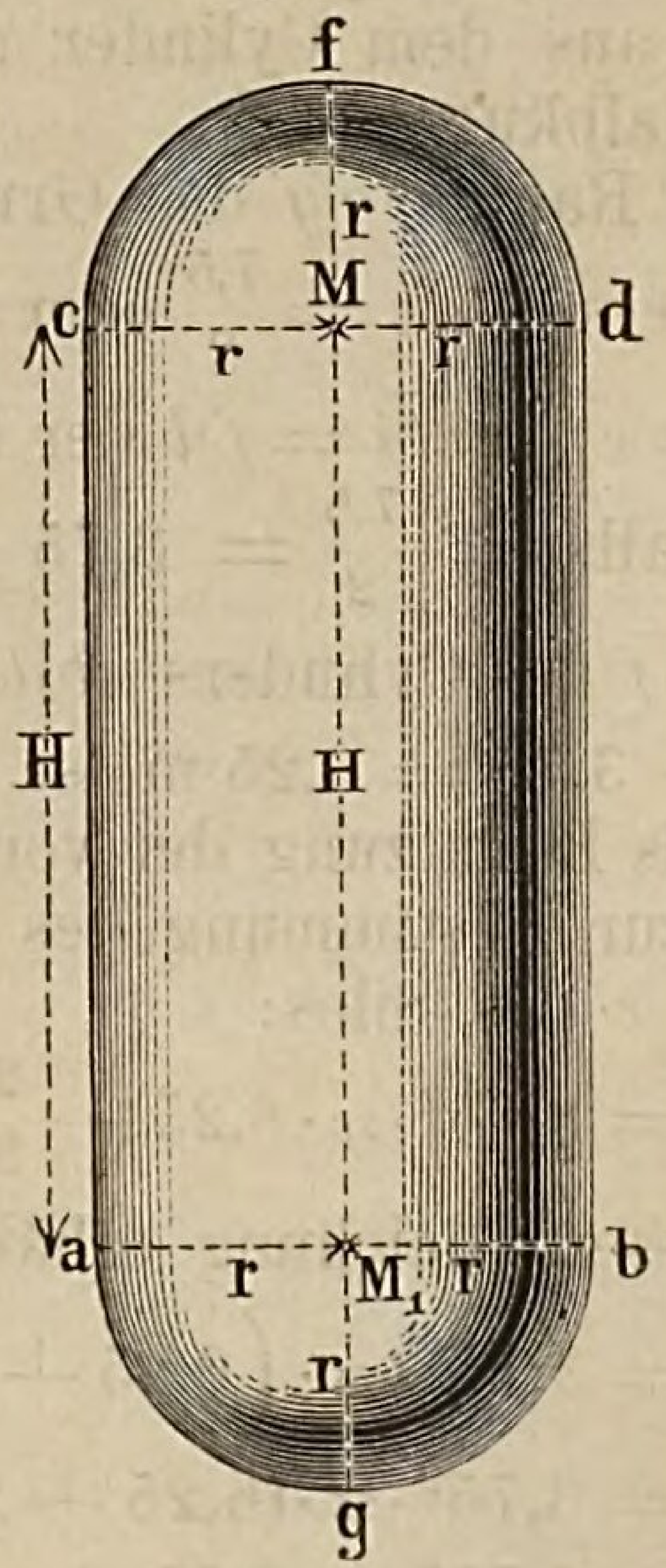
II. . . . $M = 2 R \pi H$ (s. Erkl. 47)

Für eine Halbkugel:

III. . . . $V = \frac{2}{3} \pi r^3$ (s. Erkl. 147).

IV. . . . $O = 2 \pi r^2$ (s. Erkl. 147).

Figur 151.




Die Figur 151 stelle den der Aufgabe gemäss konstruierten Körper dar.

Setzt man in vorstehender Formel I für den Radius $aM_1$ des Grundkreises des Cylinders $abdc = r$, für dessen Höhe $M_1M = 4r$ und setzt man die Radien $cM$ und $aM_1$ der auf dem Cylinder angebrachten Halbkugeln $= r$, so erhält man mittels Benutzung der vorstehenden Formel III für das gesuchte Volumen $x$ des Körpers in Figur 151:

$$x = r^2\pi \cdot 4r + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3$$

oder

$$x = 4\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{16}{3}\pi r^3$$

mithin

$$\text{A)} \quad \ldots \quad x = 5\frac{1}{3}\pi r^3$$

In analoger Weise erhält man für die gesuchte Gesamtoberfläche $y$ des Körpers in Figur 151 mittels Benutzung der vorstehenden Formeln II und IV:

$$y = 2r\pi \cdot 4r + 2 \cdot 2\pi r^2$$

oder

$$y = 8\pi r^2 + 4\pi r^2$$

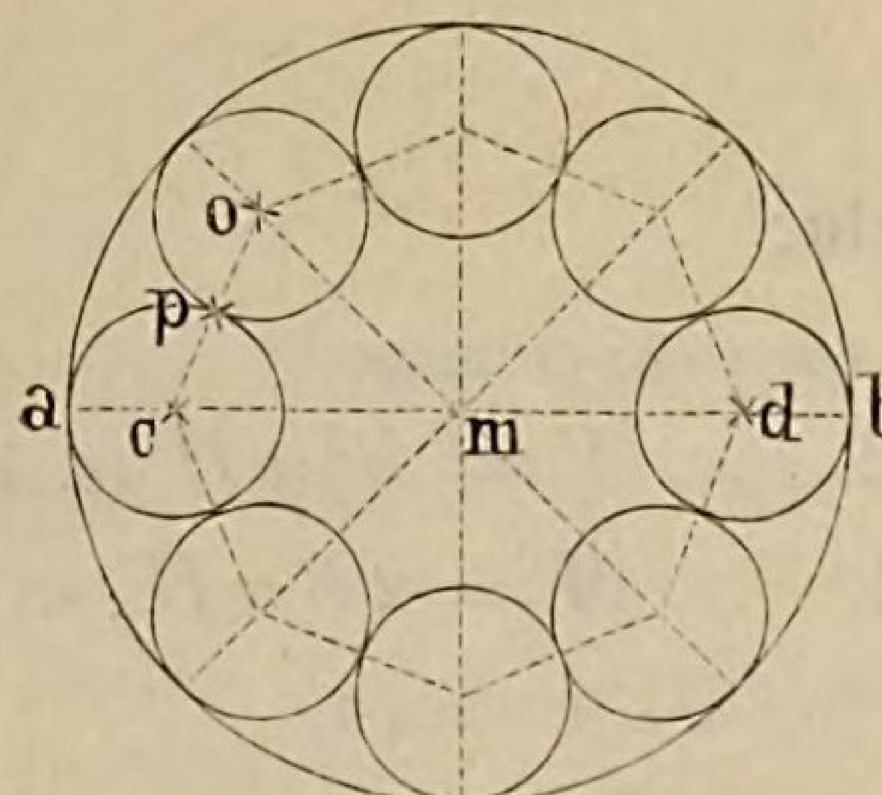
mithin

$$\text{B)} \quad \ldots \quad y = 12\pi r^2$$

---

**Aufgabe 516.** Auf der Grundfläche eines hohlen Cylinders von $2r$ lichter Weite liegen 8 Kugeln, welche sich gegenseitig und die Mantelfläche des Cylinders berühren; wie gross ist der Radius derjenigen Kugel, welche man zwischen jene Kugeln so legen kann, dass sie dieselben und die Cylindergrundfläche berührt?

Figur 152.

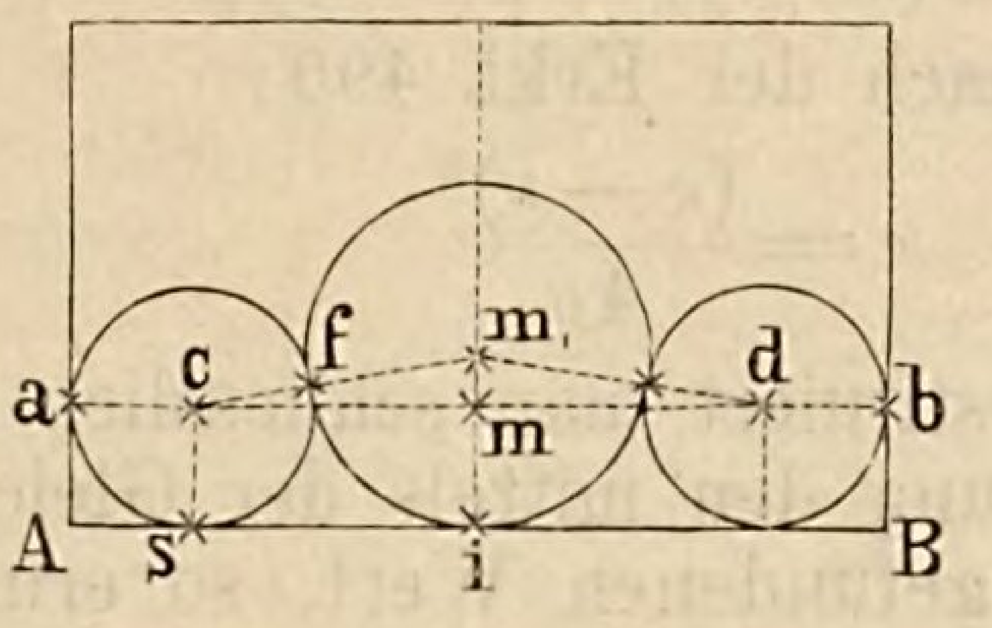



**Auflösung.** Bevor man zur Berechnung des gesuchten Kugelradius $x$ schreitet, muss man den Radius $y$ einer jener 8 Kugeln, welche gleich gross sind, in den gegebenen Durchmesser $2r$ des Cylinders ausdrücken. Dies kann man folgendermassen:

Die Fig. 152 stelle einen Querschnitt des Cylinders dar, welcher durch die Mittelpunkte der 8 Kugeln geht. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass die Mittelpunkte der 8 Kugeln die Eckpunkte eines regulären Achtecks bilden, dessen Seiten gleich den Centrallinien je zweier der sich berührenden Kugeln sind.

Da die Centrallinie, z. B. $co$, je zweier sich berührenden Kreise, z. B. der Kreise

Figur 153.




**Erkl. 489.** Nebenstehende Gleich. 1) nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2y = r\sqrt{2-\sqrt{2}} - y\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$2y + y\sqrt{2-\sqrt{2}} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$y\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

oder

$$y = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

**Erkl. 490.** Umstehende Gleichung b) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = (r-y)^2$$

$$[(x+y)+(x-y)]\cdot[(x+y)-(x-y)] = (r-y)^2$$

$$2x\cdot 2y = (r-y)^2$$

$$4xy = (r-y)^2$$

oder

$$x = \frac{(r-y)^2}{4y}$$

**Erkl. 491.** Substituiert man in umstehende Gleichung 3) den Wert für $y$ aus nebenstehender Gleichung 2), so erhält man:

$$x = \frac{\left(r - \frac{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^2}{\frac{4\cdot r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$$

Diese Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

um $c$ und um $o$, gleich der Summe der Radien dieser Kreise, also $= 2y$ ist und da der Radius $cm$ des jenem regulären Achteck umbeschriebenen Kreises $= am - ac = r - y$ gesetzt werden kann, so kann man zur Bestimmung des Radius $y$ die in der Erkl. 397 angeführte Beziehung:

$$s_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

zwischen der Seite $s_8$ eines regulären Achtecks und dem Radius $R$ des demselben umbeschriebenen Kreises benutzen und man erhält, wenn hierin für $s_8 = 2y$ und für $R = r - y$ gesetzt wird, für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots 2y = (r-y)\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 489 für den gesuchten Radius $y$ einer der 8 Kugeln:

$$2) \ldots y = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Zur Bestimmung des gesuchten Kugelradius $x$ beachte man, dass der Mittelpunkt der Kugel von den acht Kugelflächen, also auch von den Mittelpunkten der acht Kugeln gleich weit entfernt sein muss, dass er also auf der in $m$ errichteten Senkrechten, siehe Fig. 152, bezw. dass er auf der Axe des Cylinders liegen muss. Denkt man sich durch die Axe des Cylinders und durch die Mittelpunkte zweier jener acht Kugeln, z. B. durch die Mittelpunkte der Kugeln um $c$ und $d$ eine Ebene gelegt, so erhält man die durch die Figur 153 dargestellte Durchschnittsfigur. In der Figur 153 ist $m_1$ der Mittelpunkt der Kugel, welche die acht gleichen Kugeln und die Cylindergrundfläche $AB$ berührt, es muss also in dieser Figur $m_1f = m_1i = m_1g = x$, nämlich gleich dem gesuchten Radius sein.

Aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $cmm_1$ ergibt sich die Relation:

$$a) \ldots \overline{m_1c}^2 = \overline{m_1m}^2 + \overline{cm}^2$$

Setzt man in derselben:

$$\overline{m_1c} = \overline{m_1f} + \overline{fc} = x + y$$

$$\overline{m_1m} = \overline{m_1i} - \overline{mi} = \overline{m_1i} - \overline{cs} = x - y$$

$$x = r^2\left(\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^2 : \frac{4r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$x = \frac{4r^2}{(2+\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}\cdot\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4r\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

oder

$$x = \frac{r}{(2+\sqrt{2-\sqrt{2}})\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

und

$$\overline{cm} = \overline{am} - \overline{ac} = r - y$$

so erhält man die Gleichung:

b) . . . $(x+y)^2 = (x-y)^2 + (r-y)^2$

oder nach der Erkl. 490:

3) . . . $x = \frac{(r-y)^2}{4y}$

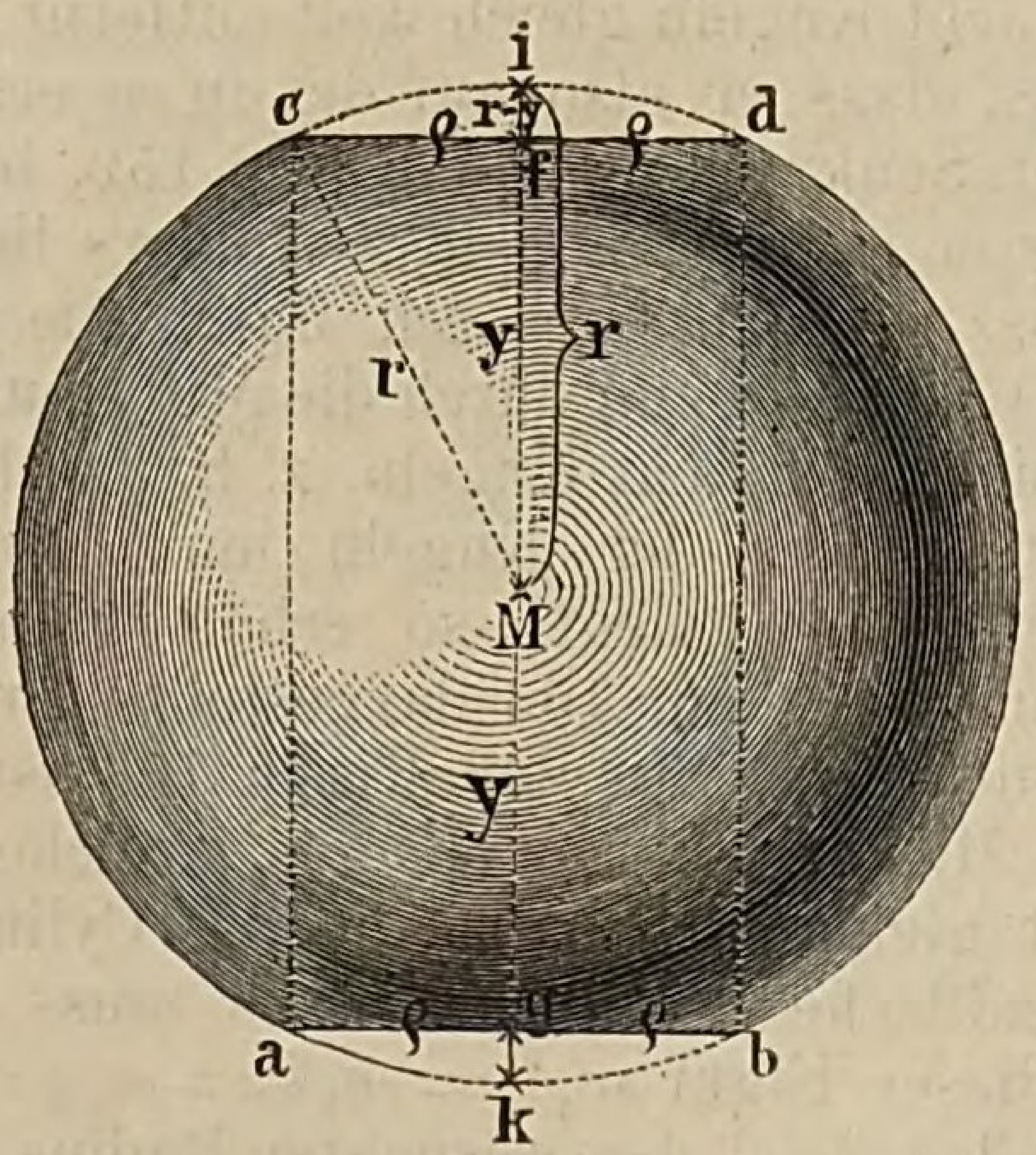
Substituiert man schliesslich in diese Gleichung den mittels der Gleichung 2) für $y$ gefundenen Wert, so erhält man nach der Erkl. 491 für den gesuchten Radius $x$:

A) . . . $x = \frac{r}{(2+\sqrt{2-\sqrt{2}})\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

---

**Aufgabe 517.** Aus einer Kugel, deren Radius $= r$ ist, ist ein cylinderförmiger Kern herausgebohrt, dessen Axe ein Durchmesser der Kugel und dessen Durchmesser $= 2\varrho$ ist. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des übrig gebliebenen Körpers?

Figur 154.




**Formeln:**

Für eine Kugel:

I. . . . $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (s. Erkl. 67)

II. . . . $O = 4\pi r^2$ (s. Erkl. 62)

Für einen Cylinder:

III. . . . $V = R^2\pi H$ (s. Erkl. 33)

IV. . . . $M = 2R\pi H$ (s. Erkl. 47)

Für ein Segment:

V. . . . $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$ (s. Erkl. 151)

Für eine Calotte:

VI. . . . I. d. C. $= 2r\pi\cdot h$ (s. Erkl. 63).

**Auflösung.** Der aus der Kugel herausgebohrte cylinderförmige Kern besteht, siehe Figur 154, aus dem Cylinder *abdc* und aus den beiden kongruenten Kugelsegmenten *cid* und *akb*. Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des von der Kugel übrig gebliebenen, ringförmigen Körpers besteht somit die Beziehung:

1) $x =$ V. d. Kugel — V. d. Cylind. *abdc* — 2 · V. d. Segments *cid*

Für das Volumen $V$ der Kugel hat man nach vorstehender Formel I direkt:

2) . . . $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Für das Volumen $V_1$ des Cylinders *abdc* hat man nach vorstehender Formel III, da dessen Grundflächenradius *ag* oder *cf* der Aufgabe gemäss $= \varrho$ und dessen Höhe *gf* nach der Erkl. 492: $= 2\sqrt{r^2-\varrho^2}$ ist:

3) . . . $V_1 = 2\varrho^2\pi\sqrt{r^2-\varrho^2}$

Für das Volumen $V_2$ des Segments *cid* hat man nach vorstehender Formel V, da dessen Höhe $\overline{fi} = \overline{Mi} - \overline{Mf} = r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ (s. Gleichung a). in der Erkl. 492) ist:

$$V_2 = \frac{\pi(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})^2}{3}[3r - (r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})]$$

oder nach der Erkl. 493:

$$4)\quad V_2 = \frac{\pi}{3}\left(2r^3 - 2r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$$

Für das gesuchte Volumen $x$ des ringförmigen Restkörpers erhält man aus den Gleichungen 1) bis 4):

$$x = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2\varrho^2\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2} - 2\cdot\frac{\pi}{3}(2r^3 - 2r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

oder:

$$x = \frac{\pi}{3}(4r^3 - 6\varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - 4r^3 + 4r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} + 2\varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

$$x = \frac{\pi}{3}(4r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - 4\varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

$$x = \frac{4\pi}{3}\sqrt{r^2 - \varrho^2}\,(r^2 - \varrho^2) = \frac{4\pi}{3}(r^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(r^2 - \varrho^2)^{\frac{2}{2}}$$

mithin:

$$\text{A)}\ \ldots\ x = \frac{4\pi}{3}\cdot(r^2 - \varrho^2)^{\frac{3}{2}}$$

Zur Bestimmung der gesuchten Oberfläche $y$ des ringförmigen Restkörpers beachte man, dass dieselbe aus der Mantelfläche des Cylinders *abdc* plus der Oberfläche der ganzen Kugel vermindert um die Inhalte der kongruenten Calotten *cid* und *akb* besteht; man hat somit für jene Oberfläche $y$ die Beziehung:

5) . . $y$ = M. d. Cyl. + O. d. Kugel — 2 · I. d. Calotte *cid*

Für den Mantel $M$ des Cylinders *abdc* hat man nach vorstehender Formel IV, wenn man für den Radius $\overline{ag} = \overline{cf}$ des Grundkreises $= \varrho$ und nach der Erkl. 492 für die Höhe des Cylinders $= 2\sqrt{r^2 - \varrho^2}$ setzt:

$$M = 2\cdot\varrho\cdot\pi\cdot 2\sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

oder

$$6)\ \ldots\ M = 4\varrho\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

Für die Oberfläche $O$ der Kugel hat man nach vorstehender Formel II:

$$7)\ \ldots\ O = 4\pi r^2$$

Für den Inhalt $J$ der Calotte *cid* hat man nach vorstehender Formel VI, wenn man in derselben für den Radius

**Erkl. 492.** Verbindet man in Figur 154 den Mittelpunkt $M$ mit $c$, so erhält man das rechtwinklige Dreieck $Mfc$, aus demselben ergibt sich:

$$\overline{Mf} = \sqrt{\overline{Mc}^2 - \overline{cf}^2}$$

oder, da: $\overline{Mc} = r$ und $\overline{cf} = \varrho$ ist:

$$\text{a)}\ \ldots\ \overline{Mf} = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

Für die Höhe $\overline{gf} = 2\cdot\overline{Mf}$ des Cylinders *abdc* erhält man somit:

$$\text{b)}\ \ldots\ \overline{gf} = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

**Erkl. 493.** Nebenstehende Gleichung:

$$V_2 = \frac{\pi(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})^2}{3} \cdot [3r - (r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})]$$

kann man wie folgt reduzieren:

$$V_2 = \frac{\pi}{3}(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})^2 \cdot (2r + \sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3}(r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \varrho^2} + r^2 - \varrho^2)(2r + \sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3}(2r^2 - \varrho^2 - 2r\sqrt{r^2 - \varrho^2})(2r + \sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3}[4r^3 - 2r\varrho^2 - 4r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} + 2r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - 2r(r^2 - \varrho^2)]$$

$$V^2 = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 2r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

der zugehörigen Kugel $= r$ und für die Höhe $\overline{fi}$ derselben $= \overline{Mi} - \overline{Mf} = r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ (s. Gleichung a). in der Erkl. 492) setzt:

8) . . . $J = 2r\pi(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})$

Für die gesuchte Oberfläche $y$ des ringförmigen Restkörpers erhält man aus den Gleichungen 5) bis 8):

$$y = 4\varrho\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2} + 4\pi r^2 - 2 \cdot 2r\pi \cdot (r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

oder

$$y = 4\pi(\varrho\sqrt{r^2 - \varrho^2} + r^2 - r^2 + r\sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

mithin

B) . . . $y = 4\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2}(r + \varrho)$

---

**Aufgabe 518.** Aus einer Kugel, deren Radius $= r$, ist ein cylindrischer Kern herausgedreht, dessen Axe durch den Mittelpunkt der Kugel geht; wie gross ist die Oberfläche und der Kubikinhalt des herausgedrehten Kernes, wenn der Radius seines Querschnitts $= \varrho$ ist?

**Auflösung.** Der aus der Kugel herausgedrehte Kern, siehe Fig. 154, besteht aus dem Cylinder $abdc$ und aus den beiden gleichen Segmenten $akb$ und $cid$. Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ dieses Kernes besteht somit die Beziehung:

1) . . . $x =$ V. d. Cylind. $abdc + 2 \cdot$ V. d. Segments $cid$

Für das Volumen $V$ des Cylinders hat man nach der in voriger Aufgabe aufgestellten Gleichung 3):

2) . . . $V = 2\varrho^2\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2}$

Für das Volumen $V_1$ des Segments $cid$ hat man ferner nach der in voriger Aufgabe aufgestellten Gleich. 4):

3) $V_1 = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 2r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2})$

Aus den Gleichungen 1) bis 3): erhält man also:

4) . . . $x = 2\varrho^2\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2} + 2 \cdot \frac{\pi}{3}(2r^3 - 2r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2})$

oder nach der Erkl. 494:

A) . . . $x = \frac{4\pi}{3}\left[r^3 - (r^2 - \varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]$

**Erkl. 494.** Nebenstehende Gleichung 4) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x = 2\varrho^2\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2} + \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi r^2}{3}\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \frac{2\pi\varrho^2}{3}\sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

$$x = \frac{4\pi r^3}{3} - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\left(-2\varrho^2\pi + \frac{4\pi r^2}{3} + \frac{2\pi\varrho^2}{3}\right)$$

$$x = \frac{4\pi r^3}{3} - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\left(-\frac{4\pi\varrho^2}{3} + \frac{4\pi r^2}{3}\right)$$

$$x = \frac{4\pi}{3}\left[r^3 - \sqrt{r^2 - \varrho^2}(r^2 - \varrho^2)\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[r^3 - (r^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}}(r^2 - \varrho^2)^{\frac{2}{2}}\right]$$

oder

$$x = \frac{4\pi}{3}\left[r^3 - (r^2 - \varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Zur Bestimmung der gesuchten Oberfläche $y$ des herausgedrehten Kerns beachte man, dass dieselbe aus dem Mantel des Cylinders $abdc$ und aus der Summe der Inhalte der beiden gleichen Calotten $cid$ und $akb$ besteht; man hat somit für die Oberfläche $y$ die Beziehung:

4) $y = \text{M. d. Cyl. } abdc + 2 \cdot \text{J. d. C. } cid$

Für den Mantel $M$ des Cylinders $abdc$ hat man nach der in voriger Aufgabe aufgestellten Gleichung 6):

5) . . . $M = 4\varrho\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2}$

Für den Inhalt $J$ der Calotte hat man nach der in voriger Aufgabe aufgestellten Gleichung 8):

6) . . . $J = 2r\pi\left(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$

Für die gesuchte Oberfläche $y$ erhält man also die Gleichung:

7) $y = 4\pi\varrho\sqrt{r^2 - \varrho^2} + 2 \cdot 2r\pi\left(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 495:

B) . . . $y = 4\pi\left(r^2 - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\,(r - \varrho)\right)$

**Erkl. 495.** Nebenstehende Gleichung 7) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$y = 4\pi\varrho\sqrt{r^2 - \varrho^2} + 4\pi r^2 - 4\pi r\sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

oder

$$y = 4\pi\left(\varrho\sqrt{r^2 - \varrho^2} + r^2 - r\sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$$

mithin

$$y = 4\pi\left(r^2 - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\,(r - \varrho)\right)$$

---

## 20. Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit der Pyramide und dem Pyramidenstumpf.

**Aufgabe 519.** Der Radius $r$ einer Kugel sei so in zwei Stücke geteilt, dass das an dem Mittelpunkt liegende Stück die mittlere Proportionale zwischen dem 2. Stück und dem ganzen Radius ist. Durch den Teilpunkt ist eine Ebene senkrecht zu diesem Radius durch die Kugel gelegt; in dem grösseren der so entstandenen Abschnitte ist eine vierseitige, regelmässige Pyramide beschrieben, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Wie gross ist das Volumen dieser Pyramide?

**Formel:**

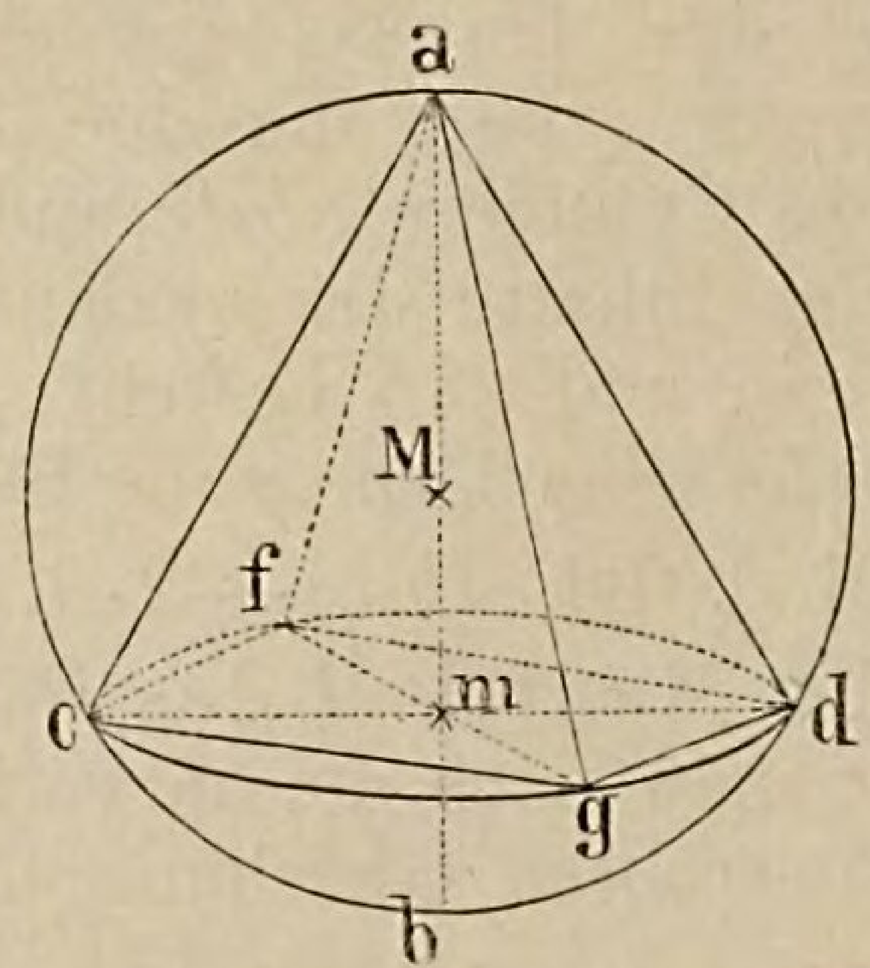
Für eine Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28).}$$

**Auflösung.** In der Fig. 155 stelle $cgdf$ die durch den Teilpunkt $m$ des Kugelradius $Mb$ zu demselben senkrecht gelegte Ebene dar; ferner sei $acgdf$ die in dem grösseren Kugelabschnitt $cad$ konstruierte Pyramide.

Zur Bestimmung des gesuchten Inhalts $x$ der Pyramide $acgdf$ muss man nach vorstehender Formel eine Seite der quadratischen Grundfläche, z. B. die Seite $cg$ und die Höhe $ma$ der Pyramide in den gegebenen Kugelradius $r$ ausdrücken, was wie folgt geschieht:

Figur 155.




**Erkl. 496.** Der Aufgabe gemäss muss in der Figur 155 die Relation bestehen:

$$\overline{mb}:\overline{mM}=\overline{mM}:\overline{Mb}$$

Da nun:

$$\overline{Mb}=r$$

und $\overline{mb}=\overline{Mb}-\overline{Mm}=r-\overline{mM}$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$(r-\overline{mM}):\overline{mM}=\overline{mM}:r$$

Diese Gleichung nach $\overline{mM}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$r^2-r\cdot\overline{mM}=\overline{mM}^2$$

$$\overline{mM}^2+r\cdot\overline{mM}=r^2$$

$$\overline{mM}+r\cdot\overline{mM}+\left(\frac{r}{2}\right)^2=r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\left(\overline{mM}+\frac{r}{2}\right)^2=r^2+\frac{r^2}{4}$$

$$\overline{mM}+\frac{r}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{4}r^2}$$

$$\overline{mM}=-\frac{r}{2}\pm\frac{r}{2}\sqrt{5}$$

oder

a) . . $\overline{mM}=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$

**Erkl. 497.** Nebenstehende Gleichung 1) reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x=\frac{r^3}{4}(1+\sqrt{5})^2(3-\sqrt{5}):3$$

$$x=\frac{r^3}{12}(1+2\sqrt{5}+5)(3-\sqrt{5})$$

$$x=\frac{r^3}{12}(6+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$$

$$x=\frac{r^3}{6}(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=\frac{r^3}{6}\left(3^2-(\sqrt{5})^2\right)$$

$$x=\frac{r^3}{6}(9-5)=\frac{r^3}{6}\cdot 4$$

oder

$$x=\frac{2}{3}r^3$$

Aus der Fig. 155 ergibt sich:

$$\overline{ma}=\overline{mM}+\overline{Ma}$$

oder, da $\overline{Ma}=r$ und gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 496:

a) . . . $\overline{mM}=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$

gesetzt werden kann:

$$\overline{ma}=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})+r$$

Für die Höhe $\overline{ma}$ der Pyramide $acgdf$ erhält man also:

b) . . . $\overline{ma}=\frac{r}{2}(1+\sqrt{5})$

Denkt man sich ferner $c$ mit $b$ verbunden, so entsteht ein bei $c$ rechtwinkliges Dreieck $acb$, nach der Erkl. 378 erhält man somit:

$$\overline{cm}^2=\overline{ma}\cdot\overline{mb}$$

oder, da:

$\overline{ma}=\frac{r}{2}(1+\sqrt{5})$ [siehe Gleich. b)]

und

$\overline{mb}=\overline{Mb}-\overline{mM}=r-\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$

[s. Gleich. a)]

$$=r+\frac{r}{2}-\frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$=\frac{3}{2}r-\frac{r}{2}\sqrt{5}=\frac{r}{2}(3-\sqrt{5})$$

gesetzt werden kann:

$$\overline{cm}^2=\frac{r}{2}(1+\sqrt{5})\,\frac{r}{2}(3-\sqrt{5})$$

Für die halbe Diagonale $\overline{cm}$ des Quadrats $cgdf$ erhält man hiernach:

c) . . . $\overline{cm}=\frac{r}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

Da nun in dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $cmg$ die Seite $\overline{gm}=\overline{cm}$ ist, so erhält man für die Quadratseite $\overline{cg}$:

$$\overline{cg}^2=2\cdot\overline{cm}^2$$

oder

d) . . . $\overline{cg}^2=\frac{r^2}{2}(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$

[s. Gleich. c)]

Setzt man in vorstehender Formel an Stelle von $G$ den mittels Gleichung d) für $\overline{cg}^2$ und an Stelle von $H$ den mittels vorstehender Gleichung b) für

$\overline{ma}$ gefundenen Wert, so erhält man für das gesuchte Volumen:

1) $x = \frac{r^2}{2}(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) \cdot \frac{r}{2}(1+\sqrt{5}):3$

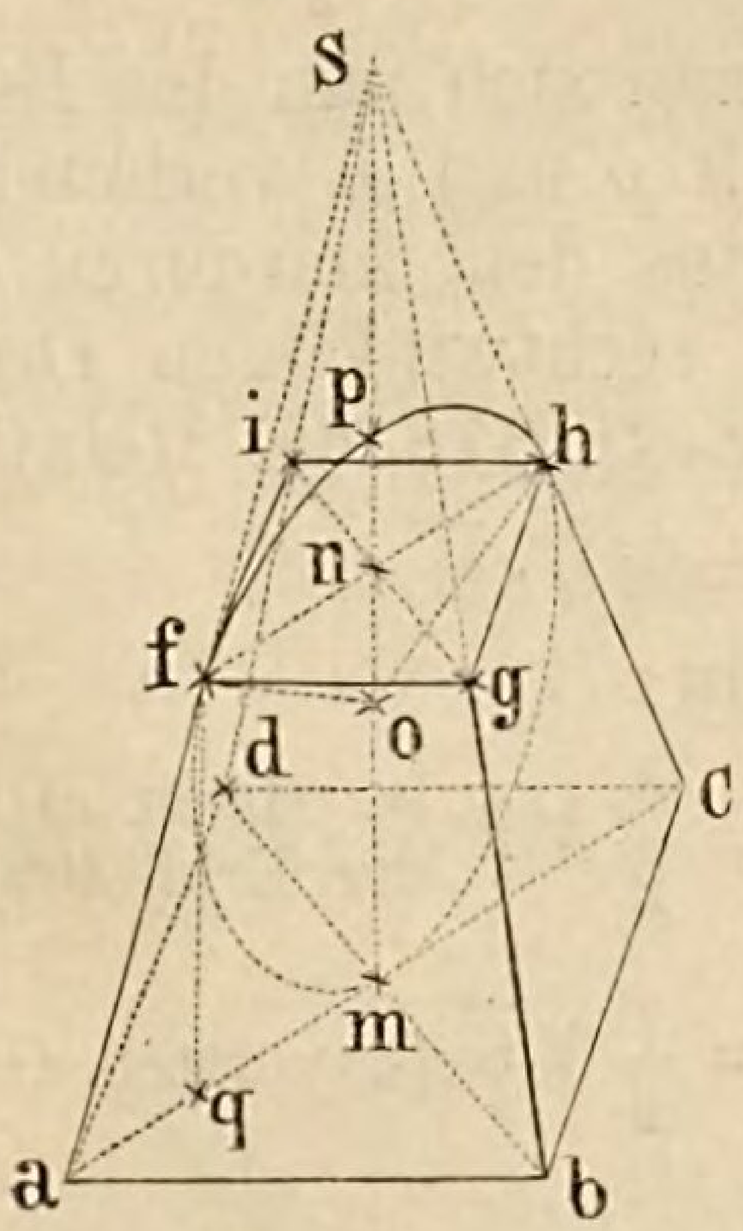
oder nach der Erkl. 497:

A) . . . $x = \frac{2}{3} r^3$

---

**Aufgabe 520.** Von einem geraden quadratischen Pyramidenstumpf sei eine Seite der oberen Deckfläche $= s$. Die Seitenkanten seien gleich der Diagonale der oberen Grundfläche. Eine Kugel, welche die untere Grundfläche berührt und durch die oberen Eckpunkte geht, werde in diesen von den vier Seitenkanten berührt. Wie gross ist die untere Grundfläche; wie gross ist der Radius der Kugel und in welchem Verhältnis teilt der Mittelpunkt der Kugel die Höhe des Stumpfs?

Figur 156.




**Auflösung.** In Figur 156 stelle $abcdfghi$ den geraden quadratischen Pyramidenstumpf dar, der Kreis um $o$ sei ein grösster Kreis der gedachten Kugel, welche die untere Grundfläche $abcd$ berührt, durch die Eckpunkte der oberen Deckfläche $fghi$ geht, gleichzeitig aber auch in diesen Punkten die Seitenkanten des Pyramidenstumpfs berührt. Der Mittelpunkt $o$ der gedachten Kugel muss, da er gleichweit von den Ecken $f$, $g$, $h$ und $i$ entfernt sein soll, auf der Axe $mn$ des Stumpfes liegen.

Zur Bestimmung des gesuchten Inhalts $x$ der unteren Grundfläche verfahre man, wie folgt:

Da der Kreis um $o$ die Diagonale $ac$ in $m$, die Seitenkante $af$ in $f$ berührt, so muss nach der Erkl. 283:

a) . . . $\overline{am} = \overline{af}$

sein, da ferner gemäss der Aufgabe:

$\overline{af} = \overline{fh} = s\sqrt{2}$ (s. Gleich. b) in der Erkl. 498)

ist, so erhält man:

b) . . . $\overline{am} = s\sqrt{2}$

Aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $amb$ erhält man:

$$\overline{ab}^2 = \overline{am}^2 + \overline{bm}^2 = 2 \cdot \overline{am}^2$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Gleichung b):

$$\overline{ab}^2 = 2 \cdot (s\sqrt{2})^2$$

oder

$$\overline{ab}^2 = 2 \cdot s^2 \cdot 2 = 4s^2$$

**Erkl. 498.** Aus dem bei $g$ rechtwinkligen Dreieck $fgh$ in Figur 156 ergibt sich:

$$\overline{fh}^2 = \overline{fg}^2 + \overline{gh}^2$$

oder, da:

$$\overline{fg} = \overline{gh} = s \text{ ist:}$$

$$\overline{fh}^2 = s^2 + s^2$$

Hieraus erhält man:

$$\text{a)} \ldots \overline{fh}^2 = 2s^2$$

$$\text{b)} \ldots \overline{fh} = s\sqrt{2}$$

$$\text{c)} \ldots \overline{fn} = \frac{fh}{2} = \frac{s}{2}\sqrt{2}$$

und

$$\text{d)} \ldots \overline{fn}^2 = \frac{s^2}{2}$$

**Erkl. 499.** Nebenstehende Gleichung d) reduziert, gibt:

$$\overline{fq} = \sqrt{2s^2 - \left(\frac{s}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\overline{fq} = \sqrt{2s^2 - \frac{s^2 \cdot 2}{4}}$$

$$\overline{fq} = \sqrt{\frac{8s^2 - 2s^2}{4}}$$

$$\overline{fq} = \sqrt{\frac{6s^2}{4}}$$

oder

$$\overline{fq} = \frac{s}{2}\sqrt{6}$$

**Erkl. 500.** Nebenstehende Gleichung f) nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{s^2 \cdot 2}{4} = 2y \cdot \frac{s}{2}\sqrt{6} - \frac{s^2}{4}(\sqrt{6})^2$$

$$\frac{s^2}{2} + \frac{6s^2}{4} = ys\sqrt{6}$$

$$\frac{s}{2} + \frac{3s}{2} = y\sqrt{6}$$

$$y\sqrt{6} = 2s$$

$$y = \frac{2s}{\sqrt{6}}$$

$$y = \frac{2s\sqrt{6}}{6}$$

oder

$$y = \frac{s}{3}\sqrt{6}$$

mithin

$$\text{c)} \ldots \overline{ab} = 2s$$

Für den gesuchten Inhalt $x$ der Grundfläche $abcd$ erhält man also:

$$\text{A)} \ldots x = \overline{ab}^2 = 4s^2$$

Zur Berechnung des gesuchten Kugelradius $y (= \overline{of} = \overline{op} = \overline{om})$ verfahre man wie folgt:

Fällt man den Perpendikel $\overline{fq}$, so erhält man aus dem bei $q$ rechtwinkligen Dreieck $fqa$ für die Höhe $\overline{fq}\ (= \overline{mn})$ des Stumpfs:

$$\overline{fq} = \sqrt{\overline{af}^2 - \overline{aq}^2}$$

oder, da:

$$\overline{af} = \overline{am} = s\sqrt{2} \text{ [s. vorst. Gleich. b)]}$$

und

$$\overline{aq} = \overline{am} - \overline{qm} = \overline{am} - \overline{fn} = s\sqrt{2} - \frac{s}{2}\sqrt{2}$$

[s. vorsteh. Gleich. b) und die Gleich. c) in der Erkl. 498]

gesetzt werden kann:

$$\text{d)}\ \overline{fq} = \sqrt{(s\sqrt{2})^2 - \left(s\sqrt{2} - \frac{s}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 499 für die Höhe $\overline{fq} = \overline{mn}$ des Stumpfs:

$$\text{e)} \ldots \overline{fq} = \overline{mn} = \frac{s}{2}\sqrt{6}$$

Denkt man sich nun den Berührungspunkt $f$ mit $p$ und $m$ verbunden, so erhält man aus dem hierdurch entstehenden, bei $f$ rechtwinkligen Dreieck $pfn$ nach der Erkl. 378 die Relation:

$$\overline{fn}^2 = \overline{np} \cdot \overline{mn}$$

Da hierin:

$$\overline{fn} = \frac{s}{2}\sqrt{2} \text{ [s. Gleich. c) in der Erkl. 498]}$$

$$\overline{mn} = \frac{s}{2}\sqrt{6} \text{ [s. vorsteh. Gleich. e)]}$$

und

$$\overline{np} = \overline{mp} - \overline{mn} = 2y - \frac{s}{2}\sqrt{6}$$

gesetzt werden kann, so erhält man für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$\text{f)}\ \cdot \left(\frac{s}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \left(2y - \frac{s}{2}\sqrt{6}\right) \cdot \frac{s}{2}\sqrt{6}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 500 für den gesuchten Kugelradius $y$:

$$\text{B)} \ldots y = \frac{s}{3}\sqrt{6}$$

**Erkl. 501.** Nebenstehende Proportion g) reduziert, gibt:

$$\frac{\overline{om}}{\overline{on}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3-2}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1}$$

oder

$$\frac{\overline{om}}{\overline{on}} = \frac{2}{1}$$

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses $\overline{om} : \overline{on}$, in welchem der Mittelpunkt $o$ der Kugel die Höhe $\overline{mn}$ des Stumpfs teilt, verfahre man wie folgt:

Setzt man:

$$\overline{om} = y = \frac{s}{3}\sqrt{6} \text{ [s. vorsteh. Gleich. B)]}$$

und

$$\overline{on} = \overline{mn} - \overline{om} = \frac{s}{2}\sqrt{6} - \frac{s}{3}\sqrt{6}$$

[s. vorstehende Gleichungen e) und B)]

so erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$\text{g)} \ldots \frac{\overline{om}}{\overline{on}} = \frac{\frac{s}{3}\sqrt{6}}{\frac{s}{2}\sqrt{6} - \frac{s}{3}\sqrt{6}}$$

oder nach der Erkl. 501:

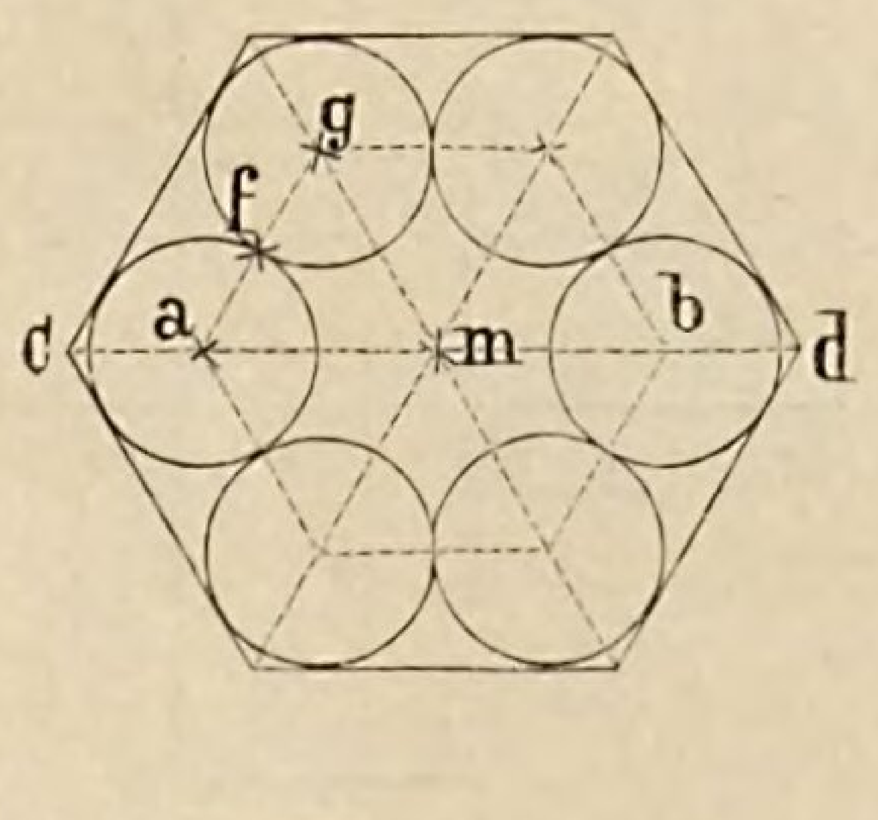
$$\text{C)} \ldots \overline{om} : \overline{on} = 2 : 1$$

---

## 21. Die Kugel und ihre Teile in Verbindung mit dem Prisma.

**Aufgabe 521.** Auf dem Boden eines Behälters von der Form eines regulären, geraden, sechsseitigen Prismas liegen sechs gleiche Kugeln so, dass jede zwei Seitenflächen und zwei benachbarte Kugeln berührt. Eine siebente Kugel ruht berührend auf sämtlichen sechs Kugeln und berührt zugleich die obere Endfläche des Prismas. Wie verhält sich der Radius dieser siebenten Kugel zu dem Radius einer der sechs ersten Kugeln, wenn der letztere Radius gleich dem sechsten Teil der Tiefe des prismatischen Behälters ist?

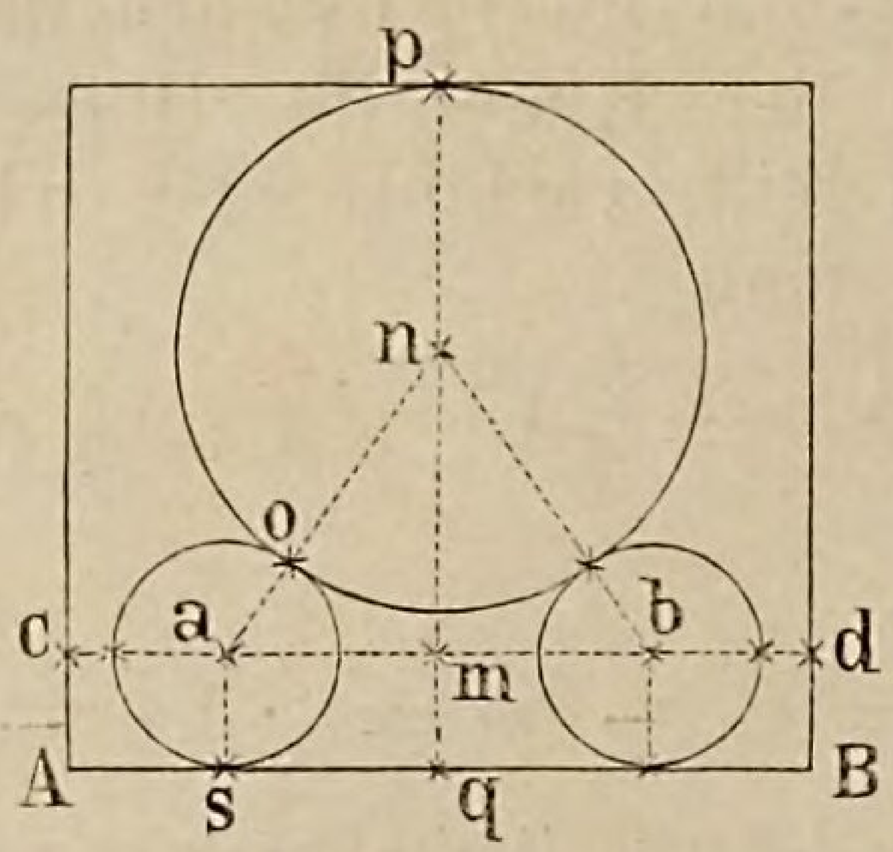
Figur 157.




**Auflösung.** Die Figur 157 stelle den Querschnitt des Prismas dar, welcher durch die Mittelpunkte der sechs gleichen, die Grundfläche des Prismas berührenden Kugeln geht. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass die Mittelpunkte der sechs Kugeln die Eckpunkte eines regulären Sechsecks bilden, dessen Seiten gleich den Centrallinien je zweier der sich berührenden Kugeln sind.

Bezeichnet man den Radius einer jener sechs gleichen Kugeln mit $r$, so ist die Seite $\overline{ag}$ des von den Centrallinien dieser Kugeln gebildeten Sechsecks $= 2r$, ebenso ist der Radius $\overline{am}$ des demselben umbeschriebenen Kreises nach der Erkl. 502 ebenfalls $= 2r$. Beachtet man nun ferner, dass der Mittelpunkt der siebenten Kugel auf der Achse des Prismas liegen

Figur 158.




muss und man denkt sich durch die Achse und durch die Mittelpunkte zweier jener sechs gleichen Kugeln, z. B. durch die Mittelpunkte $a$ und $b$ eine Ebene gelegt, so erhält man die durch die Figur 158 dargestellte Schnittfigur. Aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck in Figur 158 erhält man die Relation:

a) . . . $\overline{an}^2 = \overline{am}^2 + \overline{mn}^2$.

Bezeichnet man nun den Radius $\overline{on}$ ($= np$) der siebenten Kugel um $n$ mit $R$ und setzt:

$\overline{an} = \overline{ao} + \overline{on} = r + R$

$\overline{am} = 2r$ (wie vorstehend schon erwähnt)

und

$\overline{mn} = \overline{qp} - \overline{np} - \overline{qm} = qp - np - as$

$= 6r - R - r$, indem der Aufgabe gemäss die Höhe $qp$ sechsmal so gross als der Radius $r$ einer jener sechs Kugeln sein soll,

so geht vorstehende Relation a) über in:

b) . . $(r + R)^2 = (2r)^2 + (6r - R - r)^2$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 503 für das gesuchte Verhältnis $R:r$ der Radien $R$ und $r$:

A) . . . $R:r = 7:3$

**Erkl. 502.** Bezeichnet man die Seite eines regulären Sechsecks mit $s_6$, den Radius des demselben umbeschriebenen Kreises mit $R$, so besteht die Relation:

$$s_6 = R$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der regulären Polygone handelt.

**Erkl. 503.** Aus nebenstehender Gleichung b) erhält man:

$$r^2 + 2rR + R^2 = 4r^2 + (5r - R^2)$$
$$2rR + R^2 = 3r^2 + 25r^2 - 10rR + R^2$$
$$12rR = 28r^2$$
$$12R = 28r$$
$$\frac{R}{r} = \frac{28}{12}$$

mithin:

$$R:r = 7:3$$

---

## b). Ungelöste Aufgaben.

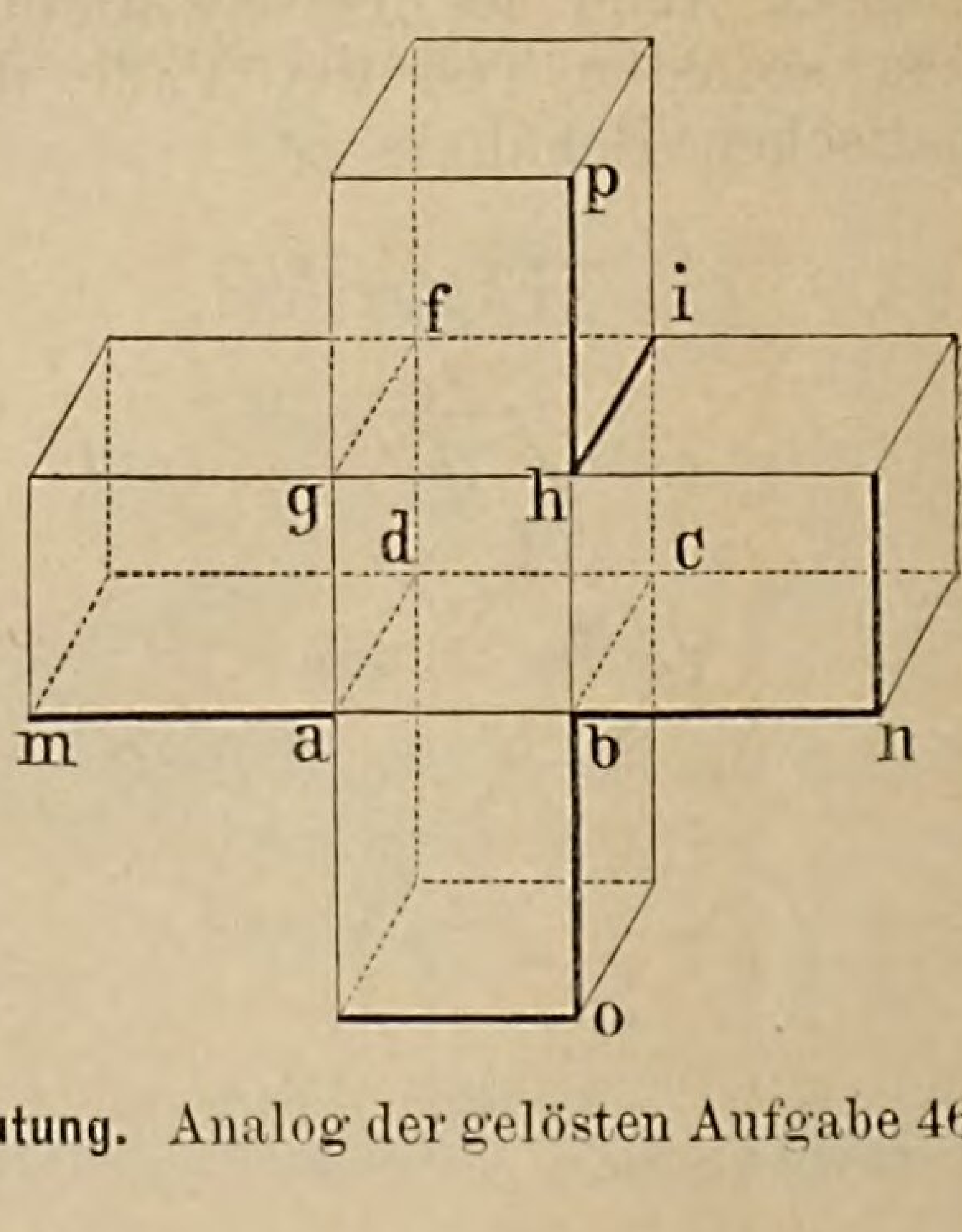
**Aufgabe 522.** In ein gerades Prisma mit quadratischer Basis sei ein anderes so einbeschrieben, dass seine Eckpunkte die Grundkanten des ersten halbieren; wie gross ist die Oberfläche des zweiten Prismas, wenn eine Grundkante des ersten gleich $a$ und eine Seitenkante $= b$ ist?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 462.

---

**Aufgabe 523.** Zwei gerade Prismen, deren quadratische Grundflächen je $= 500$ qcm Inhalt haben, seien so ineinander gesteckt, dass ihre Axen aufeinander senkrecht stehen und zwei ihrer Seitenflächen in eine Ebene fallen. Wie gross ist das Volumen des beiden Prismen gemeinsamen Körperteils?

Figur 159.




**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 464.

---

**Aufgabe 524.** Die Axen zweier geraden, quadratischen Pyramiden liegen in denselben Geraden, ihre Grundflächen in denselben Ebenen; die Kanten der Grundfläche der einen sind paarweise parallel den Grundkanten der andern und doppelt so lang als diese; die Höhe der ersteren ist dagegen halb so gross als die Höhe der letzteren. Wie gross ist das Volumen des beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Körperstücks, wenn die Grundkante $a$ und die Seitenkante $b$ der ersteren Pyramide gegeben sind?

---

**Aufgabe 525.** Wie gross ist das Volumen einer von zehn gleichschenkligen Dreiecken begrenzten Doppelpyramide, wenn eine Grundkante $a$ und die Entfernung $b$ der beiden Spitzen gegeben ist?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 465.

---

**Aufgabe 526.** Verbindet man den Mittelpunkt einer Seitenfläche eines Würfels, deren Seite gleich $a$ ist, mit den Eckpunkten der ihr parallelen Fläche, so erhält man das Kantennetz einer vierseitigen Pyramide. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche derselben?

**Andeutung.** Die Aufgaben 526 bis 529 sind analog den gelösten Aufgaben 466 bis 468 zu lösen.

---

**Aufgabe 527.** Verbindet man den Mittelpunkt eines Würfels, dessen Kante $= a$ ist, mit den Eckpunkten einer Seitenfläche desselben, so erhält man das Kantennetz einer vierseitigen Pyramide. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche der Pyramide?

**Andeutung.** Der gemeinsame Durchschnittspunkt der vier Körperdiagonalen bildet die Spitze der gedachten Pyramide.

---

**Aufgabe 528.** Wie gross ist die Oberfläche einer Pyramide, welche mit einem quadratischen Prisma die Grundfläche gemeinsam hat und deren Spitze im Mittelpunkt der oberen Grundfläche des Prismas liegt, wenn die Grundkante des Prismas $a = 3{,}4$ m und die Höhe desselben $= 10$ m beträgt?

---

**Aufgabe 529.** Ueber einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $s$ sollen ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide von gleicher Höhe so konstruiert werden, dass eine Seitenfläche des Prismas $p$-mal so gross werde als eine Seitenfläche der Pyramide. Wie gross muss die gemeinschaftliche Höhe sein?

---

**Aufgabe 530.** Bei einer abgekürzten Pyramide mit der Höhe $H$ verhalte sich die Grund- zur Deckfläche wie 36 : 1. Durch die Deckfläche wird eine vollständige Pyramide gelegt, deren Spitze in der Grundfläche des Stumpfs liege. In welchem Verhältnis muss die gemeinschaftliche Höhe durch eine zur Grundfläche parallelen Ebene geteilt werden, damit die Schnittfläche der abgekürzten Pyramide sich zu derjenigen der vollständigen wie 9 : 1 verhalte?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 470.

---

**Aufgabe 531.** Ein Cylinder, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, sei mittels einer geraden Cylinderfläche, welche mit ihr die Axe gemeinsam hat, ausgehöhlt. Der Radius der Grundfläche des ersten Cylinders sei gleich $R$ und die Höhe desselben verhalte sich zum Radius der Grundfläche des zweiten Cylinders wie $m : n$. Wie gross ist die Gesamtoberfläche des ausgehöhlten Körpers?

**Andeutung.** Man berechne aus den gemachten Angaben die Gesamtoberfläche eines Hohlcylinders.

---

**Aufgabe 532.** Drei gerade Cylinder, deren Axen in einer Geraden liegen, stehen aufeinander. Man soll die Gesamtoberfläche des hierdurch gebildeten Körpers berechnen, wenn man weiss, dass die Höhe jedes folgenden Cylinders

**Andeutung.** Man bestimme die Summe der Mantelfläche der drei Cylinder, addiere zu dieser Summe den Inhalt einer Grundfläche des grössten Cylinders, den Inhalt einer Grundfläche des kleinsten Cylinders und die Inhalte zweier dem

doppelt so gross ist als die Höhe des darunter befindlichen Cylinders und dass der Grundflächenradius jedes folgenden Cylinders aber nur $^1/_2$ mal so gross ist als der Radius des darunter befindlichen Cylinders und dass ferner der Axenschnitt des untersten Cylinders ein Quadrat mit der Seite $a$ ist.

Sinne der Aufgabe entsprechenden konzentrischen Kreisringe.

---

**Aufgabe 533.** Der Kubikinhalt eines gleichseitigen Cylinders ist 826,205 cbm. Wie gross ist die Oberfläche einer geraden, dem Cylinder einbeschriebenen Pyramide?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 473.

---

**Aufgabe 534.** Man berechne die Seitenfläche einer geraden, dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche der Grundfläche eines geraden Cylinders mit dem Radius $R$ und der Höhe $H$ einbeschrieben ist und deren Spitze in dem Mittelpunkt der andern Grundfläche des Cylinders liegt.

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 474.

---

**Aufgabe 535.** Das Achsenparallelogramm eines geraden Cylinders ist ein Quadrat mit der Seite $a = 15$ m. Welches sind die Inhalte und die Oberflächen zweier demselben einbeschriebenen geraden Pyramiden, von denen die eine zur Grundfläche ein Quadrat, die andre ein reguläres Dreieck hat?

---

**Aufgabe 536.** Wie gross ist die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide, welche einem geraden Cylinder mit dem Grundflächenradius $R$ und der Höhe $H$ einbeschrieben werden kann?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 475.

---

**Aufgabe 537.** Wie gross ist der Mantel und das Volumen eines geraden Cylinders, den man einem gegebenen Würfel mit der Kante $k$ umbeschrieben denken kann?

---

**Aufgabe 538.** Wie gross ist der Mantel und das Volumen eines geraden Cylinders, den man einem gegebenen Würfel mit der Diagonale $D$ umbeschrieben denken kann?

---

**Aufgabe 539.** Zu einem geraden Cylinder, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist, soll ein quadratisches Prisma von gleicher Oberfläche und Höhe konstruiert werden; wie gross muss die Grundkante des Prismas werden?

---

**Aufgabe 540.** Wie gross ist das Volumen eines Cylinders, welchen man einem geraden dreiseitigen Prisma einbeschreiben kann, dessen Höhe $= H$ ist und dessen drei Grundkanten $a$, $b$ und $c$ sind?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 475 und mit Benutzung der Erkl. 401.

---

**Aufgabe 541.** Aus einem cylindrischen Baumstamm, dessen Länge 10,05 m und dessen Dicke 0,63 m betrage, soll ein Balken geschnitten werden, dessen Breite 0,48 m beträgt. Welches Volumen hat dieser Balken?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 476.

---

**Aufgabe 542.** Ein cylindrischer Baumstamm von Durchmesser 50 cm und von der Länge $= 8{,}7$ m wird quadratisch behauen; wie viel Kubikmeter beträgt der Holzabfall?

**Aufgabe 543.** Ein Brunnenschacht, dessen quadratischer Querschnitt die Seite $a = 1{,}5$ m hat und welcher $L = 12$ m tief ist, soll cylindrisch so ausgemauert werden, dass der innere Durchmesser $d = 90$ cm hat. Wie viel Kubikmeter Mauerwerk sind hiernach aufzuführen?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 476. Vom Kubikinhalt des prismatischen Brunnenschachtes vor der gedachten Ausmauerung ziehe man den Kubikinhalt des cylindrischen Brunnenschachtes nach der gedachten Ausmauerung ab.

**Aufgabe 544.** Einem geraden dreiseitigen Prisma mit den Grundkanten $a = 10$, $b = 12$, $c = 15$ dm und der Höhe $h = 50$ dm sei ein Cylinder umbeschrieben. Wie gross ist die Höhe eines gleichseitigen Kegels, welcher gleiches Volumen mit jenem Cylinder hat?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 475.

**Aufgabe 545.** Die drei aneinanderstossenden Kanten eines geraden Parallelepipedons verhalten sich wie $1:2:3$. In welchem Verhältnis stehen die Volumen der drei geraden Cylinder, welche man um jenes Parallelepipedon konstruiert denken kann.

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 477.

**Aufgabe 546.** In ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Höhe $a = 10$ m ist und dessen Grundfläche 5,2 qm Inhalt hat, ist ein Cylinder beschrieben; wie gross ist das Volumen dieses Cylinders?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 475 und mit Benutzung der in der Erkl. 401 aufgestellten Gleichung d).

**Aufgabe 547.** Von einem geraden Cylinder kennt man das Verhältnis von dessen Höhe und Grundflächenradius, dasselbe sei $m:n = \sqrt{13} : \sqrt{10}$ Wie gross ist das Volumen desjenigen geraden, vierseitigen Prismas, welches man in den Cylinder beschreiben kann und dessen 4 Grundkanten $a$, $b$, $c$ und $d$, bezw. $= 11$, 9, 7 und 3 dm Länge haben?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 475 und mit Benutzung der in der Erkl. 270 aufgestellten Formel, in welcher aber der erste Faktor unter der Wurzel im Zähler nicht $(a \cdot b + b \cdot c)$, sondern $(a \cdot d + b \cdot c)$ heissen muss. Es ist also hiernach:

$$R = \frac{\sqrt{(a \cdot d + b \cdot c)\,(a \cdot b + c \cdot d)\,(a \cdot c + b \cdot d)}}{4\sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}}$$

**Aufgabe 548.** Man soll in einen Würfel einen geraden Cylinder so konstruieren, dass seine Achse mit einer Körperdiagonalachse des Würfels zusammenfällt und dass seine Grundflächen die Würfelflächen berühren. Wie gross ist der Grundflächenradius des Cylinders, wenn dessen Höhe gleich der Hälfte jener Körperdiagonale, nämlich $= \frac{d}{2}$ ist?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 478.

**Aufgabe 549.** Aus einem Kegel von $V = 326$ cbm Inhalt, dessen Höhe zum Grundflächenradius sich wie $p:q = 3:2$ verhält, ist ein ihm ähnlicher Kegel herausgenommen. Wenn die Breite $b$ des in der Grundfläche entstandenen Kreisrings $= 1{,}5$ m misst, wie gross ist alsdann das Volumen des Hohlkegels?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 479.

**Aufgabe 550.** Ein gerader Kegel wird durch die Mantelfläche eines andern geraden Kegels, dessen Achse in der Achse des ersten Kegels liegt

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 480.

und dessen Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche des ersten Kegels zusammenfällt, im Verhältnis von 1 : 3 geteilt, in welchem Verhältnis wird durch den Schnittkreis, nach welchem sich beide Kegelflächen durchschneiden, der Mantel des ersten Kegels geteilt?

---

**Aufgabe 551.** Man soll in einen geraden Kegel einen geraden Cylinder konstruieren, dessen Mantel $= \frac{1}{4}$ des Kegelmantels ist. Welches sind die Dimensionen jenes Cylinders, wenn die Höhe des Kegels $H$ und dessen Seitenlinie $s$ gegeben ist?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 482.

---

**Aufgabe 552.** Ein gerader Kegel sei durch einen geraden Cylinder von halb so grosser Höhe, dessen Achse in der des Kegels liegt, ausgehöhlt. Der Radius der Kegelgrundfläche sei $R = 5$ dm, der des Cylinders $r = 3$ dm, die Seitenlinie $s$ des Kegels $= 15$ dm. Wie gross ist das Volumen und die Gesamtoberfläche des ausgehöhlten Körpers?

**Andeutung.** Im allgemeinen analog der gelösten Aufgabe 482 nur hat man zu beachten, dass der obere Begrenzungskreis des Cylinders die Mantelfläche nicht berührt. Die gesuchte Gesamtoberfläche besteht aus dem Kegelmantel, aus dem Cylindermantel, aus dem Inhalt eines der Begrenzungskreise des Cylinders und aus dem Inhalt eines Kreisrings, dessen Inhalt gleich der Differenz der Inhalte der Kegelgrundfläche und eines Begrenzungskreises des Cylinders ist.

---

**Aufgabe 553.** In welchem Verhältnis steht die Mantelfläche eines geraden Cylinders zu der eines geraden Kegels, welcher auf der nämlichen Grundfläche steht und dessen Spitze im Mittelpunkt des oberen Grundkreises des Cylinders liegt. Wie gross ist ferner die Oberfläche und das Volumen des übrig bleibenden Körpers, wenn man den Kegel aus dem Cylinder herausgenommen denkt? Der Radius des Cylinders sei $R = \frac{1}{2}$ m und das Verhältnis, dessen Höhe zu jenem Radius $= 8 : 3$.

---

**Aufgabe 554.** Auf einem Cylinder von der Höhe $H$ steht ein gerader Kegel, dessen Höhe $n$-mal so gross als jene Höhe ist, so, dass die Grundflächen sich decken. Wie gross ist der Radius des Cylinders, wenn das Volumen des ganzen Körpers $= V$ ist?

---

**Aufgabe 555.** Auf beiden Endflächen eines geraden Cylinders, dessen Höhe $H$ und dessen Grundflächenradius $R$ gegeben ist, sind zwei gerade gleichseitige Kegel, deren Grundflächen den Endflächen des Cylinders gleich sind, befestigt. Wie gross ist die Oberfläche des so gebildeten Körpers?

---

**Aufgabe 556.** Aus einem geraden Cylinder, dessen Höhe $H = n$-mal, bezw. $= 3$-mal so gross ist als dessen Grundflächenradius, sind zwei Kegel so herausgeschnitten, dass deren gemeinsame Spitze in der Mitte der Axe des Cylinders liegt und dass deren Grundflächen mit denen des Cylinders zusammenfallen. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des von dem Cylinder übrig bleibenden Körpers?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 482. In betreff der gesuchten Oberfläche beachte man, dass dieselbe aus dem Inhalt des Cylindermantels und aus den gleichen Inhalten der Mantelflächen der beiden herausgenommenen Kegel besteht.

---

**Aufgabe 557.** Auf jeder der Grundflächen eines geraden Cylinders, dessen Radius $R$ gegeben ist, steht ein Kegel, dessen Spitze der Mittelpunkt der andern Grundfläche ist. Wie gross ist der Inhalt des Kreises, in welchem sich die beiden Kegelmäntel schneiden?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 484.

---

**Aufgabe 558.** Das Volumen einer geraden dreiseitigen Pyramide sei $V$; wie gross ist das Volumen des ihr einbeschriebenen Kegels?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 485.

---

**Aufgabe 559.** Wie gross ist das Volumen eines geraden Kegels, der einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe $H$ und der Seitenkante $k$ umbeschrieben ist?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 486.

---

**Aufgabe 560.** Einem geraden Kegel, dessen Grundflächenradius $R$ und dessen Höhe $H$ gegeben ist, sei eine gerade dreiseitige Pyramide einbeschrieben; wie gross ist das Volumen und die Oberfläche der letzteren?

**Andeutung.** Analog den gelösten Aufg. 485 und 486.

---

**Aufgabe 561.** Man finde die Form eines geraden Kegels, dessen Mantel gleich der doppelten Grundfläche ist. Was kann man von dem Mantel und der Grundfläche einer beliebigen, diesem Kegel umbeschriebenen Pyramide aussagen?

**Andeutung.** Man suche zunächst eine Relation zwischen der Höhe $H$ bezw. zwischen der Seitenlinie $s$ und dem Radius $R$, bezw. dem Durchmesser $D$ der Grundfläche des Kegels. Dann suche man eine Relation zwischen dem Mantel und der Grundfläche, der jenem Kegel umbeschriebenen Pyramide. Mittels beiden Relationen, welche soweit als möglich zu reduzieren sind, kann man die in der Aufgabe gestellte Frage leicht beantworten.

---

**Aufgabe 562.** In ein gerades, achtseitiges Prisma mit regulärer Basis, dessen Höhe $= H$ und dessen Grundkante $= k$ ist, denke man sich einen Kegel so konstruiert, dass dessen Grundfläche einer der Grundflächen des Prismas einbeschrieben ist und dass dessen Spitze im Mittelpunkt der andern Grundflächen des Prismas liegt. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche dieses Kegels?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 486 und mit Benutzung der Erkl. 397.

---

**Aufgabe 563.** In einen geraden Kegelstumpf mit den Grundflächenradien $R$ und $r$ und der Höhe $H$ seien zwei gerade Kegel konstruiert, deren Grundflächen, bezw. die Grund- und Deckfläche des Stumpfs sind und deren Spitzen in den Mittelpunkten der Endflächen des Stumpfs liegen. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des beiden Kegeln gemeinsamen Körperstücks?

**Andeutung.** Diese und die folgenden zwei Aufgaben sind analog den gelösten Aufgaben 488 und 489 zu lösen.

---

**Aufgabe 564.** Ein abgestumpfter, gerader Kegel, dessen Grundflächenradien $R$ und $r$ sind, hat zur Höhe $R + r$; derselbe ist an beiden Grundflächen durch gerade Kegel von denselben Grundflächen ausgehöhlt. Wie gross ist das Volumen des so ausgehöhlten Körpers, wenn die Höhe des einen Kegels $= R$, die des andern $= r$ ist?

---

**Aufgabe 565.** In einem geraden Kegelstumpf verhält sich die untere Grundfläche zur oberen, wie 2 : 1, ferner betrage der Kubikinhalt des Kegels, der die obere Deckfläche des Stumpfs zur Basis hat und dessen Spitze in der Mitte der unteren Grundfläche des Stumpfs liegt um 5 cbm mehr als ein Achtel des Volumens jenes Kegelstumpfs. Wie gross ist das Volumen des Stumpfs?

---

**Aufgabe 566.** Ein Kegel soll parallel der Grundfläche von einer Ebene so durchschnitten werden, dass der aus dem hierdurch entstandenen Kegelstumpf herausgeschnittene Cylinder, dessen obere Grundfläche die Schnittfläche und dessen Höhe gleich der Höhe des Stumpfs ist, so gross als der abgeschnittene Ergänzungskegel sei. In welchem Abstand von der Spitze muss jene Ebene gelegt werden?

**Andeutung.** Diese und die folgende Aufgabe sind analog den gelösten Aufgaben 490 und 493 zu lösen.

---

**Aufgabe 567.** Ein gerader Kegelstumpf, dessen Seitenlinie $= s$, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Deckflächenradius $= r$ ist, sei von einem geraden Cylinder, dessen Radius $= \varrho$ ist, konzentrisch durchbohrt. Welches ist das Volumen des so ausgehöhlten Körpers?

---

**Aufgabe 568.** Aus einem geraden Cylinder, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist, soll ein gerader Kegelstumpf von gleicher Höhe herausgenommen werden. Welches ist das Volumen des übrigbleibenden Körpers, wenn die Grundfläche des Stumpfs gleich einer der Grundflächen des Cylinders und wenn die Deckfläche des Stumpfs $= \frac{1}{3}$ der Grundfläche des Cylinders ist?

---

**Aufgabe 569.** Von einem geraden Cylinder kennt man den Grundflächenradius $R$ und dessen Höhe $H$. Aus diesem Cylinder soll ein gerader Kegelstumpf herausgenommen werden, dessen Grundfläche mit einem Grundkreis des Cylinders zusammenfällt, dessen Höhe gleich der Höhe des Cylinders ist und dessen Volumen gleich der Hälfte des Volumens des Cylinders sei. Wie gross ist der Radius der Deckfläche des Stumpfs?

---

**Aufgabe 570.** Auf einem geraden Kegelstumpf, dessen Grundflächendurchmesser $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist, steht ein gerader Cylinder, dessen Grundfläche zugleich die Deckfläche des Kegelstumpfs und dessen Höhe $= h$ ist. Die krumme Oberfläche des Gesamtkörpers soll vergoldet werden. Wie teuer kommt die Vergoldung, wenn der Quadratcentimeter mit $a$ Pfennig berechnet wird und jene Dimensionen $R$, $H$ und $h$ in Centimeter gegeben sind?

---

**Aufgabe 571.** Auf der kleineren Grundfläche eines abgestumpften, geraden Kegels, deren Radius $= r$ ist, sei ein Cylinder konstruiert, dessen Höhe gleich der Höhe des Kegel-

stumpfs ist. Wie gross ist der Radius der grösseren Grundfläche, wenn das Volumen des Cylinders $\frac{1}{m}$ des Volumens des Kegelstumpfs beträgt?

---

**Aufgabe 572.** Aus einem 4 m hohen Baumstamm von der Gestalt eines geraden Kegelstumpfs, welcher am oberen Ende einen Durchmesser von 4 dm, am unteren einen solchen von 6 dm hat, soll ein cylindrisches Brunnenrohr gehauen und dieses soll in der Mitte so durchbohrt werden, dass das Bohrloch 8 cm Durchmesser erhält. Wie viel Kubikmeter Holz gehen durch das Aushauen und Ausbohren verloren, wenn der äussere Durchmesser des Rohres gleich dem Durchmesser des Stammes an dessen dünnerem Ende ist?

---

**Aufgabe 573.** Um wie viel ist der aus einem geraden Kegelstumpf geschnittene quadratische Pyramidenstumpf kleiner als jener Kegelstumpf, wenn die Radien der Grundkreise desselben $R = 5$ m und $r = 2{,}5$ m sind, die Höhe $H$ des Kegels $= 15$ m misst?

**Andeutung.** Diese und die folgenden zwei Aufgaben sind analog den gelösten Aufgaben 494 und 495 zu lösen.

---

**Aufgabe 574.** Wie gross ist die Differenz der Kubikinhalte zweier Kegelstumpfe, von denen der eine einem geraden, vierseitigen Pyramidenstumpf um-, der andre aber demselben Pyramidenstumpf einbeschrieben ist, wenn das Volumen $V$ des Pyramidenstumpfs gegeben ist?

---

**Aufgabe 575.** Aus einem geraden Kegelstumpf, dessen Grundflächenradien $= R$ und $r$ sind und dessen Höhe $= H$ ist, soll der grösstmögliche quadratische gerade Pyramidenstumpf geschnitten werden. Wie gross ist das Volumen desselben?

---

**Aufgabe 576.** Aus einem Baumstamm von der Form eines geraden Kegelstumpfs, dessen Dimensionen $= R$, $r$ und $H$ sind, soll ein quadratischer Balken gehauen werden, dessen eine Grundfläche ein der Deckfläche des Kegels einbeschriebenes Rechteck mit der Seite $a$ ist. Wie gross ist der Kubikinhalt des Holzabfalls, wenn der Balken mit dem Baumstamm gleiche Länge haben soll?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 496.

---

**Aufgabe 577.** Von zwei gleichen Kugeln, deren Radien je $= r$ sind, liegt der Mittelpunkt der einen auf der Oberfläche der andern. Wie gross ist das Volumen des beiden Kugeln gemeinsamen Körperstücks?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 497.

---

**Aufgabe 578.** Der zwischen zwei sich von innen berührende Kugelflächen befindliche Raum betrage $V = 1000$ cbm. Wie gross sind die Radien beider Kugeln, wenn die Centrallinie $a$ derselben $= 2{,}5$ m beträgt?

**Andeutung.** Die anzusetzende Bestimmungsgleichung besteht darin, dass die Differenz der Volumen beider Kugeln gleich dem gegebenen Volumen $V$ ist.

**Aufgabe 579.** Vier gleiche Kugeln, von denen jede die drei andern berührt und von welchen jede den Radius $r$ hat, werden sämtlich von einer fünften Kugelfläche berührt. Wie gross ist das Volumen dieser fünften Kugel?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 499.

---

**Aufgabe 580.** Die Begrenzungsflächen eines Körpers seien zwei gleiche Calotten, von welchen jede einer Kugelfläche angehört, deren Mittelpunkt auf der andern Kugelfläche liegt. Wie gross ist das Volumen jenes Körpers, wenn dessen Oberfläche = 100 qcm beträgt?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufgabe 497 und mit Benutzung der in der Erkl. 63 aufgestellten Formel.

---

**Aufgabe 581.** Welches Volumen und welche Oberfläche hat eine Hohlkugel von 25 cm Wandstärke, wenn ihre innere lichte Weite 5,02 m misst?

**Andeutung.** Mit Benutzung der in der Erklärung 70 aufgestellten Formel und in Rücksicht, dass die Wandstärke gleich der Differenz der beiden Kugelradien ist.

---

**Aufgabe 582.** Vier gleich grosse Kugeln, deren Radien $= r$ sind, berühren sich sämtlich gegenseitig. Diese vier Kugeln werden von der Mantelfläche eines abgestumpften Kegels berührt, dessen Grundfläche drei der Kugeln und dessen Deckfläche die vierte Kugel berührt. Wie gross ist die Oberfläche dieses Kegelstumpfs?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 501.

---

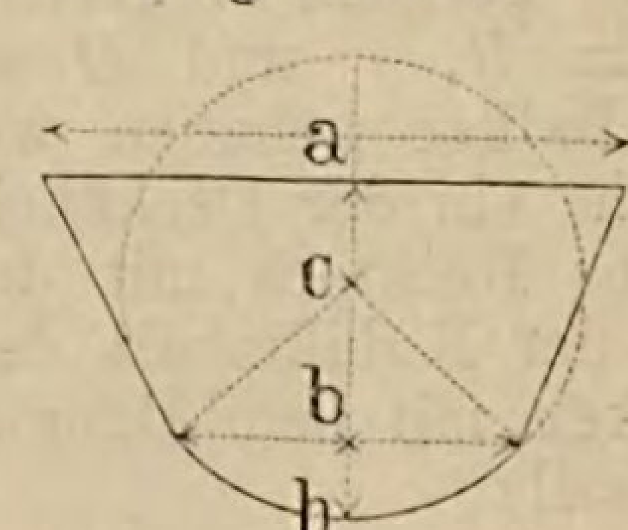
**Aufgabe 583.** Aus einem geraden Kegelstumpf, dessen Grundflächenradius $= R$ ist, sei eine Halbkugel so herausgeschnitten, dass deren Grundfläche die Deckfläche des Stumpfs bildet und dass dieselbe jene Grundfläche des Stumpfs berührt. Wie gross ist der Kubikinhalt des übrig bleibenden Körpers, wenn das Volumen der Halbkugel zu dem Volumen des Kegelstumpfs sich wie $m : n$ verhalten soll?

---

**Aufgabe 584.** Ein Kessel ist aus einem geraden Kegelstumpf, dessen obere und untere lichte Weite bezw. $a = 40$ und $b = 25$ dm und dessen Tiefe $c = 9$ dm misst, und aus einem Kugelabschnitt, dessen Höhe $h = 5$ dm ist, zusammengesetzt. Wie viel Liter enthält derselbe und wie viel Quadratdecimeter beträgt seine Oberfläche?

**Andeutung.** Man beachte, dass 1 cdm = 1 Lit. ist. Das Uebrige ist aus der Figur ersichtlich.

Figur 160.




---

**Aufgabe 585.** Der hohle Raum eines kupfernen Kessels habe die Form eines geraden Kegelstumpfs, auf dessen kleinerer Grundfläche ein Kugelsegment aufgesetzt ist. Die obere lichte Weite sei 2,2 m, die untere 1,8 m, die schiefe Seite des gedachten Kegelstumpfs messe 1,8 m und die Höhe des Kugelabschnitts betrage 0,4 m. Welchen Wert hat der kupferne Kessel, wenn 1 qm des Kupferblechs 21 Mark kostet?

---

**Aufgabe 586.** Wie gross ist der Inhalt einer Kugel, aus der sich ein Kegel von $a =$ 432,8 cbm Inhalt herausschneiden lässt, dessen

**Andeutung.** Die Aufgaben 586 bis 602 sind analog den gelösten Aufgaben 502 bis 513 zu lösen.

Gipfel im Mittelpunkt der Kugel liegt und dessen Grundkreis gleich der Hälfte des grössten Kugelkreises ist?

**Aufgabe 587.** Von einer Kugel ist der Radius $R$ gegeben, aus derselben soll ein gerades, kegelförmiges Loch so gebohrt werden, dass dessen Axe durch den Mittelpunkt der Kugel geht, seine Spitze in der Oberfläche der Kugelfläche liegt und die Grundfläche des Bohrlochs einen Radius $= {}^2/_3 R$ hat. In welchem Verhältnis steht das Volumen der ausgebohrten Masse zu dem Volumen der ganzen Kugel?

**Aufgabe 588.** Die Calotte eines Kugelsegments ist doppelt so gross als der Mantel des in demselben beschriebenen geraden Kegels. In welchem Verhältnis steht die Höhe des Segments zum Durchmesser der Kugel?

**Aufgabe 589.** In einem Kugelsegment verhält sich der Radius des Grundkreises zum Kugelradius wie $m:n$. In welchem Verhältnis steht die Calotte, welche zu jenem Kugelsegment gehört, zu dem Mantel des in das Kugelsegment einbeschriebenen geraden Kegels?

**Aufgabe 590.** Auf einer Kugel vom Radius $R = 10$ dm befindet sich ein kleiner Kugelkreis, dessen Umfang $12\,\pi$ ist. Die Pole dieses Kreises seien die Spitzen zweier über diesem Kreis als gemeinschaftliche Basis konstruierten Kegel. Wie gross ist die Summe der Kubikinhalte beider Kegel und welches ist das Verhältnis ihrer Inhalte zu dem Inhalte der Kugel?

**Aufgabe 591.** Durch eine Kugel sei eine Ebene gelegt, welche den zu ihr senkrechten Radius im Verhältnis von $m:n = 1:2$ teilt. Auf der Durchschnittsfläche sind zwei gerade Kegel errichtet, deren Spitzen in der Kugelfläche liegen. In welchem Verhältnis steht das Volumen des entstandenen Doppelkegels zum Volumen der Kugel?

**Aufgabe 592.** Wenn ein gerader Doppelkegel zur gemeinsamen Grundfläche seiner beiden Hälften den grössten Kreis einer Kugel und mit dieser gleichen Rauminhalt hat, wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper? Wenn aber beide gleiche Oberflächen haben, wie verhalten sich dann die Rauminhalte?

**Aufgabe 593.** Wie tief fällt eine Kugel in einen auf der Spitze stehenden hohlen geraden Kegel, dessen Grundkreis der Oberfläche der Kugel gleich, und dessen Rauminhalt $a = 9$ mal so gross als der des Kugelraums ist? Die Tiefe ist durch den Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Grundfläche des Kegels in Teilen der Kegelaxe zu bestimmen.

**Aufgabe 594.** Von vier gleichen Kugeln berührt jede Kugel die beiden ihr zunächst liegenden, so dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat

**Andeutung.** Analog den gelösten Aufgaben 498, 499 und 501.

bilden. Wie gross ist der Radius einer dieser Kugeln, wenn dieselben von der Grundfläche und dem Mantel eines geraden Kegels berührt werden, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist?

---

**Aufgabe 595.** Ein auf der Spitze stehender gerader Hohlkegel, dessen Radius $R = 3$ cm und dessen Höhe $H = 8$ cm ist, sei bis zur Höhe $a = 6$ cm mit Wasser gefüllt. Es werde eine Kugel vom Radius $\varrho = 1^1/_2$ cm hineingeworfen, welche ganz untergeht. Wie hoch ist dann das Niveau des Wassers?

---

**Aufgabe 596.** Der Radius $r$ einer Kugel ist über die Oberfläche hinaus um ein ihm gleiches Stück verlängert. Vom Endpunkte der Verlängerung ist der Berührungskegel an die Kugel gelegt und der zu dem Berührungskreis gehörige Kugelausschnitt konstruiert. Wie gross ist 1). der Inhalt und die Oberfläche des dadurch entstandenen Doppelkegels und 2). wie gross ist der Inhalt und die Oberfläche des in ihm liegenden Kugelabschnitts?

---

**Aufgabe 597.** Eine Kegelfläche berührt zwei ganz auseinander liegende Kugeln, deren Radien $R$ und $r$ und deren Centrallinie $= c$ ist. Welches Volumen hat der zwischen der Kegelfläche und den beiden Kugeln befindliche Raum?

---

**Aufgabe 598.** Eine Kegelfläche berührt zwei sich berührende Kugeln, deren Radien $R$ und $r$ sind. Welches Volumen hat der zwischen der Kegelfläche und den beiden Kugeln liegende Raum?

---

**Aufgabe 599.** Wie gross ist der Mantel und das Volumen eines Kegels, welcher zweien Kugeln, deren Radien $= R$ und $r$ sind und deren Centrallinie $= a$ ist, umbeschrieben ist, wenn dessen Grundfläche auf jener Centrallinie senkrecht steht und die grössere Kugel berührt?

---

**Aufgabe 600.** Einer Kugel mit dem Radius $r$ sei ein gerader Kegel einbeschrieben, dessen Höhe gleich dem Radius seiner Grundfläche ist. In diesen Kegel sei eine den Mantel und die Grundfläche desselben berührende Kugel beschrieben. Wie gross ist der Radius einer dritten Kugel, welche die erste von innen und die zweite, sowie die Mantelfläche des Kegels von aussen berührt?

---

**Aufgabe 601.** Ueber einem Kreis ist eine Halbkugel und ein gerader Kegel konstruiert. Die Höhe des Kegels ist 3 mal so gross als der Radius jenes Kreises. Wie gross ist der Radius des Schnittkreises zwischen der Halbkugel und dem Kegelmantel, und wie gross ist dessen Abstand von der Grundfläche?

---

**Aufgabe 602.** Eine Halbkugel und ein gerader Kegel haben denselben Kreis zur Grundfläche und die Höhe des Kegels sei doppelt so gross als der Radius der Halbkugel. In welchem Verhältnis wird die krumme Oberfläche der letzteren durch die Kegelfläche geteilt?

---

**Aufgabe 603.** Aus einem gleichseitigen Cylinder sei eine Halbkugel von derselben Grundfläche herausgeschnitten. Welches ist das Volumen und die Oberfläche des übriggebliebenen Körpers?

**Andeutung.** Die Aufgaben 603 bis 612 sind analog den gelösten Aufgaben 514 bis 518 zu lösen.

**Aufgabe 604.** Auf den beiden Grundflächen eines geraden Cylinders, dessen Axenschnitt ein Rechteck mit der Diagonale $D$ und dem Umfang $U$ ist, liegen Halbkugeln, welche diese Grundflächen zu grössten Kreisen haben. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des so gebildeten Körpers?

**Aufgabe 605.** Ein Turmknopf ist in der Mitte cylinderförmig und hat oben und unten halbkugelförmige Abrundungen. Sein Durchmesser beträgt von oben nach unten $a = 18$ cm und quer durch die Mitte $b = 10$ cm; er ist $c = \frac{1}{4}$ cm dick gearbeitet. Wie viel Gold ist zur Vergoldung seiner Oberfläche erforderlich und wie viel beträgt sein innerer hohler Raum?

**Aufgabe 606.** Auf der Grundfläche eines hohlen Cylinders von $2r$ innerem Durchmesser liegen 7 gleiche Kugeln ohne Spielraum. Wie gross ist der Kubikinhalt einer solchen?

**Aufgabe 607.** Eine Kugel soll durch eine gerade Cylinderfläche durchbohrt werden, deren Achse ein Durchmesser der Kugel u. deren Grundflächendurchmesser gleich dem Radius der Kugel ist. In welchem Verhältnis steht das Volumen der Kugel zu dem der ausgebohrten Masse?

**Aufgabe 608.** Aus einer Kugel, deren Radius $r$ ist, soll ein cylindrischer Kern herausgedreht werden, dessen Achsenschnitt ein einem grössten Kreis der Kugel einbeschriebenes Quadrat ist. Welches ist das Volumen des herausgedrehten Kerns?

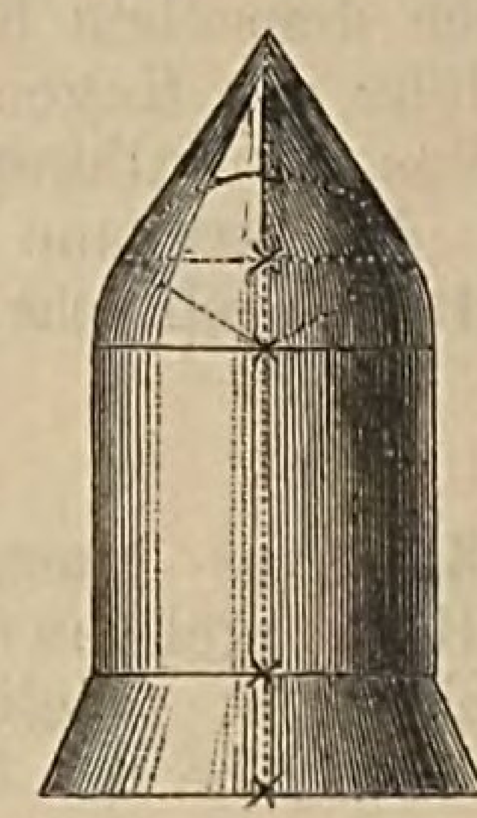
**Aufgabe 609.** Aus einer Kugel ist ein cylinderförmiger Kern herausgebohrt, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Wie gross ist das Volumen des Rings, der von der Kugel übrig geblieben ist, wenn derselbe die Höhe $h$ hat?

**Aufgabe 610.** Einer Halbkugel mit dem Radius $r$ ist ein gleichseitiger Cylinder einbeschrieben. Wie gross ist der Inhalt des nicht gemeinschaftlichen Stücks beider Körper?

---

**Aufgabe 611.** Ein Meilenstein hat zur Basis einen abgestumpften Kegel mit einem unteren Radius von $r = 15$ cm, einem oberen Radius $\varrho = 10$ cm und einer Höhe $h = 6$ cm. Auf der oberen Grundfläche ruht ein Cylinder, dessen Höhe dem Durchmesser dieser Grundfläche gleich ist; auf diesem ruht ein Teil einer Halbkugel mit derselben Grundfläche, die aber in der halben Höhe in einen geraden Kegel ausläuft, dessen Fläche die Kugel im Zusammentreffungskreise berührt. Wie gross ist der Rauminhalt des Steins?

Figur 161.



**Aufgabe 612.** Die Seite $x$ eines gleichseitigen Cylinders ist durch die Gleichung $\sqrt{2x+2+\sqrt{7+6x}} = \sqrt{7x+72}$ gegeben. Man konstruiere in diesen Cylinder einen Kegel und eine Kugel, bestimme die Oberflächen und die Kubikinhalte dieser Körper, ebenso das Verhältnis der Oberflächen und das Verhältnis der Volumen jener drei Körper.

**Aufgabe 613.** Eine Kugel mit dem Radius $r$ ist in dem Abstande $^1/_4 r$ vom Mittelpunkte durch eine Ebene durchschnitten; in dieser Ebene ist ein Quadrat konstruiert, auf welchem in beiden Kugelabschnitten eine regelmässige Pyramide steht, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Wie gross sind Inhalt und Oberfläche dieser Doppelpyramide und wie gross ist der Radius der dieser Doppelpyramide einbeschriebenen Kugel?

**Andeutung.** Die Aufgaben 613 bis 616 sind analog den gelösten Aufgaben 519 und 520 zu lösen.

**Aufgabe 614.** Eine Kugel mit dem Radius $r$ sei in der Entfernung $^1/_2 r$ vom Mittelpunkt durch eine Ebene geschnitten, der Schnittfigur sei ein regul. 6-Eck einbeschrieben und über letztere sei in dem grösseren Kugelabschnitt eine gerade Pyramide konstruiert, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Man berechne das Volumen der Pyramide?

**Aufgabe 615.** Um den Grundkreis einer Halbkugel mit dem Radius $r$ sei ein reguläres Viereck beschrieben und an den Eckpunkten desselben seine Tangenten an die Kugel gelegt, die sich in der Axe des Grundkreises schneiden. Diese Tangenten bilden die Seitenkanten einer 4-seitigen Pyramide. Wie gross ist der Teil der Halbkugel, welcher innerhalb dieser Pyramide liegt, und wie gross ist die Summe der Räume zwischen der Halbkugel und der Oberfläche der Pyramide?

**Aufgabe 616.** In einen Würfel, dessen Kante $= k$ ist, sollen zwei Kugeln konstruiert werden, welche sich und je drei der Würfelflächen berühren. Wie gross sind die Radien jener Kugeln, wenn sich dieselben wie $m:n = 8:9$ verhalten?

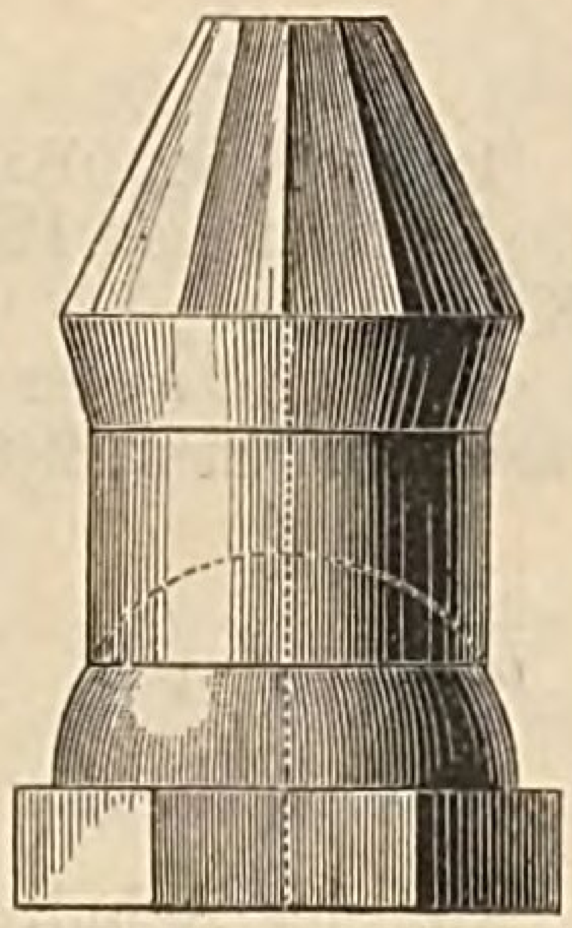
**Andeutung.** Die Aufgaben 616 bis 618 sind analog der gelösten Aufgabe 521 zu lösen.

**Aufgabe 617.** Von acht gleichen Kugeln, deren Mittelpunkte die Eckpunkte eines Würfels

bilden, berühre jede die drei übrigen. Die acht Kugeln werden von einer andern Kugel umschliessend berührt. Diese letztere Kugel sei durch eine solche konzentrische Kugelfläche ausgehöhlt, welche zwischen den acht ersteren, dieselben sämtlich von aussen berührend, liegt. Wie verhält sich das Volumen der Hohlkugel zu der Summe der Volumen der acht gleichen Kugeln?

**Aufgabe 618.** Auf einem prismatischen Unterbau mit regulärer, sechsseitiger Grundfläche ruht zunächst eine körperliche Kugelzone, welche dadurch entstanden gedacht werden kann, dass über dem der oberen Grundfläche des Prismas einbeschriebenen Kreis eine Halbkugel von demselben Radius konstruiert und die letztere parallel zu ihrer Grundfläche so durchschnitten sei, dass die Höhe der Zone gleich der Höhe des Prismas geworden ist. Auf der oberen Endfläche dieser Zone steht ferner ein gerader Cylinder, dessen Höhe $n$-mal so gross sei als die Höhe des Prismas; auf diesem Cylinder folge ein abgestumpfter, gerader Kegel, dessen nach unten gerichtete kleinere Grundfläche die obere Endfläche des Cylinders, dessen grössere Grundfläche gleich dem grössten Kreise der vorher erwähnten Kugelzone, und dessen Höhe gleich der Höhe dieser Zone sei. Endlich sei der oberen, grösseren Grundfläche dieses Kegels ein reguläres Zwölfeck einbeschrieben, und über letzterem als Grundfläche eine abgestumpfte gerade Pyramide konstruiert, deren Höhe $m$-mal so gross als die Höhe des prismatischen Unterbaues ist und deren obere Endfläche den Flächeninhalt $f$ hat. Die Grundkante des Prismas sei $= a$, die Höhe desselben $= h$. Man berechne die Oberfläche und das Volumen des gesamten Körpers.

Figur 162.



Grundriss.



# IX.

# Aufgaben über die konvexen, regulären Polyeder in gegenseitiger Verbindung und in Verbindung mit den fünf einfachen geometrischen Körpern.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 619.** Um ein reguläres Tetraeder, dessen Kante $= k$ sei, ist ein Kegel konstruiert. Wie gross ist der Inhalt der Schnittfigur, welche man erhält, wenn man parallel zur Grundfläche des Kegels eine Ebene so legt, dass der Mantel des erhaltenen Kegelstumpfs gleich der Oberfläche des Tetraeders ist?

**Formeln:**

Für ein Tetraeder:

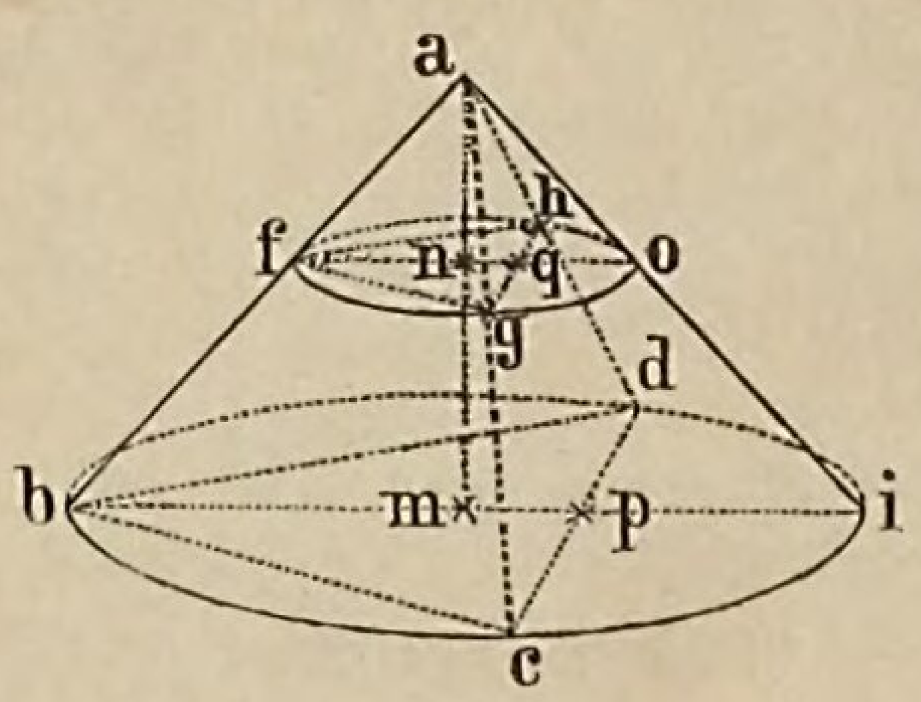
I. . . . $0 = k^2 \sqrt{3}$ (s. Erkl. 353)

Für ein Kegelstumpf:

II. . . . $M = \pi s (R + r)$ (s. Erkl. 56).

**Auflösung.** In Figur 163 stelle $abcd$ das Tetraeder und $abcid$ den demselben umbeschriebenen Kegel dar.

Figur 163.




**Erkl. 504.** In der Fig. 163 stellt $\overline{bm}$ den Radius des dem gleichseitigen Dreieck $bcd$ umbeschriebenen Kreises dar. Da die Seite dieses Dreiecks gleich der Kante $k$ des Tetraeders ist, so hat man nach der Erkl. 240 für den Radius $\overline{bm}$:

$$\overline{bm} = \frac{k}{3}\sqrt{3}$$

**Erkl. 505.** Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $amb$ und $anf$ in der Figur 163 ergibt sich die Proportion:

$$\overline{bm} : \overline{fn} = \overline{ba} : \overline{fa}$$

Setzt man in derselben:

$$\overline{bm} = \frac{k}{3}\sqrt{3} \text{ (s. Erkl. 504)}$$

$$\overline{ba} = k$$

$$\overline{fa} = \overline{ba} - \overline{bf} = k - \overline{bf}$$

so erhält man hiernach:

$$\frac{k}{3}\sqrt{3} : \overline{fn} = k : (k - \overline{bf})$$

oder

$$\frac{k^2}{3}\sqrt{3} - \frac{k}{3}\sqrt{3}\cdot\overline{bf} = k\cdot\overline{fn}$$

$$\frac{k}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\overline{bf} = \overline{fn}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\overline{bf} = \frac{k}{3}\sqrt{3} - \overline{fn}$$

$$\overline{bf} = \left(\frac{k}{3}\sqrt{3} - \overline{fn}\right) : \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\overline{bf} = k - \frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\overline{fn} = k - \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}\cdot\overline{fn}$$

mithin

$$\overline{bf} = k - \overline{fn}\cdot\sqrt{3}$$

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts $x$ des Schnittkreises $fgoh$ besteht nach der Erkl. 57 die Relation:

$$1) \ldots x = \overline{fn}^2 \cdot \pi$$

Den unbekannten Radius $\overline{fn}$ findet man auf folgende Weise:

Unter Benutzung der vorstehenden Formeln I und II besteht der Aufgabe gemäss zwischen der Oberfläche des Tetraeders und dem Mantel des erhaltenen Kegelstumpfs die Relation:

$$\pi\cdot\overline{bf}\cdot(\overline{bm} + \overline{fn}) = k^2\cdot\sqrt{3}$$

Setzt man in derselben nach der Erkl. 504:

$$\overline{bm} = \frac{k}{3}\sqrt{3}$$

und nach der Erkl. 505:

$$\overline{bf} = k - \overline{fn}\cdot\sqrt{3}$$

so erhält man hiernach für $\overline{fn}$ die Bestimmungsgleichung:

$$2)\ \pi\cdot(k - \overline{fn}\cdot\sqrt{3})\cdot\left(\frac{k}{3}\sqrt{3} + \overline{fn}\right) = k^2\cdot\sqrt{3}$$

Aus dieser Gleichung erhält man $\overline{fn}^2$ wie folgt:

$$\frac{k^2}{3}\sqrt{3} - k\cdot\overline{fn} + k\cdot\overline{fn} - \sqrt{3}\cdot\overline{fn}^2 = \frac{k^2}{\pi}\sqrt{3}$$

$$\frac{k^2}{3}\sqrt{3} - \frac{k^2}{\pi}\sqrt{3} = \overline{fn}^2$$

$$\overline{fn}^2 = \frac{k^2}{3} - \frac{k^2}{\pi}$$

$$\overline{fn}^2 = k^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\right) = k^2\cdot\frac{\pi - 3}{3\pi}$$

oder

$$3) \ldots \overline{fn}^2 = \frac{k^2}{3\pi}(\pi - 3)$$

Aus den Gleichungen 1) und 3) erhält man für den gesuchten Inhalt $x$:

$$x = \frac{k^2}{3\pi}(\pi - 3)\cdot\pi$$

oder

$$A) \ldots x = \frac{k^2}{3}\cdot(\pi - 3)$$

---

**Aufgabe 620.** In welchem Abstand von der Spitze muss man ein reguläres Tetraeder mit der Kante $k$, parallel zur Grundfläche durchschneiden, damit die in dem oberen Teil konstruierte Berührungskugel mit dem Kegelstumpf gleiches

**Formeln:**

Für ein Kegelstumpf:

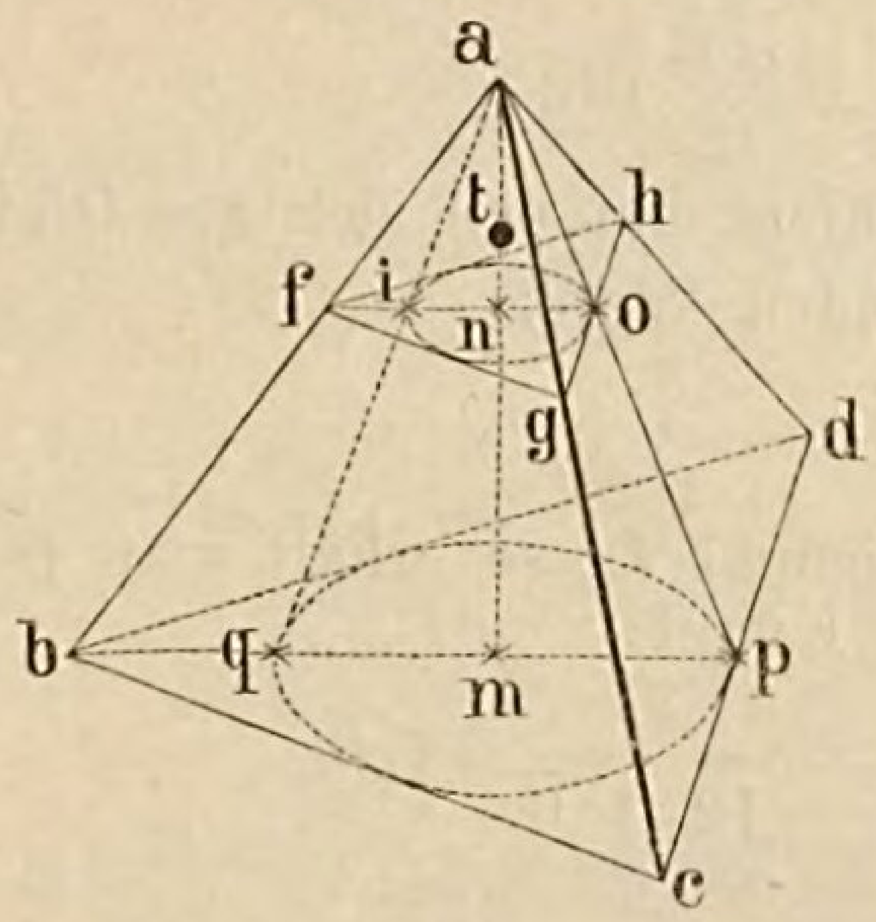
$$I.\ .\ V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \text{ (s. Erkl. 53)}$$

Für eine Kugel:

$$II.\ .\ V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (s. Erkl. 67)}$$

Volumen hat, welchen man sich in dem andern Teil des Tetraeders so konstruiert denken kann, dass sein Mantel die Seitenflächen berührt?

Figur 164.




**Erkl. 506.** Bezeichnet man die Seite eines gleichseitigen (regulären) Dreiecks mit $S_3$, den Radius des demselben einbeschriebenen Kreises mit $r_3$, so besteht die Relation:

$$r_3 = \frac{S_3}{6}\sqrt{3}$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der planimetrischen Figuren handelt.)

Vorstehende Relation ergibt sich auch aus den Erkl. 310, 25 und 266.

**Erkl. 507.** Nebenstehende Proportion:

$$\overline{on} : \frac{k}{6}\sqrt{3} = x : \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

nach $\overline{on}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\overline{on}\cdot\frac{k}{3}\sqrt{6} = x\cdot\frac{k}{6}\sqrt{3}$$

$$\overline{on}\cdot\sqrt{6} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$$

$$\overline{on} = \frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{3}{6}} = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{\frac{2}{4}}$$

oder

$$\overline{on} = \frac{x}{4}\sqrt{2}$$

**Erkl. 508.** Nebenstehende Gleichung 3) nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$4\left(\frac{x}{4}\right)^3 = \left(\frac{k}{3}\sqrt{6} - x\right)\cdot\left(\frac{k^2\cdot 3}{36} + \frac{k\cdot\sqrt{6}}{24}\cdot x + \frac{x^2\cdot 2}{16}\right)$$

$$4\cdot\frac{x^3}{4^3} = \left(\frac{k}{3}\sqrt{6} - x\right)\cdot\left(\frac{k^2}{12} + \frac{k\sqrt{6}}{24}\cdot x + \frac{x^2}{8}\right)$$

$$\frac{x^3}{16} = \frac{k^3\cdot\sqrt{6}}{36} - \frac{k^2}{12}\cdot x + \frac{k^2\cdot(\sqrt{6})^2}{72}\cdot x - \frac{k\sqrt{6}}{24}\cdot x^2 + \frac{k\sqrt{6}}{24}\cdot x^2 - \frac{x^3}{8}$$

Für ein Tetraeder:

$$\left.\begin{aligned} \text{III.} \ldots r &= \frac{k}{12}\sqrt{6} \\ \text{IV.} \ldots H &= \frac{k}{3}\sqrt{6} \end{aligned}\right\} \text{(s. Erkl. 353)}$$

**Auflösung.** In Figur 164 stelle $abcd$ das Tetraeder, $fgh$ die gedachte Schnittebene, $iopq$ den Kegelstumpf und $t$ den Mittelpunkt der in dem oberen Abschnitt konstruiert zu denkenden Kugel dar.

Zur Berechnung des gesuchten Abschnitts $an = x$ dient die in der Aufgabe enthaltene Bedingung, dass das Volumen des Kegelstumpfs $iopq$ gleich dem Volumen jener gedachten Kugel um $t$ sein soll.

Das Volumen des Kegelstumpfs kann man wie folgt in die gegebenen und gesuchten Dimensionen ausdrücken:

Für die Höhe $\overline{mn}$ hat man:

$$\overline{mn} = \overline{am} - \overline{an}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \overline{mn} = \frac{k}{3}\sqrt{6} - x \quad \text{(s. Erkl. 353)}$$

Für den Radius $pm$ des Grundkreises hat man:

$$\text{b)} \ldots \overline{pm} = \frac{k}{6}\sqrt{3}$$

Für den Radius $\overline{on}$ des Deckkreises hat man:

$$\overline{on} : \overline{pm} = \overline{an} : \overline{am}$$

oder

$$\overline{on} : \frac{k}{6}\sqrt{3} = x : \frac{k}{3}\sqrt{6} \quad \text{(s. vorst. Relationen und die Erkl. 353)}$$

mithin:

$$\text{c)} \ldots \overline{on} = \frac{x}{4}\sqrt{2}$$

Nach vorstehender Formel I erhält man also für das Volumen $V$ des Kegelstumpfs:

$$\text{1)} \ldots V = \frac{\pi\left(\frac{k}{3}\sqrt{6} - x\right)}{3}\cdot\left[\left(\frac{k}{6}\sqrt{3}\right)^2 + \frac{k}{6}\sqrt{3}\cdot\frac{x}{4}\sqrt{2} + \left(\frac{x}{4}\sqrt{2}\right)^2\right]$$

Das Volumen der gedachten Kugel um $t$ kann man wie folgt in die gesuchte Strecke $x$ ausdrücken:

Die Pyramide $afgh$ ist ebenfalls ein reguläres Tetraeder. Zwischen der Höhe $\overline{an} = x$ und der Kante $\overline{af}$ desselben besteht nach vorstehender Formel IV die Relation:

$$\frac{x^3}{4}=\frac{k^3\sqrt{6}}{9}-\frac{k^2}{3}\cdot x+\frac{k^2}{3}\cdot x-\frac{x^3}{2}$$

$$\frac{x^3}{4}=\frac{k^3\sqrt{6}}{9}-\frac{x^3}{2}$$

$$\frac{x^3}{4}+\frac{x^3}{2}=\frac{k^3\sqrt{6}}{9}$$

$$\frac{3}{4}x^3=\frac{k^3\cdot\sqrt{6}}{9}$$

$$x^3=\frac{4k^3\sqrt{6}}{27}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{4k^3\sqrt{6}}{27}}$$

oder

$$x=\frac{k}{3}\sqrt[3]{4\sqrt{6}}$$

d) ... $x=\frac{\overline{af}}{3}\sqrt{6}$

Ferner besteht zwischen dem Radius $r$ der diesem regulären Tetraeder einbeschrieben gedachten Kugel und der Kante $\overline{af}$ nach vorstehender Formel III die Relation:

f) ... $r=\frac{\overline{af}}{12}\sqrt{6}$

Substituiert man den sich aus Gleich. d) für $\overline{af}$ ergebenden Wert:

g) ... $\overline{af}=\frac{3x}{\sqrt{6}}$

in die Gleichung f), so erhält man für den Radius $r$ der Kugel:

$$r=\frac{3x}{12\cdot\sqrt{6}}\cdot\sqrt{6}$$

oder

h) ... $r=\frac{x}{4}$

Nach vorstehender Formel II erhält man also für das Volumen $V_1$ der Kugel:

2) ... $V_1=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{4}\right)^3$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man gemäss der Aufgabe für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$3)\ \ldots\ \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{4}\right)^3=\frac{\pi\left(\frac{k}{3}\sqrt{6}-x\right)}{3}\cdot\left[\left(\frac{k}{6}\sqrt{3}\right)^2+\frac{k}{6}\sqrt{3}\cdot\frac{x}{4}\sqrt{2}+\left(\frac{x}{4}\sqrt{2}\right)^2\right]$$

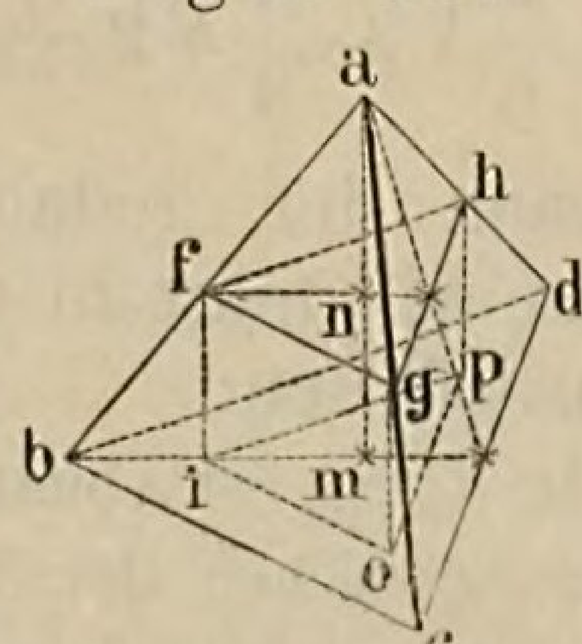
und hieraus erhält man nach der Erkl. 508 für den gesuchten Abstand $x$:

A) ... $x=\frac{k}{3}\sqrt[3]{4\sqrt{6}}$

---

**Aufgabe 621.** In einem regulären Tetraeder, dessen Kante $=k$ ist, stehe ein gerades, dreiseitiges Prisma mit lauter gleichen Kanten so, dass seine obere Grundfläche eine Durchschnittsfigur des Tetraeders bildet. Wie gross ist das Volumen dieses Prismas?

Figur 165.




**Formeln:**

Für ein Prisma:

I. ... $V=G\cdot H$ (s. Erkl. 1)

Für ein Tetraeder:

II. ... $H=\frac{k}{3}\sqrt{6}$ (s. Erkl. 353).

**Auflösung.** Bezeichnet man eine Kante des gedachten Prismas mit $y$, so ist dessen Grundfläche nach der Erkl. 268 $=\frac{y^2}{4}\sqrt{3}$ und man hat nach vorstehender Formel für das gesuchte Volumen $y$ des Prismas:

$$x=\frac{y^2}{4}\sqrt{3}\cdot y$$

**Erkl. 509.** Nebenstehende Gleichung 2) nach $y$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{k^2}{3}\sqrt{6} - k \cdot y = \frac{k}{3}\sqrt{6} \cdot y$$

$$\frac{k}{3}\sqrt{6} - y = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot y$$

$$\frac{k}{3}\sqrt{6} = y\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right)$$

$$y \cdot \frac{\sqrt{6}+3}{3} = \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

$$y(\sqrt{6}+3) = k\sqrt{6}$$

$$y = k \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3}$$

$$y = k \cdot \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}-3)}{(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-3)}$$

$$y = k \cdot \frac{6-3\sqrt{6}}{6-9}$$

$$y = k \cdot \frac{-3(-2+\sqrt{6})}{-3}$$

oder

$$y = k \cdot (\sqrt{6} - 2)$$

**Erkl. 510.** Nebenstehende Gleichung 4) nach $x$ aufgelöst, bezw. reduziert, gibt:

$$x = \frac{k^3(\sqrt{6}-2)^3}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$x = k^3 \cdot \frac{[(\sqrt{6})^3 - 3(\sqrt{6})^2 \cdot 2 + 3\sqrt{6} \cdot 2^2 - 2^3]}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$x = k^3 \cdot \frac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot 6 \cdot 2 + 12\sqrt{6} - 8}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$x = k^3 \cdot \frac{6\sqrt{6} - 36 + 12\sqrt{6} - 8}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$x = k^3 \cdot \frac{18\sqrt{6} - 44}{4} \sqrt{3}$$

$$x = k^3 \cdot \frac{9\sqrt{6} - 22}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$x = \frac{k^3}{2} \cdot (9\sqrt{18} - 22\sqrt{3})$$

$$x = \frac{k^3}{2}(9\sqrt{9 \cdot 2} - 22\sqrt{3})$$

$$x = \frac{k^3}{2}(27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})$$

oder

1) . . . $x = \frac{y^3}{4}\sqrt{3}$

Zur Bestimmung der Kante $y$ verfahre man wie folgt:

Stellt, siehe Figur 165, $abcd$ das Tetraeder und $fghpio$ das Prisma dar, so ergibt sich nach der Erkl. 195 die Relation:

a) . . . $\triangle bcd : \triangle fgh = \overline{ma}^2 : \overline{na}^2$

Setzt man in derselben:

$$\left.\begin{aligned}\triangle bcd &= \frac{k^2}{4}\sqrt{3} \\ \triangle fgh &= \frac{y^2}{4}\sqrt{3}\end{aligned}\right\} \text{(s. Erkl. 268)}$$

$$\overline{ma} = \frac{k}{3}\sqrt{6} \quad \text{(s. vorsteh. Formel II)}$$

und

$$\overline{na} = \overline{ma} - \overline{mn} = \frac{k}{3}\sqrt{6} - y$$

so erhält man für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{k^2}{4}\sqrt{3} : \frac{y^2}{4}\sqrt{3} = \left(\frac{k}{3}\sqrt{6}\right)^2 : \left(\frac{k}{3}\sqrt{6} - y\right)^2$$

oder

$$k^2 : y^2 = \left(\frac{k}{3}\sqrt{6}\right)^2 : \left(\frac{k}{3}\sqrt{6} - y\right)^2$$

oder

2) . . . $k : y = \frac{k}{3}\sqrt{6} : \left(\frac{k}{3}\sqrt{6} - y\right)$

aus welcher Gleichung man nach der Erkl. 509:

3) . . . $y = k \cdot (\sqrt{6} - 2)$

erhält.

Aus den Gleichungen 1) und 3) ergibt sich nunmehr die Gleichung:

4) . . . $x = \frac{[k(\sqrt{6}-2)]^3}{4} \cdot \sqrt{3}$

und aus dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 510 für das gesuchte Volumen $x$:

A) . . . $x = \frac{k^3}{2}(27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})$

---

**Aufgabe 622.** Die Halbierungspunkte der von den beiden Spitzen einer dreiseitigen Doppelpyramide, welche von lauter gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, ausgehenden Kanten seien die Eckpunkte eines zweiten und die Mittel-

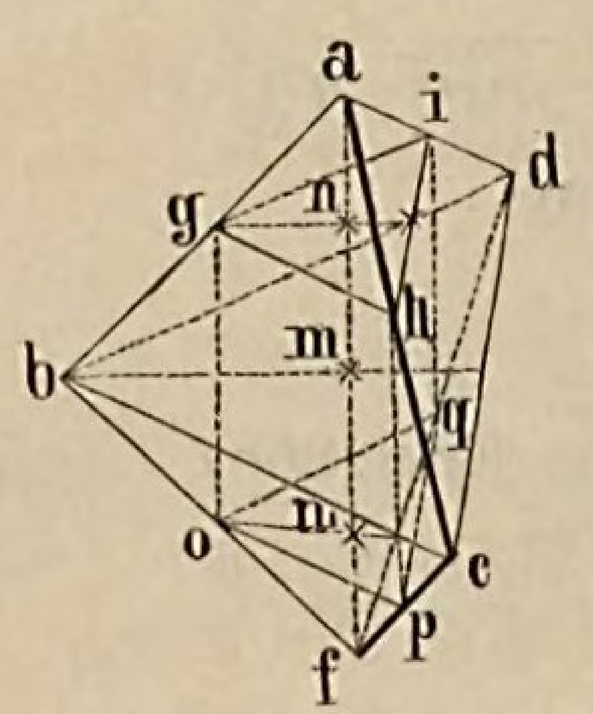
**Formeln:**

Für ein Tetraeder:

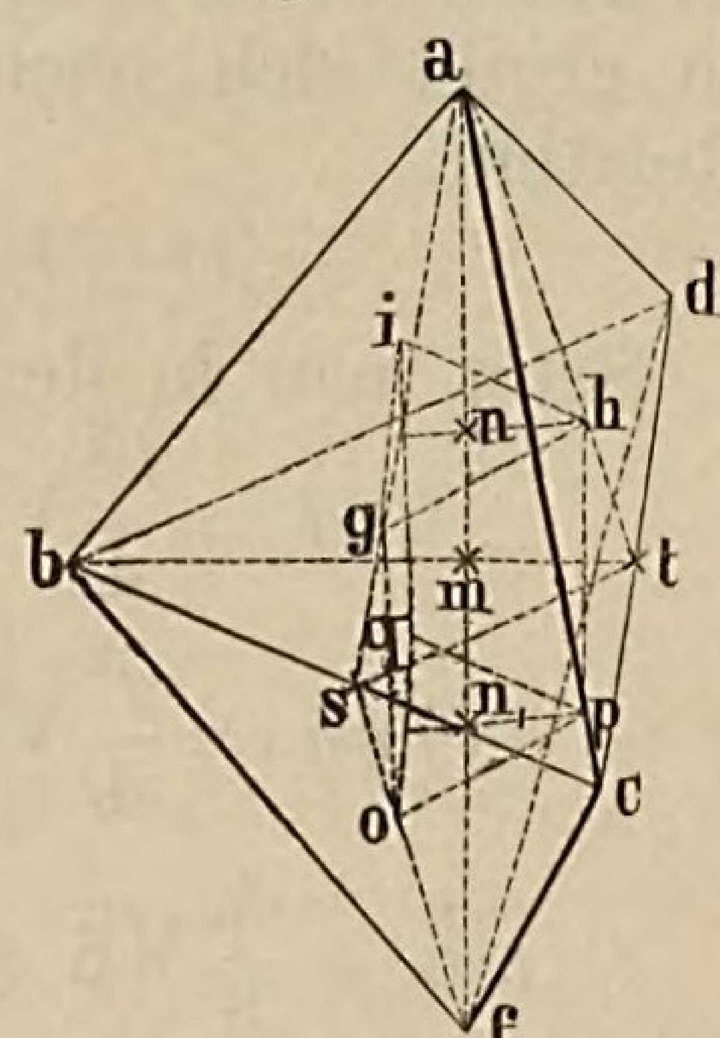
$$\left.\begin{aligned}\text{I.} \ldots V &= \frac{k^3}{12}\sqrt{2} \\ \text{II.} \ldots H &= \frac{k}{3}\sqrt{6}\end{aligned}\right\} \text{(s. Erkl. 353)}$$

punkte jener Dreiecke seien die Eckpunkte eines dritten Körpers. In welchem Verhältnis stehen die Volumen der drei Körper zu einander?

Figur 166.




Figur 167.




**Erkl. 511.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man die Mitten zweier Seiten eines Dreiecks, so ist diese Verbindungslinie parallel der dritten Dreiecksseite und halb so gross als letztere."

Nach diesem Satze ist z. B. in Figur 166 die Verbindungslinie $gh$ der Mitten der Dreiecksseiten $ab$ und $ac$ parallel $bc$ und $= \frac{\overline{bc}}{2}$ da $\overline{bc}$ gleich der Kante $k$ der Doppelpyramide ist, so ist:

$$gh = \frac{k}{2}$$

**Erkl. 512.** Nach dem in voriger Erklärung erwähnten Lehrsatze ergibt sich aus dem Dreieck $baf$, siehe Figur 166, dass $og \parallel af$ und $= \frac{\overline{af}}{2}$ also auch $= \overline{ma}$ (oder $= \overline{mf}$) oder nach vorstehender Formel II $= \frac{k}{3}\sqrt{6}$ ist.

**Erkl. 513.** Denkt man sich in der Fig. 167 die Linien $ah$ und $ag$ gezogen und verlängert, so treffen diese Verlängerungen die Mitten $t$ und $s$ der Seiten $dc$ und $bc$, da die Punkte $g$ und $h$ die Mittelpunkte der Dreiecke $abc$ und $acd$, also die Linien $at$ und $as$ sowohl die Höhen als auch die Schwerlinien der Dreiecke $abc$ und $acd$ sind (s. Erkl. 310). Verbindet man ferner $s$ mit $t$, so erhält man die ähnlichen Dreiecke $ast$ und $agh$. Da nun $\overline{ag} = \overline{ah} = \frac{2}{3}\overline{as}$, bezw. $= \frac{2}{3}\overline{at}$ ist und man aus der Aehnlichkeit jener Dreiecke die Relation:

$$\overline{gh} : \overline{st} = \overline{ag} : \overline{as}$$

Für ein Prisma:

$$\text{III.} \; \ldots \; V = G \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 1)}$$

**Auflösung.** Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses drücke man die Volumen der drei Körper in die Kante der Doppelpyramide aus, was wie folgt geschieht:

Die Doppelpyramide kann man sich aus zwei kongruenten, regulären Tetraedern zusammengesetzt denken. Bezeichnet man eine Kante derselben mit $k$, so hat man nach vorstehender Formel I für das Volumen $V$ der Doppelpyramide:

$$V = 2 \cdot \frac{k^3}{12}\sqrt{2}$$

oder

$$1) \; \ldots \; V = \frac{k^3}{6}\sqrt{2}$$

Denkt man sich, siehe Figur 166, die Mitten der von den Spitzen $a$ und $f$ ausgehenden Kanten verbunden, so erhält man das gerade, dreiseitige Prisma $ghiqop$. Da man nach der Erkl. 511 für eine Grundkante dieses Prismas, z. B. für $gh$:

$$a) \; \ldots \; gh = \frac{k}{2}$$

und für die Höhe, bezw. für eine Seitenkante, wie z. B. für die Seitenkante $og$ nach der Erkl. 512 und nach vorstehend. Formel II:

$$b) \; \ldots \; og = \frac{af}{2} = ma = \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

setzen kann, so erhält man nach vorstehender Formel III und in Rücksicht, dass die Grundflächen jenes Prismas gleichseitige Dreiecke sind, für das Volumen $V_1$ des Prismas:

$$V_1 = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

oder

$$V_1 = \frac{k^2}{4 \cdot 4}\sqrt{3} \cdot \frac{k}{3}\sqrt{6} = \frac{k^3}{48}\sqrt{18}$$

$$= \frac{k^3}{48}\sqrt{9 \cdot 2} = \frac{k^3}{48} \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$$

mithin:

$$2) \; \ldots \; V_1 = \frac{k^3}{16}\sqrt{2}$$

erhält, so ergibt sich hieraus:

$$\overline{gh} : \overline{st} = \frac{2}{3}\overline{as} : \overline{as}$$

oder

$$\overline{gh} : \overline{st} = \frac{2}{3} : 1$$

mithin:

$$\text{a)} \ldots \overline{gh} = \frac{2}{3}\overline{st}$$

Da sich ferner nach der Erkl. 511 aus dem Dreieck $bcd$ ergibt, dass $\overline{st} = \frac{bd}{2} = \frac{k}{2}$ ist, so erhält man schliesslich aus letzterer Gleichung:

$$\overline{gh} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{2}$$

oder

$$\text{b)} \ldots \overline{gh} = \frac{k}{3}$$

**Erkl. 514.** Denkt man sich in der Fig. 167 die Linie $af$ gezogen und verlängert, so trifft dieselbe die Mitte $s$ der Seite $bc$ (s. Erkl. 513). Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $sgo$ und $saf$ erhält man die Proportion:

$$\overline{go} : \overline{af} = \overline{gs} : \overline{as}$$

oder, da nach der Erkl. 513:

$$\overline{ag} = \frac{2}{3}\overline{as}, \text{ also } \overline{gs} = \frac{1}{3}\overline{as}$$

ist:

$$\overline{go} : \overline{af} = \frac{1}{3}\overline{as} : \overline{as}$$

oder

$$\overline{go} : \overline{af} = \frac{1}{3} : 1$$

mithin

$$\text{a)} \ldots \overline{go} = \frac{1}{3}\overline{af}$$

Berücksichtigt man, dass: $\overline{af} = \overline{ma} + \overline{mf} = 2 \cdot \overline{ma}$ oder nach nebenstehender Formel 2):

$$= 2 \cdot \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

ist, so erhält man aus vorstehend. Gleichung a):

$$\overline{go} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

oder

$$\text{b)} \ldots \overline{go} = \frac{2k}{9}\sqrt{6}$$

Denkt man sich ferner, siehe Fig. 167, die Mittelpunkte der die Doppelpyramide begrenzenden Dreiecke verbunden, so erhält man das gerade Prisma $ghiqpo$. Da man nach der Erkl. 513 für eine Grundkante, z. B. für $gh$:

$$\text{c)} \ldots \overline{gh} = \frac{k}{3}$$

und nach der Erkl. 514 für die Höhe $nn_1$, bezw. für eine Seitenkante, wie z. B. für die Seitenkante $go$:

$$\text{d)} \ldots \overline{go} = \frac{2k}{9}\sqrt{6}$$

setzen kann, so erhält man nach vorstehender Formel III und in Rücksicht, dass die Grundflächen dieses Prismas gleichseitige Dreiecke sind, für das Volumen $V_2$ desselben:

$$V_2 = \frac{\left(\frac{k}{3}\right)^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{2k}{9}\sqrt{6}$$

oder

$$V_2 = \frac{k^2}{9 \cdot 4}\sqrt{3} \cdot \frac{2k}{9}\sqrt{6} = \frac{k^3}{81 \cdot 2}\sqrt{18}$$

$$= \frac{k^3}{81 \cdot 2}\sqrt{9 \cdot 2} = \frac{k^3 \cdot 3}{81 \cdot 2}\sqrt{2}$$

mithin:

$$3) \ldots V_2 = \frac{k^3}{54}\sqrt{2}$$

Nach den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man für das gesuchte Verhältnis das Volumen $V$, $V_1$ und $V_2$:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{k^3}{6}\sqrt{2} : \frac{k^3}{16}\sqrt{2} : \frac{k^3}{54}\sqrt{2}$$

oder nach der Erkl. 82:

$$V : V_1 : V_2 = \frac{1}{6} : \frac{1}{16} : \frac{1}{54}$$

mithin:

$$\text{A)} \ldots V : V_1 : V_2 = 72 : 27 : 8$$

---

**Aufgabe 623.** Man denke sich durch ein reguläres Hexaeder zwei Ebenen so gelegt, dass dieselben parallel zu zwei diametral gegenüberstehenden Kanten des Hexaeders sind und dass jede dieser Ebenen zwei in einer dieser Kanten zusammenstossende Begrenzungsflächen des Hexaeders halbiert. Dann denke man sich einen Cylinder so konstruiert, dass

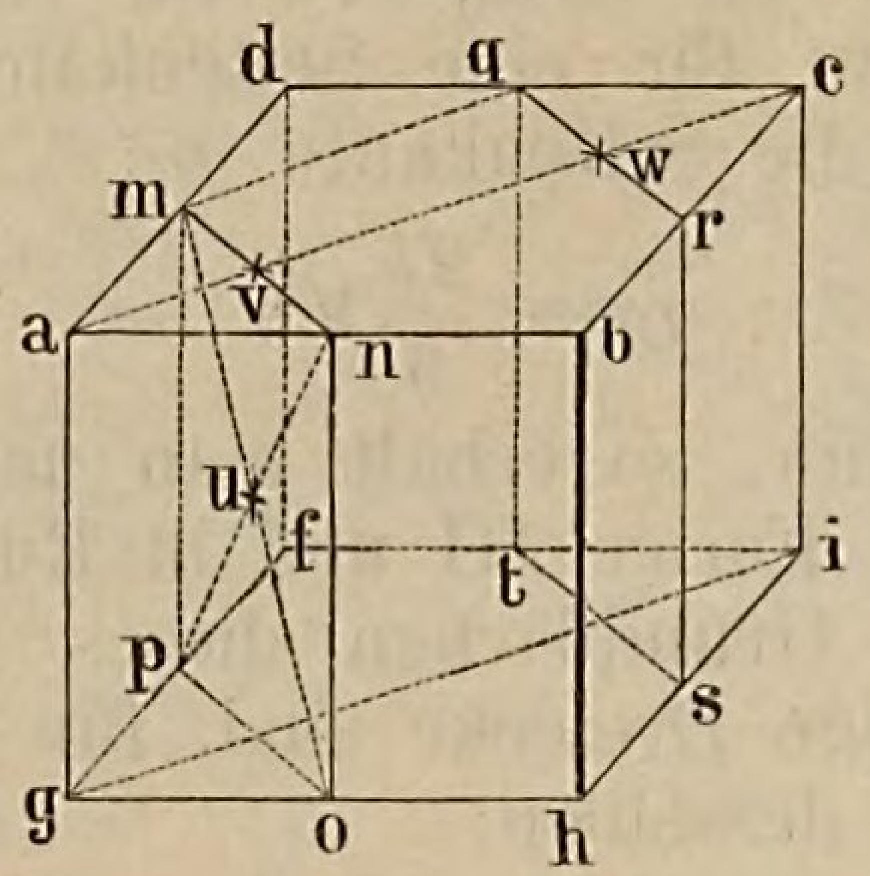
**Formel:**

Für ein Cylinder:

$$V = R^2 \pi H \text{ (s. Erkl. 33).}$$

dessen Grundflächen je einer der erhaltenen Schnittfiguren umbeschrieben sind; ferner denke man sich einen zweiten geraden Cylinder konstruiert, dessen Grundflächendurchmesser jene Kanten sind. In welchem Verhältnis stehen die Volumen dieser zwei Cylinder?

Figur 168.




**Erkl. 515.** Unter der Mittellinie eines jeden Parallelogramms versteht man die Verbindungslinie der Mitten zweier parallelen Seiten.

Die Mittellinie eines jeden Parallelogramms hat die Eigenschaft, dass sie gleich und parallel den beiden andern Seiten des Parallelogramms ist und dasselbe in zwei kongruente Teile zerlegt.

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über das Viereck handelt.

**Erkl. 516.** Nach dem in der Erkl. 511 ausgesprochenen Lehrsatz ergibt sich, dass in der Figur 168

$$\text{a)} \ldots \overline{nm} = \frac{\overline{bd}}{2}$$

ist. Berücksichtigt man, dass:

$$\overline{bd} = \sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{ab}^2}$$

oder, wenn man die Kante des Hexaeders mit $k$ bezeichnet, dass:

$$\overline{bd} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2}$$

oder

$$\text{b)} \ldots \overline{bd} = k \cdot \sqrt{2} \text{ ist,}$$

so erhält man aus Gleichung a):

$$\text{c)} \ldots \overline{nm} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

**Auflösung.** In der Fig. 168 stellen $mnop$ und $qrst$ die beiden parallelen Ebenen dar, welche parallel den diametral gegenüberstehenden Kanten $ag$ und $ci$ sind und von welchen die Ebene $mnop$ durch die Mittellinien $no$ und $mp$ der in $ag$ zusammenstossenden Flächen $adfg$ und $abhg$ geht, welche diese beiden Flächen halbieren (s. Erkl. 515), während die Ebene $qrst$ durch die Mittellinien $qt$ und $rs$ der in $ci$ zusammenstossenden Flächen $dcif$ und $cihb$ geht, also diese beiden Flächen halbiert. Denkt man sich um die Durchschnittsfiguren $mnop$ und $qrst$ Kreise konstruiert, so bilden dieselben die Grundkreise des ersten des gedachten Cylinders, dessen Volumen wie folgt in die Kante $k$ des regulären Hexaeders ausgedrückt werden kann:

Für den Radius $\overline{un} = \frac{\overline{pn}}{2}$ des Grundkreises des Cylinders erhält man aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $pmn$:

$$\overline{un} = \frac{\overline{pn}}{2} = \frac{\sqrt{\overline{pm}^2 + \overline{nm}^2}}{2}$$

oder, da: $\overline{pm} = \overline{ag} = k$ (nämlich gleich der Kante des Hexaeders)

und nach der Erkl. 516:

$$\overline{nm} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

gesetzt werden kann:

$$\overline{un} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + \left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + \frac{k^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{4} \cdot 6}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \overline{un} = \frac{k}{4}\sqrt{6}$$

Da ferner die Höhe des gedachten Cylinders

$$= \overline{mq} = \frac{\overline{ac}}{2} \text{ (s. Erkl. 511)} = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{cd}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + k^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

ist, so erhält man nach vorstehender Formel 1) für das Volumen $V$ dieses Cylinders, in die Kante $k$ des Hexaeders ausgedrückt:

$$V = \left(\frac{k}{4}\sqrt{6}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

oder

$$V = \frac{k^2}{16} \cdot 6 \cdot \pi \cdot \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

mithin

$$1) \ldots V = \frac{3}{16} \pi \cdot k^3 \cdot \sqrt{2}$$

Denkt man sich ferner durch die parallelen Kanten $ag$ und $ci$ parallele und senkrecht zur Diagonalebene $acig$ stehende Ebenen gelegt und in dieselben Kreise mit den Durchmessern $ag = ci = k$ konstruiert, so bilden diese parallele und kongruente Kreise die Grundkreise des zweiten der gedachten Cylinder, dessen Volumen $V_1$ wie folgt in die Kante $k$ des regulären Hexaeders ausgedrückt werden kann.

Der Radius des Grundkreises dieses Cylinders ist

$$= \frac{ag}{2} = \frac{k}{2}$$

Die Höhe desselben ist

$$= ac = \sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{cd}^2} = \sqrt{2k^2} = k\sqrt{2}$$

Nach vorstehender Formel erhält man somit für das Volumen $V_1$ des zweiten Cylinders in die Kante $k$ des Hexaeders ausgedrückt:

$$V_1 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \pi \cdot k\sqrt{2}$$

oder

$$V_1 = \frac{k^2}{4} \pi \cdot k\sqrt{2}$$

mithin

$$2) \ldots V_1 = \frac{k^3}{4} \pi \sqrt{2}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 = \frac{3}{10} \pi \cdot k^3 \sqrt{2} : \frac{k^3}{4} \pi \sqrt{2}$$

oder

$$V : V_1 = \frac{3}{16} : \frac{1}{4}$$

mithin

$$V : V_1 = 3 : 4$$

---

**Aufgabe 624.** Konstruiert man über jeder Fläche eines regulären Hexaeders als Grundfläche eine gerade Pyramide so, dass diese sechs Pyramiden gleiche Höhen haben und dass je zwei der in einer Hexaederkante zusammenstossenden Seitenflächen dieser Pyramiden in einerlei Ebenen liegen, so entsteht ein sogenanntes Rhomboeder. Wie gross sind die Höhen jener Pyramiden; wie gross sind die Kanten des entstandenen Rhomboeders und welches ist das Volumen desselben, wenn die Kante des Hexaeders $= k$ ist?

**Formeln:**

Für ein Hexaeder:

$$\text{I.} \ldots \varrho = \frac{k}{2}\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 358)}$$

$$\text{II.} \ldots V = k^3$$

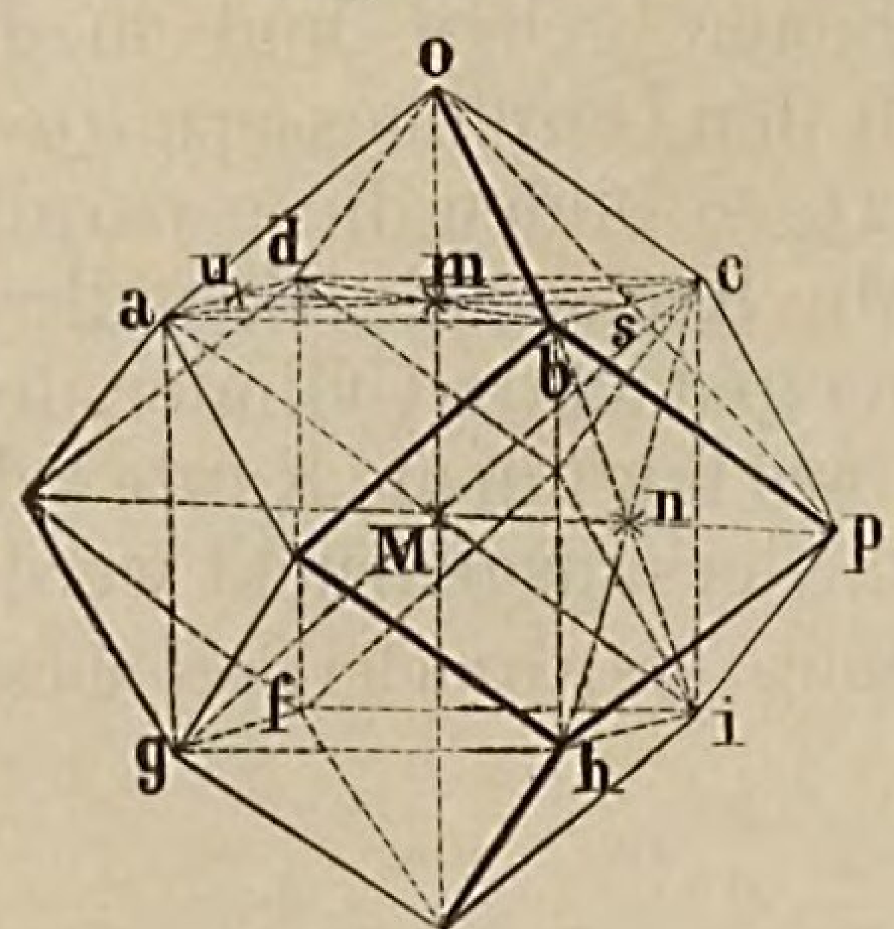
Für eine Pyramide:

$$\text{III.} \ldots V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 28)}$$

**Auflösung.** In Figur 169 stelle $abcdfghi$ das reguläre Hexaeder dar,

über dessen Begrenzungsflächen die Pyramiden *oabcd*, *pbhic*, ..... so konstruiert sind, dass deren Höhen *mo*, *np* ..... gleich sind und von welchen je zwei der Seitenflächen, die an einer Hexaederkante zusammenstossen, wie z. B. die Seitenflächen *obc* und *pbc*, je in einer Ebene zu liegen kommen, und somit je zwei dieser Seitenflächen einen Rhombus oder eine Raute bilden.

Figur 169.




Zur Berechnung der gesuchten Kante $x$ des entstandenen Rhomboeders verfahre man wie folgt:

Ziehe man in dem Rhombus *obpc* die Diagonale *op* und verbindet man den Schnittpunkt *s* der beiden Diagonalen *bc* und *op* und auch die Ecken *o* und *p* mit dem Mittelpunkt *M* des Hexaeders, so erhält man, da die Höhen *om* und *pn* gleich sein sollen, das bei *M* rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck *oMp*, in welchem die Verbindungslinie *sM* die Höhe ist.

Da *sM* zugleich auch der Radius $\varrho$ der Kugel ist, welchen man um *M* so konstruiert denken kann, dass sie die Mitten der Kanten des Hexaeders berührt, so hat man nach vorstehender Formel I:

a) . . . $\overline{sM} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$

Da ferner aber auch nach der Erkl. 518:

b) . . . $\overline{sM} = \overline{sp} = \overline{so}$ ist,

so ist auch:

c) . . . $\overline{sp} = \overline{so} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$

Aus dem bei *s* rechtwinkligen Dreieck *obs* ergibt sich ferner die Relation:

$\overline{ob} = \sqrt{\overline{so}^2 + \overline{bs}^2}$

Setzt man in derselben:

$\overline{ob} = x$, nämlich gleich der gesuchten Kante des Rhomboeders

$\overline{so} = \overline{sp} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$ [s. Gleichung c)]

und

$\overline{bs} = \frac{\overline{bc}}{2} = \frac{k}{2}$

so erhält man hiernach für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$x = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

Für die gesuchte Kante $x$ erhält man hieraus:

$$x = \sqrt{\frac{k^2 \cdot 2}{4} + \frac{k^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}k^2}$$

oder

$$\text{A)} \; . \; . \; . \; x = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

Die gesuchte Höhe $y$ einer der Pyramiden findet man wie folgt:

**Erkl. 517.** Unter einem Rhomboeder versteht man im allgemeinen einen Körper, dessen Begrenzungsflächen Rhomben sind.

Das in der Figur 169 dargestellte Rhomboeder ist ein solches, welches von 12 kongruenten Rhomben begrenzt wird und heisst dementsprechend auch Rhombendodekaeder, in der Krystallographie heisst es auch Granatoëder.

**Erkl. 518.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck ist die zur Hypotenuse gehörige Höhe gleich der halben Hypotenuse“

oder, was dasselbe ist

„In jedem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck ist die Hypotenuse doppelt so gross als die zugehörige Höhe.“

Nach diesem Satze ist in der Figur 169:

$$\overline{sM} = \overline{so} = \overline{sp}$$

Verbindet man $s$ mit $m$, so erhält man das rechtwinklige Dreieck $oms$; aus demselben ergibt sich die Relation:

$$\overline{om} = \sqrt{\overline{so}^2 - \overline{ms}^2}$$

Setzt man in derselben:

$\overline{om} = y$, nämlich gleich der gesuchten Höhe einer der Pyramiden

$\overline{so} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$ [s. Gleichung c)]

und

$\overline{ms} = \frac{us}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{k}{2}$

so erhält man hiernach für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$y = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{k^2 \cdot 2}{4} - \frac{k^2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{k^2}{4}}$$

Für die gesuchte Höhe $y$ erhält man also:

$$\text{B)} \;\ldots\; y = \frac{k}{2}$$

Das gesuchte Volumen $V$ des Rhomboeders findet man wie folgt:

Das Volumen $V$ besteht aus dem Volumen des Hexaeders (dasselbe ist nach vorstehender Formel II $= k^3$) plus der Summe der Volumen der sechs kongruenten Pyramiden. Da nun die Grundfläche einer jeden dieser Pyramiden $= k^2$ und die Höhe nach vorstehender Gleichung B) $= \frac{k}{2}$ ist, so hat man nach vorstehender Formel III für $V$ die Bestimmungsgleichung:

$$V = k^3 + 6 \cdot \frac{k^2 \cdot \frac{k}{2}}{3}$$

und hieraus erhält man:

$$V = k^3 + \frac{6 \cdot k^3}{6} = k^3 + k^3$$

oder

$$\text{C)} \;\ldots\; V = 2 \cdot k^3$$

d. h. das Volumen des Rhomboeders ist gleich dem doppelten Volumen des Hexaeders.

---

**Aufgabe 625.** In welchem Verhältnis stehen die Kubikinhalte zweier geraden Cylinder, von welchen der eine durch die vier Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit der Kante $k$ so gelegt ist, dass zwei nicht aneinander-

**Formeln:**

Für ein Cylinder:

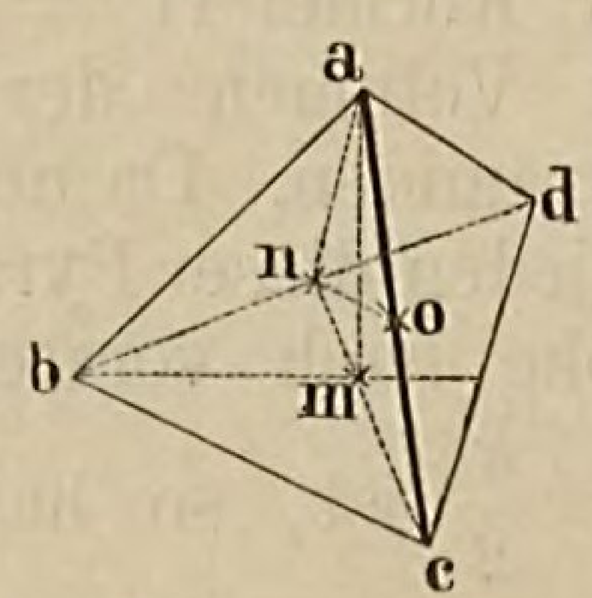
$$\text{I.} \;\ldots\; V = \frac{R^2 \pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50)}$$

Für ein Hexaeder:

$$\text{II.} \;\ldots\; D = k \cdot \sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 358).}$$

stossende Kanten desselben die Durchmesser der Grundflächen dieses Cylinders bilden und von welchen der andre einem regulären Hexaeder mit derselben Kante $k$ so umbeschrieben ist, dass vier Eckpunkte des Hexaeders in den Durchmessern der Grundflächen, die vier andern Eckpunkte des Hexaeders in der Mantelfläche dieses zweiten Cylinders liegen?

Figur 170.




**Auflösung.** Stellt in Fig. 170 $abcd$ das reguläre Tetraeder dar, dessen Kante $= k$ ist und man denkt sich um eine der Kanten, z. B. um die Kante $ac$ als Durchmesser einen Kreis konstruiert, und denkt man sich ferner um die ihr nicht anstossende Kante $bd$ als Durchmesser einen zweiten Kreis konstruiert, dessen Ebene parallel der Ebene des ersten Kreises ist, so bilden diese beiden Kreise die Grundflächen eines geraden Cylinders, dessen Höhe gleich dem senkrechten Abstand $no$ der beiden Kanten $ac$ und $bd$ ist. Denkt man ferner sich durch die Kante $ac$ die Ebene $anc$ senkrecht zur Kante $bd$ gelegt, so erhält man das gleichschenklige Dreieck $anc$, dessen Schenkel $an$ und $cn$ als Höhen der gleichseitigen Dreiecke $abd$ und $cbd$ nach der Erkl. 25 $= \frac{k}{2}\sqrt{3}$ sind. Aus dem bei $o$ rechtwinkligen Dreieck $noa$ erhält man die Relation:

$$\overline{no} = \sqrt{\overline{an}^2 - \overline{ao}^2}$$

oder, da nach vorstehendem

$$\overline{an} = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

und $\overline{ao} = \frac{ac}{2} = \frac{k}{2}$

gesetzt werden kann:

$$\overline{no} = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

oder

$$\overline{no} = \sqrt{\frac{k^2 \cdot 3}{4} - \frac{k^2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}k^2}$$

mithin

$$\text{a)} \ldots \overline{no} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

Nach vorstehender Formel I hat man somit für das Volumen $V$ jenes Cylinders:

$$V = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

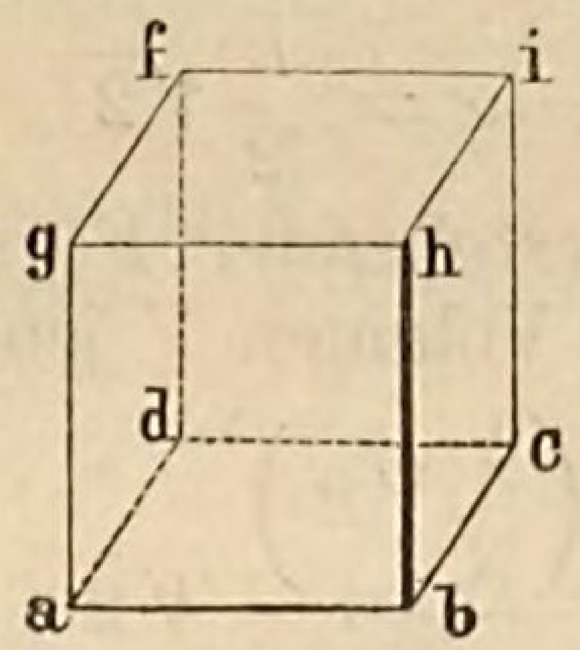
oder

$$V = \frac{k^2}{4}\pi \cdot \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

mithin

$$1) \ldots V = \frac{k^3}{8}\pi\sqrt{2}$$

Figur 171.




Stellt ferner die Fig. 171 das reguläre Hexaeder dar, dessen Kante ebenfalls $= k$ ist und man denkt sich durch die Kanten $bh$ und $df$ Kreise gelegt, deren Ebenen parallel der Diagonalebene $acig$ und deren Durchmesser gleich der Körperdiagonale ($cg$ oder $af$), also nach vorstehender Formel II $= k\sqrt{3}$ sind, so kann man diese Kreise als die Grundfläche eines geraden Cylinders betrachten, dessen Höhe gleich dem senkrechten Abstand der Kanten $bh$ u. $df$, bezw. gleich der gedachten Flächendiagonale $fh$ ist und in dessen Mantelfläche die vier andern Eckpunkte $a$, $c$, $i$ und $g$ liegen. Denkt man sich $f$ mit $h$ verbunden, so erhält man das bei $g$ rechtwinklige Dreieck $fgh$, aus welchem sich die Relation:

$$\overline{fh} = \sqrt{\overline{fg}^2 + \overline{hg}^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2}$$

oder

$$\text{b)} \ldots \overline{fh} = k\sqrt{2}$$

ergibt.

Nach vorstehender Formel 1) hat man somit für das Volumen $V_1$ dieses Cylinders:

$$V_1 = \left(\frac{k}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot k\sqrt{2}$$

oder

$$V_1 = \frac{k^2 \cdot 3}{4} \cdot \pi \cdot k\sqrt{2}$$

mithin

$$2) \ldots V_1 = \frac{3k^3}{4}\pi\sqrt{2}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man schliesslich für das gesuchte Verhältnis der Volumen $V$ und $V_1$ der beiden Cylinder:

$$V : V_1 = \frac{k^3}{8}\pi\sqrt{2} : \frac{3k^3}{4}\pi\sqrt{2}$$

oder

$$V : V_1 = \frac{1}{8} : \frac{3}{4}$$

mithin

$$\text{A)} \ldots V : V_1 = 1 : 6$$

---

**Aufgabe 626.** Verbindet man die Mittelpunkte je zweier aneinanderstossender Begrenzungsflächen eines regulären Hexaeders, so erhält man das Kantennetz eines regulären Oktaeders. Wie gross ist das Volumen eines solchen Oktaeders, wenn die Kante des Hexaeders $= k$ ist?

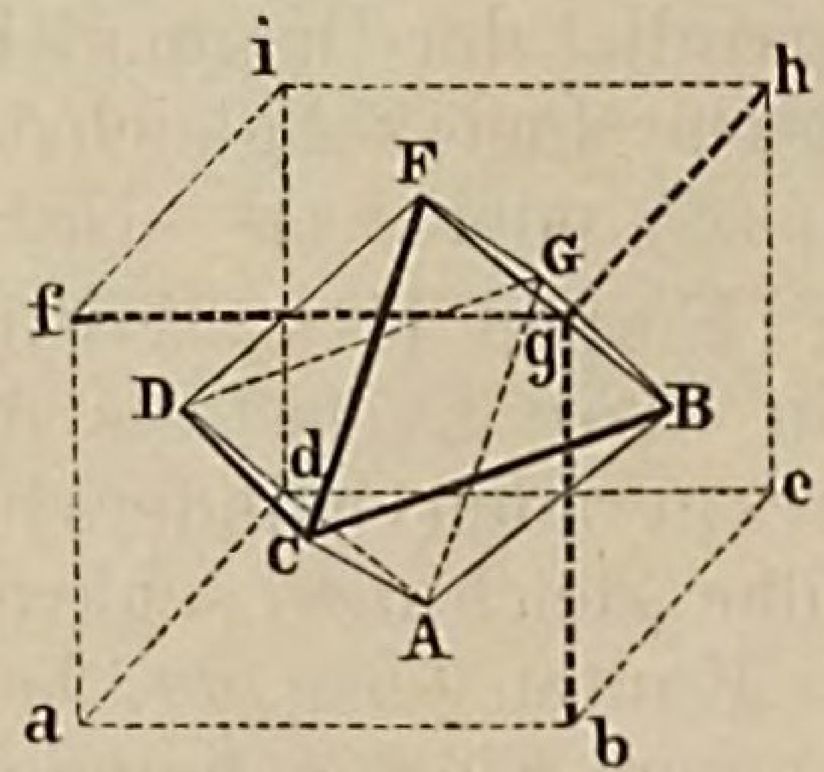
**Formel:**

Für ein Oktaeder:

$$V = \frac{k^3}{3}\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 361)}$$

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Fig. 172 durch die vier Ecken $AGFC$

Figur 172.




des Oktaeders, bezw. durch die Mittelpunkte $A$, $G$, $F$ und $C$ der vier bezügl. Begrenzungsflächen des Hexaeders eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene das Hexaeder in einem Quadrat, dessen Seite gleich der Kante $k$ des Hexaeders ist, und schneidet ferner das Oktaeder in dem Quadrate $AGFC$, dessen Seiten gleich der zunächst zu bestimmenden Kante des Oktaeders sind, und welche die Eigenschaft haben, dass sie die Verbindungslinien der Mitten jenes ersteren Quadrats sind.

Nach der Erkl. 519 hat man somit für die Kante $x$ des Oktaeders in die Kante $k$ des Hexaeders ausgedrückt:

$$\text{a)} \; \ldots \; x = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

**Erkl. 519.** Nach dem in der Erkl. 511 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz und nach dem Eingang nebenstehender Auflösung ist die Kante $CF = x$ des Oktaeders in Fig. 172 gleich der Hälfte der Diagonale des Quadrats, dessen Seite $= k$ ist.

Da nun die Diagonale eines Quadrats, dessen Seite $k$ ist $= \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = k\sqrt{2}$ ist, so erhält man hiernach für die Kante $x$ jenes Oktaeders:

$$x = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

Nach vorstehender Formel hat man also für das Volumen $V$ jenes Oktaeders:

$$V = \frac{\left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^3}{3}\sqrt{2}$$

oder

$$V = \frac{k^3(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2}{8 \cdot 3} = \frac{k^3 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 3}$$

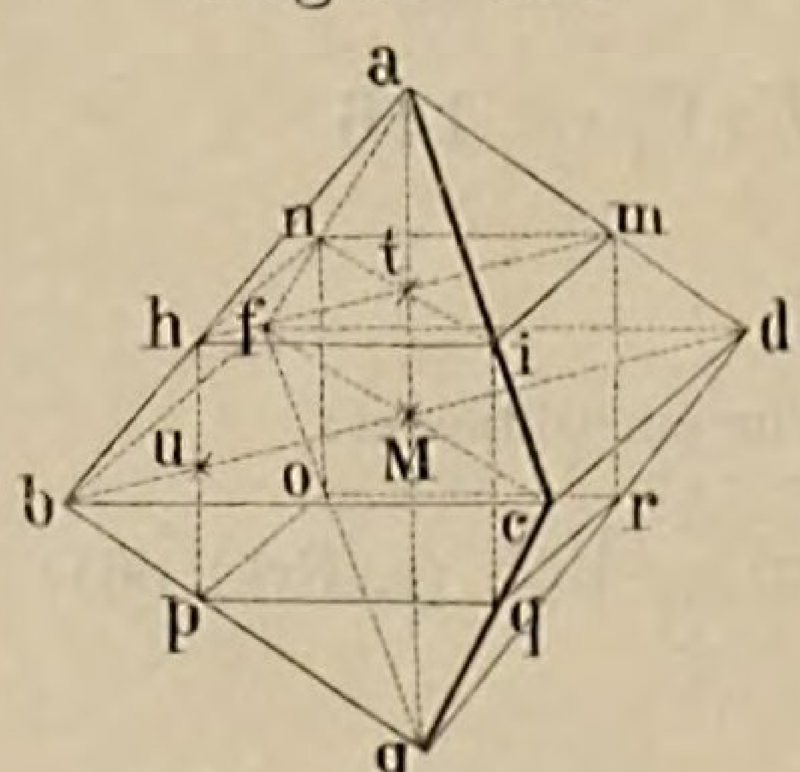
oder

$$\text{A)} \; \ldots \; V = \frac{k^3}{6}$$

---

**Aufgabe 627.** Einem regulären Oktaeder sind zwei reguläre Hexaeder einbeschrieben, die Ecken des einen liegen in den Mitten der acht Kanten des Oktaeders, die Ecken des andern liegen in den Mittelpunkten der acht Oktaederflächen. In welchem Verhältnis stehen die Volumen jener zwei regul. Hexaeder.

Figur 173.




**Formeln:**

Für ein Hexaeder:

$$\text{I.} \; \ldots \; V = k^3 \quad \text{(s. Erkl. 358)}$$

Für ein Oktaeder:

$$\text{II.} \; \ldots \; D = k\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 361).}$$

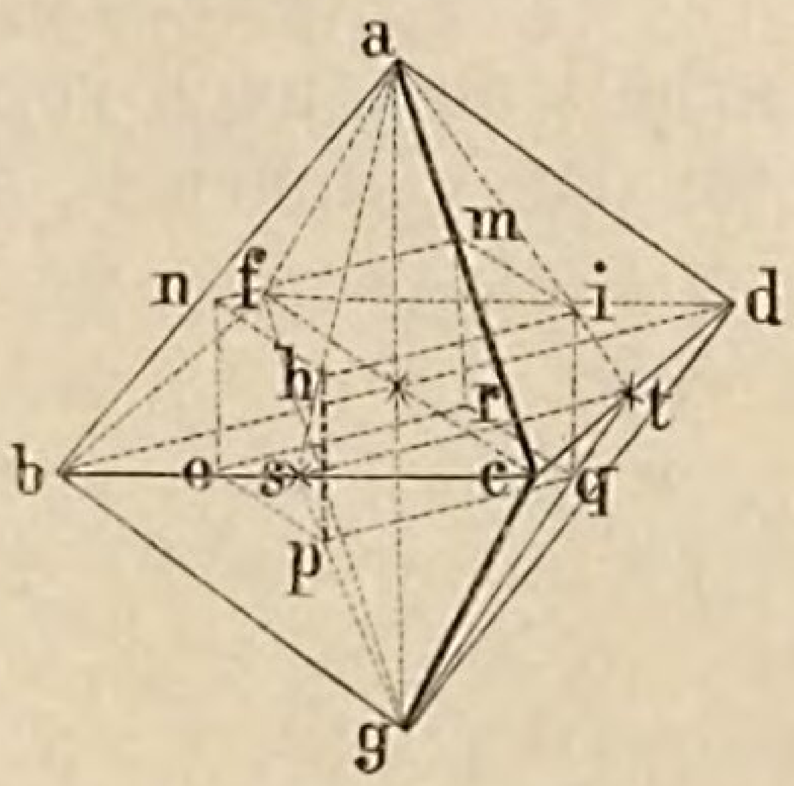
**Auflösung.** In Figur 173 stelle $abcdfg$ das Oktaeder mit der Kante $k$ und $himnopqr$ das reguläre Hexaeder dar, dessen Ecken auf den Kanten des Oktaeders liegen. Nach der Erkl. 520 erhält man für die Kante $hi$ dieses Hexaeders:

$$hi = k\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)$$

und hiernach hat man nach vorstehender Formel I für das Volumen $V$ dieses Hexaeders, in die Kante $k$ des Oktaeders ausgedrückt:

$$V = [k\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)]^3$$

Figur 174.




**Erkl. 520.** Nach dem in der Erkl. 195 ausgesprochenen stereometrischen Satze ergibt sich aus der Figur 173 die Relation:

$$\text{a)} \ldots \; bcdf : himn = \overline{Ma}^2 : \overline{ta}^2$$

Bezeichnet man nun die Kante $hi$ des Hexaeders mit $x$, die Kante des Oktaeders mit $k$, setzt man also:

$$bcdf = k^2$$

$$himn = x^2$$

$$\overline{Ma} = \frac{k}{2}\sqrt{2} \quad \text{[s. nebenst. Formel 2)]}$$

und

$$\overline{ta} = \overline{Ma} - \overline{Mt} = \frac{k}{2}\sqrt{2} - \overline{uh}$$

$$= \frac{k}{2}\sqrt{2} - \frac{\overline{ph}}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{2} - \frac{x}{2}$$

so geht vorstehende Proportion a) über in:

$$k^2 : x^2 = \left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2 : \left(\frac{k}{2}\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2$$

und hieraus erhält man:

$$k : x = \frac{k}{2}\sqrt{2} : \left(\frac{k}{2}\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{k^2}{2}\sqrt{2} - x \cdot \frac{k}{2} = x \cdot \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{k^2}{2}\sqrt{2} = x\left(\frac{k}{2}\sqrt{2} + \frac{k}{2}\right)$$

$$\frac{k^2}{2}\sqrt{2} = x \cdot \frac{k}{2}(\sqrt{2} + 1)$$

$$x(\sqrt{2} + 1) = k\sqrt{2}$$

$$x = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{k\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{k\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2-1}$$

oder

$$x = k\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

oder nach der Erkl. 521:

$$1) \ldots \; V = k^3 \cdot 2\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 7)$$

In Fig. 174 stelle wiederum $abcdfg$ dasselbe Oktaeder wie in Fig. 173 mit der Kante $k$ dar; ferner stelle $himn$ $opqr$ das Hexaeder dar, dessen Ecken auf den Mittelpunkten der Begrenzungsflächen des Oktaeders liegen.

Denkt man sich, um die Kante $\overline{hi}$ des Hexaeders in die Kante $k$ des Oktaeders ausdrücken zu können, $a$ mit $h$ und $i$ verbunden und diese Linien bezw. bis $s$ und $t$ verlängert, dann $s$ mit $t$ verbunden, so erhält man das Dreieck $ast$, in welchem $as$ und $at$ als Höhen der gleichseitigen Dreiecke $abc$ und $acd$ nach der Erkl. 25 $= \frac{k}{2}\sqrt{3}$ sind, in welchem ferner $st$ nach dem in der Erkl. 511 ausgesprochenen Lehrsatz $= \frac{bd}{2}$, bezw. nach vorstehender Formel II $= \frac{k}{2}\sqrt{2}$ ist. Da ferner die Punkte $h$ und $i$ die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke $abc$ und $acd$ zugleich auch die Schwerpunkte dieser Dreiecke sind, so ist jeder der Abschnitte $ah$ und $ai$ $= \frac{2}{3}as$ $\left(= \frac{2}{3}at\right)$ oder nach vorstehendem $= \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{2}\sqrt{3}$

Da hiernach auch die Kante $hi \parallel st$ ist, so erhält man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $ast$ und $ahi$ die Relation:

$$\overline{hi} : \overline{st} = \overline{ah} : \overline{as}$$

oder wenn man, wie vorhin angegeben:

$$\overline{st} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

$$\overline{ah} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{2}\sqrt{3} = \frac{k}{3}\sqrt{3}$$

und

$$\overline{as} = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

setzt:

$$\overline{hi} : \frac{k}{2}\sqrt{2} = \frac{k}{3}\sqrt{3} : \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

oder

$$\overline{hi} : \frac{k}{2}\sqrt{2} = 2 : 3$$

**Erkl. 521.** Nebenstehende Gleichung:

$$V = [k\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)]^3$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V = k^3(\sqrt{2})^3(\sqrt{2}-1)^3$$

$$V = k^3 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}-1)$$

$$V = k^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (2 - 2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}-1)$$

$$V = k^3 \cdot 2\sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$V = k^3 \cdot 2\sqrt{2}(3\sqrt{2} - 4 - 3 + 2\sqrt{2})$$

$$V = k^3 \cdot 2\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 7)$$

Für die Kante $\overline{hi}$ dieses Hexaeders erhält man hiernach:

$$\text{a)} \ldots \overline{hi} = \frac{k}{3}\sqrt{2}$$

und somit erhält man nach vorstehender Formel 1) für das Volumen $V_1$ desselben:

$$V_1 = \left(\frac{k}{3}\sqrt{2}\right)^3$$

oder

$$V_1 = \frac{k^3}{27}(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{k^3}{27} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$$

mithin

$$2) \ldots V_1 = \frac{2k^3}{27}\sqrt{2}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man für das gesuchte Verhältnis:

$$V : V_1 = k^3 \cdot 2\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 7) : \frac{2k^3}{27}\sqrt{2}$$

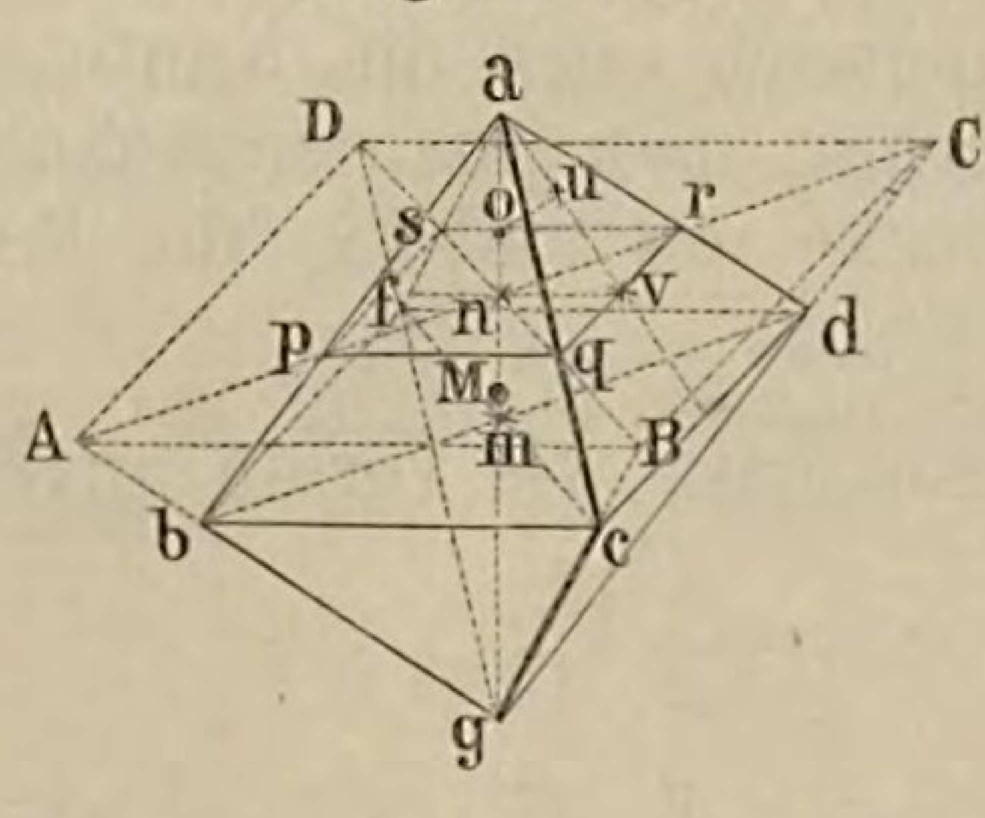
oder

$$V : V_1 = 27(5\sqrt{2} - 7) : 1$$

---

**Aufgabe 628.** In welchem Abstand von einem Eckpunkt eines regulären Oktaeders mit der Kante $k$ muss man durch dasselbe eine zu der zugehörigen Diagonalachse senkrechte Ebene legen, damit die Oberfläche der in die abgeschnittene Pyramide beschriebenen Berührungskugel den n-ten Teil der Oberfläche derjenigen zweiten Kugel betrage, welche die Schnittebene und die vier nicht geschnittenen Oktaederflächen berührt?

Figur 175.




**Erkl. 522.** Die Pyramide $apqrs$, welche durch die Ebene $spqr$, siehe Fig. 175, von dem Oktaeder abgeschnitten wird ist eine gerade, quadratische Pyramide, deren sämtliche Seitenkanten gleich lang sind.

Nach dem in der Erkl. 195 ausgesprochenen stereometrischen Satze hat man die Relation:

$$bcdf : pqrs = \overline{am}^2 : \overline{an}^2$$

oder, wenn man die Höhe $an$ mit $x$, die Kante des Oktaeders mit $k$, also nach nebenstehender

**Formeln:**

Für ein Oktaeder:

$$\text{I.} \ldots D = k\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 361)}$$

Für eine Kugel:

$$\text{II.} \ldots O = 4\pi r^2 \quad \text{(s. Erkl. 62).}$$

**Auflösung.** Stellt in Figur 175 $pqrs$ die Schnittebene dar und bezeichnet man den gesuchten Abstand $an$ dieser Schnittebene von der Ecke $a$ mit $x$, so erhält man nach der Erkl. 522 für den Radius $\overline{on}$ ($= ou$) der Kugel, welche die quadratische Pyramide $apqrs$ von innen berührt, in die Höhe $x$ dieser Pyramide ausgedrückt:

$$1) \ldots \overline{on} = \frac{x}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Ist ferner $M$ der Mittelpunkt der zweiten Kugel, welche jene Schnittfläche $pqrs$ und die vier nicht geschnittenen Flächen des Oktaeders berührt, und man denkt sich die Schnittebene $pqrs$, ebenso jene vier Flächen des Oktaeders erweitert, so ist diese Kugel eine solche, welche die quadratische, gleichseitige Pyramide $gABCD$ von innen berührt.

Da nach vorstehender Formel I:

$$\overline{ag} = k\sqrt{2}$$

Formel I die halbe Körperdiagonale $\overline{am}$ mit $\frac{k}{2}\sqrt{2}$ bezeichnet:

$$k^2 : \overline{pq}^2 = \left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\right)^2 : x^2$$

und hieraus erhält man:

$$k : \overline{pq} = \frac{k}{2}\sqrt{2} : x$$

$$\overline{pq} \cdot \frac{k}{2}\sqrt{2} = k \cdot x$$

$$\overline{pq} = \frac{k \cdot x \cdot 2}{k \cdot \sqrt{2}} = \frac{2x}{\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \overline{pq} = x\sqrt{2}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $anv$ erhält man ferner:

$$\overline{av} = \sqrt{\overline{an}^2 + \overline{nv}^2}$$

oder, wenn man:

$$\overline{an} = x$$

$$\overline{nv} = \frac{\overline{pq}}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{2} \quad \text{[s. Gleich. a)]}$$

setzt;

$$\overline{av} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{6}{4}x^2}$$

oder

$$\text{b)} \ldots \overline{av} = \frac{x}{2}\sqrt{6}$$

Aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $anv$ und $aou$ erhält man ferner:

$$\overline{nv} : \overline{ou} = \overline{av} : \overline{ao}$$

oder, wenn man:

$$\overline{nv} = \frac{\overline{pq}}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{2} \quad \text{[s. Gleich. a)]}$$

$$\overline{ou} = \overline{on}$$

$$\overline{av} = \frac{x}{2}\sqrt{6} \quad \text{[s. Gleich. b)]}$$

und

$$\overline{ao} = \overline{an} - \overline{on} = x - \overline{on}$$

setzt:

$$\frac{x}{2}\sqrt{2} : \overline{on} = \frac{x}{2}\sqrt{6} : (x - on)$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{x^2}{2}\sqrt{2} - \frac{x}{2}\sqrt{2} \cdot \overline{on} = \frac{x}{2}\sqrt{6} \cdot \overline{on}$$

$$\frac{x^2}{2}\sqrt{2} = \overline{on} \cdot \left(\frac{x}{2}\sqrt{6} + \frac{x}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$x \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} = \overline{on} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$x = \overline{on}(\sqrt{3}+1)$$

$$\overline{on} = \frac{x}{\sqrt{3}+1} = \frac{x(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{x(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

oder

$$\text{c)} \ldots \overline{on} = \frac{x}{2}(\sqrt{3}-1)$$

ist und $an = x$ gesetzt wurde, so hat man für die Höhe $gn$ der letzteren Pyramide:

$$\text{a)} \ldots \overline{gn} = k\sqrt{2} - x$$

Analog, wie in nebenstehender Erkl. 522 gezeigt wurde, erhält man für den Radius $Mn$ der Kugel, welche die Pyramide $gABCD$ von innen berührt, in die Höhe $(k\sqrt{2} - x)$ ausgedrückt, die der Gleichung 1) analoge Gleichung:

$$2) \ldots \overline{Mn} = \frac{k\sqrt{2} - x}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Mit Benutzung der vorstehenden Formel 2) ergibt sich aus den Gleichungen 1) und 2) der Aufgabe gemäss für $x$ die Bestimmungsgleichung:

$$3) \ldots 4\pi \cdot \left(\frac{x}{2}(\sqrt{3}-1)\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{k\sqrt{2}-x}{2}(\sqrt{3}-1)\right)^2$$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\left(\frac{x}{2}(\sqrt{3}-1)\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{k\sqrt{2}-x}{2}(\sqrt{3}-1)\right)^2$$

$$\frac{x}{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{k\sqrt{2}-x}{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$x(\sqrt{3}-1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (k\sqrt{2}-x)(\sqrt{3}-1)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (k\sqrt{2} - x)$$

$$x = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}}$$

$$x + \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$x\sqrt{n} + x = k\sqrt{2}$$

$$x(\sqrt{n}+1) = k\sqrt{2}$$

und hieraus erhält man für die gesuchte Entfernung:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{n}+1}$$

**Aufgabe 629.** Man denke sich um drei Eckpunkte eines regulären Oktaeders mit der Kante $k$, welche einer Begrenzungsfläche angehören, drei Kugeln mit dem Radius $k$ konstruiert und einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt dieser drei Kugelflächen als Spitze einer über jener Fläche stehenden Pyramide. In welchem Verhältnis steht das Volumen dieser Pyramide zu dem Volumen des Oktaeders?

**Formeln:**

Für ein Tetraeder:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{k^3}{12}\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 353)}$$

Für ein Oktaeder:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{k^3}{3}\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 361).}$$

**Auflösung.** Da ein gemeinschaftlicher Schnittpunkt der gedachten drei gleichen Kugelflächen, deren Radien $= k$ sind, von den Ecken des gleichseitigen Dreiecks, dessen Seiten $= k$ sind, gleichweit entfernt und diese Entfernungen $= k$ sind, so ist die gedachte Pyramide ein reguläres Tetraeder mit derselben Kante $k$. Durch vorstehende Formeln sind die Volumen beider Polyeder in die Kante $k$ ausgedrückt und man hat hiernach für das gesuchte Verhältnis der Volumen $V$ u. $V_1$:

$$V : V_1 = \frac{k^3}{12}\sqrt{2} : \frac{k^3}{3}\sqrt{2}$$

oder

$$V : V_1 = \frac{1}{12} : \frac{1}{3}$$

mithin

$$\text{A)} \ldots V : V_1 = 1 : 4$$

---

**Aufgabe 630.** In ein reguläres Oktaeder mit der Kante $k$ sei ein Würfel konstruiert, dessen Ecken die Mittelpunkte der Seitenflächen jenes Oktaeders sind. In diesen Würfel sei ein Oktaeder konstruiert, dessen Ecken die Mittelpunkte der Seitenflächen jenes Würfels sind. In letztern Oktaeder sei wieder wie vorhin ein Würfel konstruiert u. s. f. bis ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Volumen aller jener Oktaeder, die Summe der Volumen aller jener Würfel und in welchem Verhältnis stehen diese Summen?

**Formeln:**

Für ein Oktaeder:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{k^3}{3}\sqrt{2} \quad \text{(s. Erkl. 361)}$$

Für ein Hexaeder:

$$\text{II.} \ldots V = k^3 \quad \text{(s. Erkl. 358).}$$

**Auflösung.** Nach vorstehender Formel I hat man für das Volumen $V_1$ des Oktaeders, dessen Kante $k$ ist:

$$1) \ldots V_1 = \frac{k^3}{3}\sqrt{2} \quad \text{(Volumen des 1. Oktaeders)}$$

Bezeichnet man die Kante des 1. Hexaeders, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Begrenzungsflächen jenes Oktaeders liegen, dessen Kante $= k$ ist, mit $k_1$, so hat man nach der in der Auflösung der Aufgabe 627 entwickelten Gleich. a):

$$\text{a)} \ldots k_1 = \frac{k}{3}\sqrt{2} \quad \text{(Kante des 1. Hexaeders)}$$

Nach vorstehender Formel II ist hiernach das Volumen $V_2$ dieses Hexaeders:

$$2) \ldots V_2 = \left(\frac{k}{3}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{k^3}{3^3}(\sqrt{2})^3$$

(Volumen des 1. Hexaeders)

Bezeichnet man die Kante des 2. Oktaeders, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Begrenzungsflächen jenes Hexaeders liegen, dessen Kante $= k_1$ ist, mit $k_2$, so hat man nach der in der Auflösung der Aufgabe 626 entwickelten Gleich. a):

$$\alpha) \ldots k_2 = \frac{k_1}{2}\sqrt{2}$$

oder nach vorstehender Gleichung a):

$$\text{b)} \ldots k_2 = \frac{k}{3 \cdot 2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{k}{6}(\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{k \cdot 2}{6} = \frac{k}{3} \text{ (Kante des 2. Oktaeders)}$$

Nach vorstehender Formel 1) ist hiernach das Volumen $V_3$ dieses 2. Oktaeders:

$$3) \ldots V_3 = \frac{\left(\frac{k}{3}\right)^3}{3}\sqrt{2} = \frac{k^3}{3^4}\sqrt{2}$$

(Volumen des 2. Oktaeders)

Bezeichnet man die Kante des 2. Hexaeders, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Begrenzungsflächen jenes 2. Oktaeders liegen, dessen Kante $= k_2$ ist, mit $k_3$, so hat man analog der vorstehenden Gleichung a):

$$\beta) \ldots k_3 = \frac{k_2}{3}\sqrt{2}$$

oder nach vorstehender Gleichung b):

$$\text{c)} \ldots k_3 = \frac{k}{3 \cdot 3}\sqrt{2} = \frac{k}{3^2}\sqrt{2}$$

(Kante des 2. Hexaeders)

Nach vorstehender Formel 2) ist hiernach das Volumen $V_4$ dieses 2. Hexaeders:

$$4) \ldots V_4 = \left(\frac{k}{3^2}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{k^3}{3^6}(\sqrt{2})^3$$

(Volumen des 2. Hexaeders)

Bezeichnet man die Kante des 3. Oktaeders, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Begrenzungsflächen jenes 2. Hexaeders liegen, dessen Kante $= k_3$ ist, mit $k_4$, so hat man analog der vorstehenden Gleichung $\alpha$):

$$\gamma) \ldots k_4 = \frac{k_3}{2}\sqrt{2}$$

oder nach vorstehender Gleichung c):

$$\text{d)} \ldots k_4 = \frac{k}{3^2 \cdot 2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{k}{3^2 \cdot 2}(\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{k \cdot 2}{3^2 \cdot 2} = \frac{k}{3^2}$$

(Kante des 3. Oktaeders)

Nach vorstehender Formel 1) ist hiernach das Volumen $V_5$ dieses 3. Oktaeders:

$$5) \ldots V_5 = \frac{\left(\frac{k}{3^2}\right)^3}{3} \sqrt{2} = \frac{k^3}{3^6 \cdot 3} \sqrt{2} = \frac{k^3}{3^7} \sqrt{3}$$

(Volumen des 3. Oktaeders)

Bezeichnet man die Kante des 3. Hexaeders, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Begrenzungsflächen jenes 3. Oktaeders liegen, dessen Kante $= k_4$ ist, mit $k_5$, so hat man analog der vorstehenden Gleichung a):

$$\delta) \ldots k_5 = \frac{k_4}{3} \sqrt{2}$$

oder nach vorstehender Gleichung d):

$$e) \ldots k_5 = \frac{k}{3^2 \cdot 3} \sqrt{2} = \frac{k}{3^3} \sqrt{2}$$

(Kante des 3. Hexaeders)

Nach vorstehender Formel 2) ist hiernach das Volumen $V_6$ dieses 3. Hexaeders:

$$6) \ldots V_6 = \left(\frac{k}{3^3} \sqrt{2}\right)^3 = \frac{k^3}{3^9} (\sqrt{2})^3$$

(Volumen des 3. Hexaeders)

u. s. f., u. s. f.

Aus den Gleichungen 1), 3) und 5) lässt sich bereits das Bildungsgesetz der Ausdrücke für die Volumen der aufeinanderfolgenden Oktaeder erkennen; man erhält hiernach für die gesuchte Summe $x$ der Volumen der unzähligen Oktaeder:

$$\text{I)} \ldots x = \frac{k^3}{3} \sqrt{2} + \frac{k^3}{3^4} \sqrt{2} + \frac{k^3}{3^7} \sqrt{3} + \frac{k^3}{3^{10}} \sqrt{3} + \frac{k^3}{3^{13}} \sqrt{3} + \ldots inf$$

Ebenso lässt sich schon aus den Gleichungen 2), 4) und 6) das Bildungsgesetz der Ausdrücke für die Volumen der aufeinanderfolgenden Hexaeder erkennen; man erhält hiernach für die gesuchte Summe $y$ der Volumen der unzähligen Hexaeder:

$$\text{II)} \ldots y = \frac{k^3}{3^3} (\sqrt{2})^3 + \frac{k^3}{3^6} (\sqrt{2})^3 + \frac{k^3}{3^9} (\sqrt{2})^3 + \frac{k^3}{3^{12}} (\sqrt{2})^3 + \frac{k^3}{3^{15}} (\sqrt{2})^3 + \ldots inf$$

Zur Berechnung der gesuchten Summen $x$ und $y$ aus den Gleichungen I) und II) verfahre man wie folgt:

**Erkl. 523.** Die Glieder der unendlichen Summe:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{3^{13}} + \ldots inf$$

bilden in ihrer Aufeinanderfolge die Glieder einer fallenden, unendlichen, geometrischen Progression, indem der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant und zwar gleich dem echten Bruch $\frac{1}{3^3}$ ist.

In dieser geometrischen Reihe ist:

das Anfangsglied $a = \frac{1}{3}$

der Quotient $q = \frac{1}{3^3}$

die Anzahl $n$ der Glieder $= \infty$

Nach der in der Erkl. 357 aufgestellten Summenformel:

$$s = \frac{a}{1 - q}$$

für eine fallende, geometrische Reihe, deren Gliederzahl $n = \infty$ ist, hat man hiernach für die Summe $s$ obiger Reihe:

$$s = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3^3}}$$

oder

$$s = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3^3 - 1}{3^3}} = \frac{1 \cdot 3^3}{3 \cdot (3^3 - 1)} = \frac{3^2}{27 - 1} = \frac{9}{26}$$

**Erkl. 524.** Die Glieder der unendlichen Summe:

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^{12}}+\ldots inf$$

bilden in ihrer Aufeinanderfolge die Glieder einer fallenden, unendlichen, geometrischen Progression, indem der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant und zwar gleich dem echten Bruch $\frac{1}{3^3}$ ist.

In dieser geometrischen Reihe ist:

das Anfangsglied $a=\frac{1}{3^3}$

der Quotient $q=\frac{1}{3^3}$

die Anzahl $n$ der Glieder $=\infty$

Nach der in der Erkl. 357 aufgestellten Summenformel:

$$s=\frac{a}{1-q}$$

für eine fallende geometrische Reihe, deren Gliederzahl $=\infty$ ist, hat man hiernach für die Summe $s$ obiger Reihe:

$$s=\frac{\frac{1}{3^3}}{1-\frac{1}{3^3}}$$

oder

$$s=\frac{\frac{1}{3^3}}{\frac{3^3-1}{3^3}}=\frac{1}{3^3-1}=\frac{1}{27-1}=\frac{1}{26}$$

Aus Gleichung I) erhält man:

$$x=k^3\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{3^{13}}+\ldots inf\right)$$

oder nach der Erkl. 523:

$$\text{A)}\ \ldots\ x=\frac{9}{26}k^3\cdot\sqrt{2}$$

Aus Gleichung II) erhält man ferner:

$$y=k^3(\sqrt{2})^3\cdot\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^{12}}+\cdots inf\right)$$

oder nach der Erkl. 524:

$$\text{B)}\ \ldots\ y=\frac{1}{26}k^3(\sqrt{2})^3$$

Aus den Gleichungen A) und B) erhält man schliesslich für das gesuchte Verhältnis der Summen jener Volumen:

$$x:y=\frac{9}{26}k^3\ \sqrt{2}:\frac{1}{26}k^3(\sqrt{2})^3$$

oder

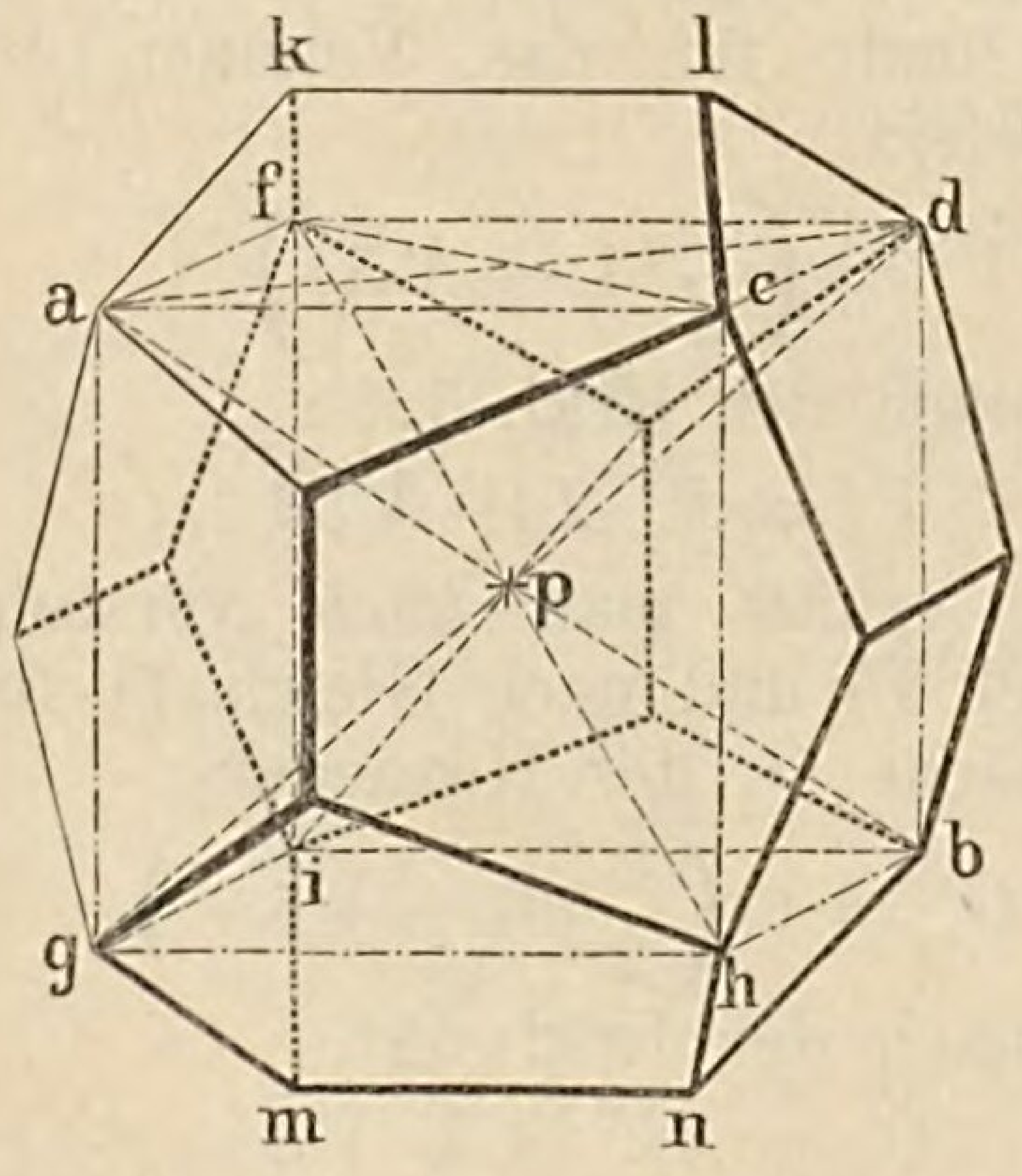
$$x:y=9\ \sqrt{2}:(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}$$

$$\text{C)}\ \ldots\ x:y=9:2$$

---

**Aufgabe 631.** In ein reguläres Dodekaeder kann man ein reguläres Hexaeder so konstruieren, dass die Kanten desselben mit zwölf Flächendiagonalen des Dodekaeders zusammenfallen. In welchem Verhältnis stehen die Volumen und die Oberflächen dieser beiden regulären Polyeder zu einander?

Figur 176.




**Formeln:**

Für ein Dodekaeder:

$$\text{I.}\ \ldots\ V=\frac{k^3}{4}(15+7\sqrt{5})$$

$$\text{II.}\ \ldots\ O=3k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

$$\text{III.}\ \ldots\ D=\frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}\ \text{oder}$$

$$=\frac{k}{2}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$$

(s. Erkl. 363)

Für ein Hexaeder:

$$\left.\begin{array}{l}\text{IV.}\ \ldots\ V=k^3\\ \text{V.}\ \ldots\ O=6\cdot k^2\end{array}\right\}\ \text{(s. Erkl. 358).}$$

**Auflösung.** In Figur 176 stelle $agmnbdlk\ldots$ ein reguläres Dodekaeder dar, ferner stelle in dieser Figur $acdfighb$ das reguläre Hexaeder dar, dessen zwölf Kanten Flächendiagonalen jenes Dodekaeders sind.

Bezeichnet man eine Kante des Dodekaeders mit $k$, so hat man nach vorstehender Formel I für das Volumen $V$ desselben:

**Erkl. 525.** Nebenstehende Gleichung:

$$V_1 = \left(\frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\right)^3$$

reduziert, gibt:

$$V_1 = \frac{k^3}{8}(1+\sqrt{5})^3$$

$$= \frac{k^3}{8}\left(1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 1\cdot(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3\right)$$

$$= \frac{k^3}{8}\left(1+3\sqrt{5}+15+(\sqrt{5})^2\cdot\sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{k^3}{8}(16+3\sqrt{5}+5\sqrt{5})$$

$$= \frac{k^3}{8}(16+8\sqrt{5})$$

$$= \frac{k^3\cdot 8}{8}(2+\sqrt{5})$$

oder

$$V_1 = k^3(2+\sqrt{5})$$

**Erkl. 526.** Nebenstehende Gleichung:

$$O_1 = 6\cdot\left(\frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\right)^2$$

reduziert, gibt:

$$O_1 = 6\cdot\frac{k^2}{4}(1+\sqrt{5})^2$$

$$O_1 = \frac{3k^2}{2}[1^2+2\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2]$$

$$O_1 = \frac{3k^2}{2}(6+2\sqrt{5})$$

$$O_1 = \frac{3k^2}{2}\cdot 2\cdot(3+\sqrt{5})$$

oder

$$O_1 = 3k^2(3+\sqrt{5})$$

**Erkl. 527.** Nebenstehende Proportion:

$$V:V_1 = \frac{k^3}{4}(15+7\sqrt{5}):k^3(2+\sqrt{5})$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$V:V_1 = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}:(2+\sqrt{5})$$

$$V:V_1 = \frac{(15+7\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{4}:(2+\sqrt{5})\cdot(2-\sqrt{5})$$

$$= \frac{30+14\sqrt{5}-15\sqrt{5}-35}{4}:(4-(\sqrt{5})^2)$$

$$= \frac{-\sqrt{5}-5}{4}:(4-5)$$

$$= \frac{-\sqrt{5}-5}{4}:-1$$

$$= \frac{\sqrt{5}+5}{4}:1$$

oder

$$V:V_1 = (5+\sqrt{5}):4$$

1) . . . $V = \frac{k^3}{4}(15+7\sqrt{5})$

ferner hat man nach vorstehender Formel II für die Oberfläche $O$ desselben:

2) . . . $O = 3k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$

Um nun das Volumen und die Oberfläche des erwähnten Hexaeders in die Kante $k$ des Dodekaeders auszudrücken, beachte man, dass eine Körperdiagonale desselben, z. B. $\overline{fh}$ gleich der grössten Körperdiagonale des Dodekaeders ist, dass man somit nach vorstehender Formel III die Relation hat:

a) . . . $\overline{fh} = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}$

und dass ferner:

b) . . . $\overline{fh} = \sqrt{\overline{fc}^2+\overline{ch}^2}$

und dass:

c) . . . $\overline{fc}^2 = \overline{fa}^2+\overline{ca}^2$

ist. Setzt man die noch unbekannte Kante $(\overline{ch}=\overline{fa}=\overline{ca})$ des Hexaeders $=x$, so geht die Gleichung c) über in:

d) . . . $\overline{fc}^2 = x^2+x^2 = 2x^2$

und man erhält in Rücksicht derselben aus Gleichung b):

e) . $\overline{fh} = \sqrt{2x^2+x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$

Aus den Gleichungen a) und e) erhält man nunmehr:

$$x\sqrt{3} = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}$$

oder

f) . . . $x = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})$

Nach vorstehender Formel IV erhält man somit für das Volumen $V_1$ des Hexaeders:

$$V_1 = \left(\frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\right)^3$$

oder nach der Erkl. 525:

3) . . . $V_1 = k^3(2+\sqrt{5})$

ferner erhält man nach vorstehender Formel V) und nach Gleich. f) für die Oberfläche $O_1$ des Hexaeders:

$$O_1 = 6\cdot\left(\frac{k}{2}(1+\sqrt{5})^2\right)$$

oder nach der Erkl. 526:

4) . . . $O_1 = 3k^2(3+\sqrt{5})$

Aus den Gleichungen 1) und 3) erhält man schliesslich für das gesuchte Verhältnis der Volumen:

$$V:V_1 = \frac{k^3}{4}(15+7\sqrt{5}):k^3(2+\sqrt{5})$$

oder nach der Erkl. 527:

A) . . . $V:V_1 = (5+\sqrt{5}):4$

Ferner erhält man aus den Gleichungen 2) und 4) für das gesuchte Verhältnis der Oberflächen:

$$O:O_1 = 3k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:3k^2(3+\sqrt{5})$$

oder nach der Erkl. 528:

B) . . . $O:O_1 = \sqrt{10(5-\sqrt{5})}:4$

**Erkl. 528.** Nebenstehende Proportion:

$$O:O_1 = 3k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:3k^2(3+\sqrt{5})$$

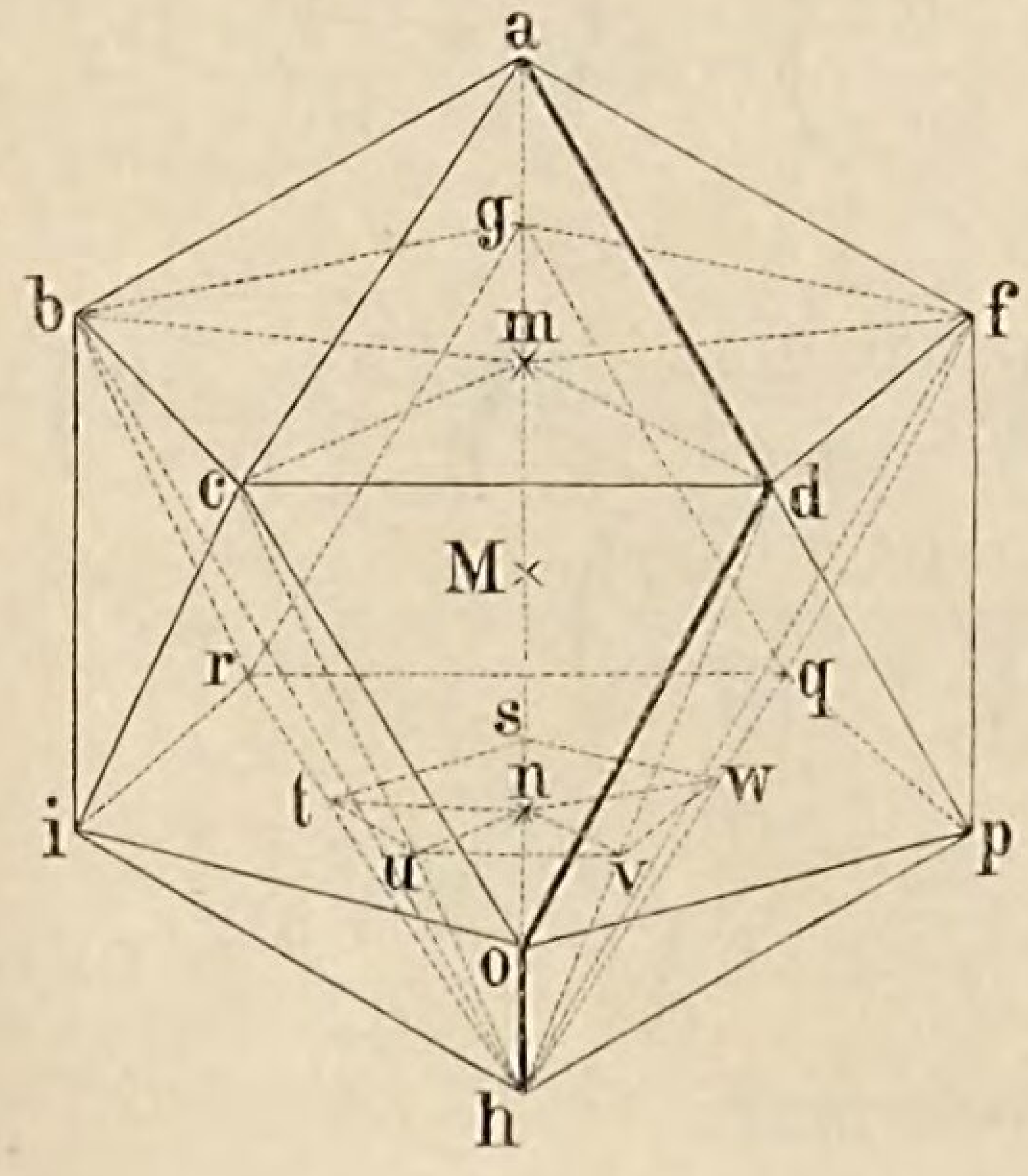
reduziert, gibt:

$$\begin{aligned}
O:O_1 &= \sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:(3+\sqrt{5}) \\
&= \sqrt{5(5+2\sqrt{5}):(3+\sqrt{5})^2} \\
&= \sqrt{5(5+2\sqrt{5}):(9+6\sqrt{5}+5)} \\
&= \sqrt{5(5+2\sqrt{5}):(14+6\sqrt{5})} \\
&= \sqrt{5(5+2\sqrt{5})(14-6\sqrt{5}):(14+6\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})} \\
&= \sqrt{5(70+28\sqrt{5}-30\sqrt{5}-60):[14^2-(6\sqrt{5})^2]} \\
&= \sqrt{5(10-2\sqrt{5}):(196-180)} \\
&= \sqrt{10(5-\sqrt{5}):16} \\
&= \sqrt{10(5-\sqrt{5})}:4
\end{aligned}$$

---

**Aufgabe 632.** Verbindet man die Endpunkte der fünf von einem Eckpunkt eines regulären Ikosaeders ausgehenden Kanten mit dem Eckpunkte des Ikosaeders, welcher jenem diametral gegenüberliegt, so erhält man das Kantennetz einer geraden Pyramide. Denkt man sich ferner durch die Endpunkte der fünf Kanten, welche von letzterer Ecke ausgehen, eine Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene von jener Pyramide einen geraden Pyramidenstumpf ab. Wie gross ist das Volumen desselben, wenn die Kante des Ikosaeders $= k$ ist?

Figur 177.




**Formeln:**

Für ein Pyramidenstumpf:

I. . . . $V = \frac{H}{3}(G+\sqrt{Gg}+g)$

(siehe Erkl. 31)

Für ein Ikosaeder:

II. . . . $D = \frac{k}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

(siehe Erkl. 366).

**Auflösung.** Verbindet man, siehe Fig. 177, die Endpunkte $b$, $c$, $d$, $f$ und $g$ der von der Ecke $a$ ausgehenden Kanten mit der der Ecke $a$ diametral gegenüberliegenden Ecke $h$, so erhält man das Kantennetz der geraden, fünfseitigen Pyramide $hbcdfg$. Denkt man sich ferner durch die Endpunkte $iopqr$ der von der Ecke $h$ ausgehenden Kanten eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe von jener Pyramide den geraden, fünfseitigen Pyramidenstumpf $bcdfgstuvw$ ab, dessen Volumen $x$ aus der Kante $k$ des Ikosaeders zu bestimmen ist.

Zur Bestimmung des gesuchten Volumens $x$ des Pyramidenstumpfs dient vorstehende Formel I; nach dieser Formel muss man zunächst den Inhalt $G$ der

**Erkl. 529.** Die Höhe $\overline{ma}$ der geraden, fünfseitigen Pyramide $abcdfg$ in Figur 177 kann man wie folgt in die Seiten- oder Grundkante $k$ dieser Pyramide ausdrücken:

Aus dem bei $m$ rechtwinkligen Dreieck $amb$ erhält man:

$$a) \ldots \overline{ma} = \sqrt{\overline{ba}^2 - \overline{bm}^2}$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$\overline{ba} = k$$

und berücksichtigt man, dass $\overline{bm}$ der Radius des dem regulären Fünfeck $bcdfg$ umbeschriebenen Kreises ist, dass also nach der Erkl. 257:

$$\overline{bm} = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\overline{ma} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\right)^2}$$

oder

$$\overline{ma} = \sqrt{k^2 - \frac{k^2}{4}\cdot\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \sqrt{k^2\left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$$

$$= k\sqrt{\frac{10-(5+\sqrt{5})}{10}}$$

$$= k\sqrt{\frac{10-5-\sqrt{5}}{10}}$$

mithin

$$b) \ldots \overline{ma} = k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

Fläche $bcdfg$, den Inhalt $g$ der Fläche $stuvw$ und die Höhe $H = \overline{mn}$ bestimmen, was wie folgt geschieht.

Da die Fläche $bcdfg$ ein reguläres Fünfeck mit der Seite $k$ ist, so hat man für den Inhalt $G$ nach der Erkl. 253:

$$1) \ldots G = \frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

Für die Höhe $H = \overline{mn}$ ergibt sich aus der Figur 177:

$$H = \overline{mn} = \overline{ah} - \overline{ma} - \overline{nh}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass:

$$a) \ldots \overline{ah} = \frac{k}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad \text{[s. vorst. Formel 2)]}$$

und dass:

$$b) \ldots \overline{ma} = \overline{nh} = k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

(siehe Erkl. 529)

gesetzt werden:

$$H = \overline{mn} = \frac{k}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 2\cdot k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

oder

$$2)\ H = \overline{mn} = \frac{k}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$$

Für den Inhalt $g$ der Fläche $stuvw$ hat man nach dem in der Erkl. 195 ausgesprochenen, stereometrischen Satz die Relation:

$$\text{I. d. 5-Ecks } bcdfg : \text{I. d. 5-Ecks } stuvw = \overline{mh}^2 : \overline{nh}^2$$

Setzt man in dieselben:

$$c) \ldots \text{I. d. 5-Ecks } bcdfg = G = \frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \quad \text{(siehe Gleich. 1)}$$

$$d) \ldots \text{I. d. 5-Ecks } stuvw = g$$

$$e) \ldots \overline{mh} = \overline{mn} + \overline{nh} = H + \overline{ma}$$

$$= \frac{k}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) + k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \quad \text{[s. d. Gleich. 2) u. b)]}$$

oder

$$= \frac{k}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} + 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$= \frac{k}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$$

und

$$f) \ldots \overline{nh} = \overline{ma} = k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \quad \text{[s. Gleich. b)]}$$

so erhält man:

g) $\frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=\left[\frac{k}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\right]^2:\left(k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2$

**Erkl. 530.** Nebenstehende Gleichung g) reduziert und nach $g$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=\frac{k^2}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2:k^2\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2$$

$$\frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=\frac{1}{4}\left(10+2\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}+4\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right):\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=\left(10+2\sqrt{5}-4\sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}-10\sqrt{5}-10}{10}}+\frac{20-4\sqrt{5}}{10}\right):\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=\left(\frac{100+20\sqrt{5}+20-4\sqrt{5}}{10}-4\sqrt{\frac{40}{10}}\right):\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=\left(\frac{120+16\sqrt{5}}{10}-8\right):\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=\frac{120+16\sqrt{5}-80}{10}:\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}:g=(40+16\sqrt{5}):(5-\sqrt{5})$$

$$g=\frac{k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(5-\sqrt{5})}{8(5+2\sqrt{5})}$$

$$g=\frac{k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(5-\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{8(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}$$

$$g=\frac{k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(25-5\sqrt{5}-10\sqrt{5}+10)}{8[5^2-(2\sqrt{5})^2]}$$

$$g=\frac{k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(35-15\sqrt{5})}{8(25-20)}$$

$$g=\frac{k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(7-3\sqrt{5})\cdot 5}{8\cdot 5}$$

oder

$$g=\frac{k^2}{8}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(7-3\sqrt{5})$$

und hieraus erhält man nach der Erklärung 530:

3) $g=\frac{k^2}{8}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(7-3\sqrt{5})$

Setzt man die mittels der Gleichungen 1), 2) und 3) für $G$, $H$ und $g$ gefundenen Werte in vorstehende Formel 1) ein, so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Pyramidenstumpfs:

$$x=\frac{k}{6}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\left[\frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}+\sqrt{\frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\frac{k^2}{8}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(7-3\sqrt{5})}+\frac{k^2}{8}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}(7-3\sqrt{5})\right]$$

oder

$$x=\frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}+\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\cdot\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}+\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\cdot\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right]$$

Scheidet man den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ aus und zerlegt die Wurzel $\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ wie in der Erkl. 531 angedeutet ist, so erhält man: (Siehe nächste Seite.)

$$x = \frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\cdot\left[1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}\right]$$

oder

$$x = \frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\cdot[6-2\sqrt{5}]$$

$$x = \frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{5(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})^2}$$

$$x = \frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{5(5+2\sqrt{5})(36-24\sqrt{5}+20)}$$

$$x = \frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{5(5+2\sqrt{5})(56-24\sqrt{5})}$$

$$x = \frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{40(5+2\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}$$

$$x = \frac{k^3}{24}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot 2\sqrt{10(35+14\sqrt{5}-15\sqrt{5}-30)}$$

$$x = \frac{k^3}{12}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$$

$$x = \frac{k^3}{12}\left(\sqrt{(10+2\sqrt{5})\cdot 10(5-\sqrt{5})} - 4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot 10(5-\sqrt{5})}\right)$$

$$x = \frac{k^3}{12}\left(\sqrt{10(50+10\sqrt{5}-10\sqrt{5}-10)} - 4\cdot\sqrt{25-5\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}\right)$$

$$x = \frac{k^3}{12}\left(\sqrt{400} - 4\sqrt{30-10\sqrt{5}}\right)$$

$$x = \frac{k^3}{12}\left(20 - 4\sqrt{10(3-\sqrt{5})}\right)$$

mithin:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{k^3}{3}\left(5 - \sqrt{10(3-\sqrt{5})}\right)$$

**Erkl. 531.** Zerlegt man die Wurzel

$$\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$$

nach der Formel:

$$\sqrt{m\pm\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-n}} \pm \sqrt{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-n}}$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen u. Wurzeln)

in die Summe zweier Quadratwurzeln, indem man in dieser Formel:

$m = \frac{7}{2}$ und

$\sqrt{n} = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2}$, also $n = \frac{9\cdot 5}{4} = \frac{45}{4}$ setzt, so

erhält man:

$$\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{45}{4}}} - \sqrt{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{45}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{4}}} - \sqrt{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4}+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$$

oder

$$\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 633.** Wie gross ist das Volumen des Kegels, welcher einem regulären Tetraeder mit der Kante $k$ umbeschrieben ist?

**Andeutung.** Die Aufgaben 633 bis 657 sind im allgemeinen analog den gelösten Aufgaben 619 bis 632 zu lösen.

---

**Aufgabe 634.** In welchem Verhältnis stehen die Volumen zweier Kegel, von welchen der eine einem regulären Tetraeder mit der Kante $k$ umbeschrieben, der andre demselben Tetraeder aber einbeschrieben ist?

---

**Aufgabe 635.** Durch ein reguläres Tetraeder, dessen Kante $= k$ ist, sei parallel zu einer Begrenzungsfläche eine Ebene gelegt, welche die Höhe halbiert. Wie gross ist das Volumen des abgestumpften Kegels, dessen Grundkreise der erhaltenen Schnittfigur und jener Begrenzungsfläche einbeschrieben sind?

---

**Aufgabe 636.** Einem regulären Tetraeder sei eine Kugel einbeschrieben, darauf sei in jede der Tetraederecken wieder eine Kugel konstruiert, welche die erstere und die drei Flächen der Ecke berührt, sodann sei abermals in jede Ecke eine weitere Kugel konstruiert, welche die vorige und die drei Flächen der Ecke berührt u. s. f. bis ins Unendliche. Wie verhält sich das Volumen der ersteren Kugel zur Summe der Volumen aller folgenden Kugeln?

**Andeutung.** Analog den gelösten Aufgaben 511 und 630.

---

**Aufgabe 637.** In und um ein reguläres Tetraeder ist eine Kugel beschrieben. Eine dritte Kugel ist ferner so konstruiert, dass sie eine Fläche des Tetraeders und die demselben umbeschriebene Kugel berührt, dabei aber die grösstmögliche Kugel ist, welche auf solche Weise konstruiert gedacht werden kann. Man soll das Verhältnis des Radius dieser dritten Kugel zu dem Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel bestimmen und dasselbe in Worten ausdrücken.

---

**Aufgabe 638.** In einem Würfel sei ein reguläres Tetraeder so konstruiert, dass ein Eckpunkt der letzteren auf einem Eckpunkt des Würfels und die übrigen Ecken des Tetraeders auf den von der gegenüberliegenden Würfelecke ausgehenden Flächendiagonalen liegen. In welchem Verhältnis stehen die Volumen beider Körper?

---

**Aufgabe 639.** In ein reguläres Hexaeder mit der Kante $k$ denke man sich eine Kugel, in diese wieder ein Hexaeder u. s. f. bis ins Unendliche konstruiert; wie gross ist die Summe der Volumen der Kugeln und wie gross die Summe der Volumen der Hexaeder?

**Andeutung.** Diese und die folgenden Aufgaben sind analog den gelösten Aufgaben 630 und 511 zu lösen.

---

**Aufgabe 640.** In ein reguläres Hexaeder mit der Kante $k$ denke man sich einen Cylinder so konstruiert, dass seine Achse in eine Diagonalachse des Hexaeders zu liegen kommt und dass

seine Grundflächen je drei Seitenflächen der letzteren berühren und dass sich in den Cylinder wieder ein reguläres Hexaeder konstruieren lässt, von welchem zwei Flächen den Grundkreisen des Cylinders einbeschrieben sind. In das neue Hexaeder denke man sich wieder einen Cylinder wie vorhin konstruiert u. s. f., bis ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Volumen aller dieser Cylinder und wie gross die der Würfel?

---

**Aufgabe 641.** Ein vertikal stehender gerader, hohler Cylinder, dessen Lichte-Weite $D = 14$ cm beträgt, sei bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllt. Um wie viel wird das Wasser in dem Cylinder steigen, wenn ein in das Wasser geworfener Körper, der die Form eines regulären Tetraeders mit der Kante $k = 8$ cm hat, in demselben ganz untersinkt?

---

**Aufgabe 642.** Denkt man sich die Höhe eines regulären Tetraeders über die Grundfläche verlängert und von einem auf dieser Verlängerung liegenden Punkte gerade Linien durch die Eckpunkte der Grundfläche bis zu einer durch die Spitze des Tetraeders parallel zu jener Grundfläche gedachten Ebene gezogen, so bilden diese Linien das Kantennetz einer geraden, dreiseitigen Pyramide. In welcher Entfernung von der erwähnten Grundfläche des Tetraeders ist jener Punkt anzunehmen, damit die hiernach entstehende Pyramide ein 10 mal so grosses Volumen erhält als das Tetraeder?

---

**Aufgabe 643.** In einem Rhomboeder, dessen Kante $= k$ ist, verhalte sich die kürzere Diagonale einer Seitenfläche zu der längeren wie $1:2$; wie gross ist das Volumen des Rhomboeders?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 624.

---

**Aufgabe 644.** Wie gross ist das Volumen eines Rhomboeders, wenn eine Begrenzungsfläche desselben den Inhalt $J$ hat und die kürzere Diagonale einer Begrenzungsfläche $= d$ ist?

---

**Aufgabe 645.** Die drei aus einem regulären Tetraeder, einem regulären Oktaeder und einem regulären Hexaeder ausgearbeiteten grössten Kugeln verhalten sich ihren Volumen nach wie $1:2:3$. In welchem Verhältnis stehen die Volumen jener drei regulären Polyeder?

---

**Aufgabe 646.** In einen regulären Hexaeder, dessen Kante $= k$ ist, sei ein reguläres Oktaeder so gestellt, dass seine Ecken die Mittelpunkte der Würfelflächen sind. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen und in welchem Verhältnis stehen die Volumen beider Körper zu einander?

---

**Aufgabe 647.** Einem Oktaeder mit der Kante $k$ ist ein reguläres Hexaeder so einbeschrieben, dass die Ecken desselben in den Oktaederkanten liegen. Wie gross ist das Volumen des Hexaeders?

---

**Aufgabe 648.** Einem regulären Oktaeder ist ein gerades, quadratisches Prisma so einbeschrieben, dass die Ecken des letzteren auf den Kanten liegen, welche von je zwei gegenüberliegenden Ecken des Oktaeders ausgehen. Wie gross ist das Volumen dieses Prismas, wenn eine Seitenkante desselben doppelt so lang als eine Grundkante ist und wenn die Oberfläche $= 200$ qcm beträgt?

---

**Aufgabe 649.** Konstruiert man über jeder Fläche eines regulären Oktaeders als Grundfläche eine gerade Pyramide so, dass diese acht Pyramiden gleiche Höhe haben und dass je zwei der in einer Oktaederkante zusammenstossenden Seitenflächen dieser Pyramiden in einerlei Ebenen liegen, so entsteht ein sog. Rhomboeder. Wie gross sind die Höhen jener Pyramiden; wie gross sind die Kanten des entstandenen Rhomboeders und welches ist das Volumen desselben, wenn die Kante des Oktaeders $= k$ ist?

**Andeutung.** Analog der gelösten Aufg. 624.

---

**Aufgabe 650.** Welches Volumen und welche Oberfläche hat das Oktaeder, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen eines regulären Hexaeders mit der Kante $k$ sind?

---

**Aufgabe 651.** In ein reguläres Oktaeder ist ein reguläres Hexaeder so gestellt, dass seine Eckpunkte auf den Kanten liegen, welche von zwei gegenüberliegenden Ecken des Oktaeders ausgehen. In welchem Verhältnis stehen die Kanten beider regulären Polyeder?

---

**Aufgabe 652.** Um ein reguläres Oktaeder mit der Kante $k$ ist ein gerader Cylinder so konstruiert, dass zwei gegenüberliegende Ecken des Oktaeders die Mittelpunkte der Grundflächen bilden und die übrigen Ecken in der Mantelfläche des Cylinders liegen. Wie gross ist das Volumen dieses Cylinders und in welchem Verhältnis steht dasselbe zu dem Volumen der dem regulären Oktaeder einbeschriebenen Kugel?

---

**Aufgabe 653.** In ein reguläres Oktaeder sind zwei gerade Cylinder konstruiert. Der erste dieser Cylinder hat die Eigenschaft, dass auf den Peripherien seiner Grundkreise die Mittelpunkte der acht Begrenzungsflächen des Oktaeders liegen; der zweite Cylinder hingegen hat die Eigenschaft, dass auf den Peripherien seiner Grundkreise die Mittelpunkte der acht Kanten des Oktaeders liegen, welche von zwei gegenüberliegenden Ecken ausgehen. In welchem Verhältnis stehen die Mantelflächen und die Kubikinhalte dieser beiden Cylinder?

---

**Aufgabe 654.** In ein reguläres Dodekaeder mit der Kante $k$ ist ein gerader Pyramidenstumpf so konstruiert, dass dessen Deckfläche eine Begrenzungsfläche des Dodekaeders ist und dass dessen Grundfläche die Schnittfigur ist, welche man erhält, wenn man durch die Endpunkte der fünf Kanten, welche von den Ecken jener Begrenzungsflächen ausgehen, eine Ebene legt. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche dieses Stumpfs.

**Aufgabe 655.** Verbindet man die Schwerpunkte je zweier aneinanderstossender Flächen eines regulären Ikosaeders, so erhält man das Kantennetz eines regulären Pentagonaldodekaeders. In welchem Verhältnis stehen die Volumen beider Körper?

**Aufgabe 656.** Durch fünf von einer Ecke eines regulären Ikosaeders ausgehenden Kanten sei eine Ebene so gelegt, dass eine gerade Pyramide mit der Seitenkante $a$ entsteht. Wie gross ist der Radius der dieser Pyramide einbeschriebenen Kugel?

**Aufgabe 657.** Durch die Endpunkte der fünf von einer Ecke eines regulären Ikosaeders ausgehenden Kanten ist eine Ebene gelegt. Wie gross ist das Volumen der hierdurch abgeschnittenen, fünfseitigen Pyramide, wenn der Radius $R$ der dem Ikosaeder einbeschriebenen Kugel gegeben ist?

# X. Aufgaben über die einfachen, schiefen Körper; über die einfachen, schiefen Körper in Verbindung mit Schnittebenen (Prismenstumpf und Cylinderhuf) und Aufgaben über solche Körper, welche sich durch Zerlegung auf einfache, schiefe Körper zurückführen lassen.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 658.** Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 2$ m u. $b = 3$ m. Die Spitze der Pyramide liege senkrecht über dem Scheitel des rechten Winkels dieses Dreiecks und ihre Entfernung von dem nicht in dem Scheitel des rechten Winkels liegenden Eckpunkt der Kathete $a$ sei $c = 5$ m. Wie gross ist das Volumen der Pyramide?

**Formel:**

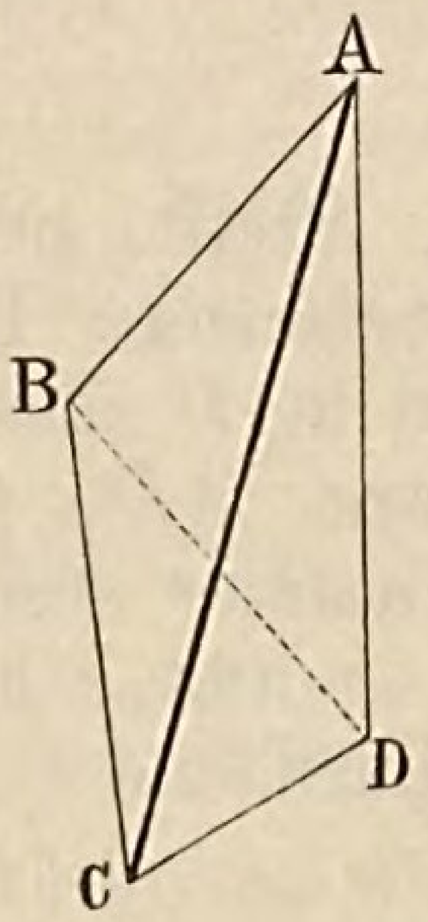
Für eine schiefe Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 532).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ der schiefen Pyramide, siehe Fig. 178, dient vorstehende Formel.

In derselben bedeutet $G$ den Inhalt der Grundfläche und $H$ die Höhe. Da

Figur 178.




**Erkl. 532.** In Antwort der Frage 14 auf Seite 21 im 1. Buch der Körperberechnungen ist bereits erwähnt, dass man jede schiefe Pyramide in eine gerade Pyramide verwandeln kann, welche mit ersterer inhaltsgleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Die im 1. Buch der Körperberechnungen aufgestellte Kubikinhaltsformel für eine gerade Pyramide gilt somit auch zur Berechnung des Volumens einer beliebigen, schiefen Pyramide.

Bezeichnet man also den Inhalt der Grundfläche einer schiefen Pyramide mit $G$, die Höhe derselben mit $H$ und das Volumen mit $V$, so besteht hiernach die Formel:

$$V = \frac{G \cdot H}{3}$$

**Erkl. 533.** Zur Berechnung der Mantelflächen und der Oberflächen von schiefen Pyramiden kann man keine allgemein gültige Formeln aufstellen, indem die Grundflächen beliebige irreguläre oder reguläre ebene Figuren sein können und die Seitenflächen verschiedene schiefwinklige Dreiecke sind, deren Anzahl gleich der Zahl der Seiten jener Grundflächen ist.

Die Berechnung der Mantelflächen und der Oberflächen von schiefen Pyramiden lässt sich nur in einigen besonderen Fällen ohne Anwendung der Trigonometrie ausführen und setzt in den weitaus meisten Fällen die Kenntnis der ebenen Trigonometrie voraus.

Diesbezügliche Aufgaben findet man in dem 2. Teil des 2. Buchs der Körperberechnungen.

**Hülfsrechnung:**

$\sqrt{21} = 4{,}5825$
16
8 | 500
425
90 | 7500
7264
916 | 23600
18324
9164 | 527600
458225
69375

nun die Grundfläche in der Figur 178 das bei $D$ rechtwinklige Dreieck $BDC$ ist, so hat man:

$$G = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{BD}}{2}$$

oder, da $\overline{CD} = a$ und $\overline{BD} = b$ ist:

$$\text{a)} \ldots G = \frac{a \cdot b}{2}$$

Ferner erhält man für die Höhe $\overline{AD}$ aus dem bei $D$ rechtwinkligen Dreieck $ADC$ die Relation:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}$$

oder, da

$\overline{AD} = H$, $\overline{AC} = c$ und $\overline{CD} = a$ ist:

$$\text{b)} \ldots H = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Für das gesuchte Volumen $V$ ergibt sich also:

$$\text{A)} \ldots V = \frac{a \cdot b}{6} \cdot \sqrt{c^2 - a^2}$$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das gegebene Zahlenbeispiel erhält man somit:

$$V = \frac{2 \cdot 3}{6} \cdot \sqrt{5^2 - 2^2}$$

oder

$$V = \sqrt{25 - 4}; \; V = \sqrt{21}$$

mithin nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$\text{B)} \ldots V = 4{,}583 \text{ cbm}$$

**Aufgabe 659.** Wie gross ist die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide, bei welcher drei an einer Ecke zusammenstossende Kanten senkrecht zu einander stehen und bezw. die Längen $a$, $b$ und $c$ haben?

**Auflösung.** Stellt, siehe Figur 178 $ABCD$ die dreiseitige Pyramide dar, von welcher die in $D$ zusammenstossenden Seitenkanten $AD$, $CD$ und $BD$ senkrecht zu einander stehen und bezw. die Längen $a$, $b$ und $c$ haben, so hat man für die Oberfläche $O$ die Relation:

$$1) \ldots O = \triangle BDC + \triangle ADC + \triangle ADB + \triangle ABC$$

Da nun $\triangle BDC$ ein bei $D$ rechtwinkliges Dreieck ist, so hat man:

$$\triangle BDC = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{CD}}{2}$$

oder, da: $\overline{BD} = c$ und $\overline{CD} = b$ ist:

$$2) \ldots \triangle BDC = \frac{c \cdot b}{2}$$

Da ebenso $\triangle ADC$ ein bei $D$ rechtwinkliges ist, so hat man:

$$\triangle ADC = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{CD}}{2}$$

oder, da: $\overline{AD} = a$ und $\overline{CD} = b$ ist:

$$3) \ldots \triangle ADC = \frac{a \cdot b}{2}$$

Da ferner auch $\triangle ADB$ ein bei $D$ rechtwinkliges ist, so hat man:

$$\triangle ADB = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}{2}$$

oder, da: $\overline{AD} = a$ und $\overline{BD} = c$ ist:

$$4) \ldots \triangle ADB = \frac{a \cdot c}{2}$$

Um schliesslich auch den Inhalt des Dreiecks $ABC$ zu bestimmen, muss man zunächst die Seiten desselben berechnen; man erhält:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2}$$

oder, wenn $\overline{BC} = d$ gesetzt und berücksichtigt wird, dass $\overline{BD} = c$ und $\overline{CD} = b$ ist:

$$\alpha) \ldots d = \sqrt{c^2 + b^2}$$

Ferner erhält man:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$$

oder, wenn $\overline{AC} = f$ gesetzt und berücksichtigt wird, dass $\overline{AD} = a$ und $\overline{CD} = b$ ist:

$$\beta) \ldots f = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Erkl. 534.** Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks bezw. mit $a$, $b$ und $c$, die halbe Summe derselben mit $s$ und den Inhalt mit $J$, so besteht die Relation:

$$1) \ldots J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

in welcher

$$2) \ldots s = \frac{a+b+c}{2}$$ ist (s. Erkl. 535)

Für den Fall, dass:

$a = d = \sqrt{b^2 + c^2}$ [s. nebenst. Gleich. $\alpha$)]

$b = f = \sqrt{a^2 + b^2}$ [ „ „ „ $\beta$)]

und

$c = g = \sqrt{a^2 + c^2}$ [ „ „ „ $\gamma$)]

ist, erhält man:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{d+f+g}{2} = \frac{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}}{2}$$

$$\text{b)}\ s-a = s-d = \frac{d+f+g}{2} - d = \frac{f+g-d}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}}{2}$$

$$\text{c)}\ s-b = s-f = \frac{d+f+g}{2} - f = \frac{d+g-f}{2} = \frac{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

und

$$\text{d)}\ s-c = s-g = \frac{d+f+g}{2} - g = \frac{d+f-g}{2} = \frac{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}}{2}$$

und vorstehende Gleichung 1) geht über in:

und schliesslich erhält man für die dritte Dreiecksseite:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2}$$

oder, wenn $\overline{AB} = g$ gesetzt und berücksichtigt wird, dass $\overline{AD} = a$ und $\overline{BD} = c$ ist:

$$\gamma) \ldots g = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Nach der Erkl. 534 erhält man für den Inhalt des Dreiecks $ABC$ in die drei Seiten $d$, $f$ und $g$ ausgedrückt:

$$5)\ \triangle ABC^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

Aus den Gleichungen 1) bis 5) ergibt sich für die gesuchte Oberfläche $O$:

$$O = \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

oder

$$\text{A)} \ldots O = \frac{1}{2}\left(ab + ac + bc + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\right)$$

$$J = \sqrt{\frac{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}}{2} \cdot}$$
$$\sqrt{\frac{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}}{2}}$$

und hieraus erhält man:

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{\left[\left(\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2}\right) + \sqrt{a^2+b^2}\right] \cdot \left[\left(\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2}\right) - \sqrt{a^2+b^2}\right] \cdot}$$
$$\sqrt{\left[\sqrt{a^2+b^2} + \left(\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}\right)\right] \cdot \left[\sqrt{a^2+b^2} - \left(\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}\right)\right]}$$

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{\left[\left(\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2}\right)^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 - \left(\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}\right)^2\right]}$$

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{\left[b^2 + c^2 + 2\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)} + a^2 + c^2 - a^2 - b^2\right] \cdot}$$
$$\sqrt{\left[a^2 + b^2 - a^2 - c^2 + 2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - b^2 - c^2\right]}$$

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{2\left[c^2 + \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right] \cdot -2\left[c^2 - \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right]}$$

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{-4\left[(c^2)^2 - \left(\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right)^2\right]}$$

$$J = \frac{2}{4}\sqrt{-\left[c^4 - (a^2+c^2)(b^2+c^2)\right]}$$

$$J = \frac{1}{2}\sqrt{-(c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2 - c^4)}$$

$$J = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

**Aufgabe 660.** Wie gross ist das Volumen einer dreiseitigen Pyramide (eines sogenannten Tetraeders, Vierflächners), bei welcher drei von einer Ecke ausgehenden Kanten einander gleich und zwar $= k$ sind, während die drei übrigen Kanten, bezw. die Längen $a$, $b$ und $c$ haben?

**Erkl. 535.** Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks mit $a$, $b$ und $c$ und setzt:

$$\text{a)} \ldots \frac{a+b+c}{2} = s$$

so hat man zur Berechnung des Inhalts $J$ jenes Dreiecks die Relation:

$$1) \ldots J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

oder wenn man für $s$ den Wert aus Gleich. a) substituiert:

$$J = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)} \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

oder

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

oder

$$2)\ J = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der ebenen Figuren handelt.

**Erkl. 536.** Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks mit $a$, $b$ u. $c$, den Radius des demselben umbeschriebenen Kreises mit $R$, den Inhalt des Dreiecks mit $J$, so besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots J = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der ebenen Figuren handelt.)

Setzt man in derselben:

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}$$

(s. Erkl. 535)

so erhält man:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

oder

$$\text{b)}\ R = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}}$$

**Formel:**

Für eine schiefe Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 532)}$$

**Auflösung.** Betrachtet man den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der drei gleichen Kanten als die Spitze der Pyramide, so ist die Grundfläche derselben ein Dreieck, dessen Seiten $= a$, $b$ und $c$ sind.

Für den Inhalt $G$ dieser Grundfläche hat man nach der Erkl. 535:

$$\text{a)}\ G = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Die Höhe $H$ der gedachten schiefen, dreiseitigen Pyramide findet man auf folgende Weise:

Da die drei Seitenkanten einander gleich, nämlich sämtlich $= k$ sind, so muss die Spitze der Pyramide senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises liegen, welchen man der Grundfläche umbeschrieben denken kann; denn in diesem Falle bilden jene drei Seitenkanten mit der Höhe $H$ und dem Radius dieses Kreises kongruente, rechtwinklige Dreiecke. Da in jedem dieser Dreiecke die Höhe $H$ der Pyramide die eine Kathete, der Radius $R$ des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises die andre Kathete und eine Seitenkante $k$ die Hypotenuse ist, so besteht die Relation:

$$\text{b)} \ldots H = \sqrt{k^2 - R^2}$$

Drückt man nunmehr den Radius $R$ des dem Dreieck mit den Seiten $a$, $b$ und $c$ umbeschriebenen Kreises in diese Seiten aus, so erhält man nach der in der Erkl. 536 aufgestellten Gleichung b):

$$\text{c)}\ R = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$$

Aus den Gleichungen b) und c) erhält man:

$$\text{d)} \ldots H = \sqrt{k^2 - \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{\left(\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\right)^2}}$$

Substituiert man nunmehr in vorstehender Formel die für $G$ und $H$ mittels den Gleichungen a) und d) ge-

fundenen Werte, so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ der Pyramide:

$$x = \frac{1}{3 \cdot 4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \cdot \sqrt{k^2 - \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{(\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)})^2}}$$

oder

$$x = \frac{1}{12} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \cdot \frac{\sqrt{k^2 (\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)})^2 - a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$$

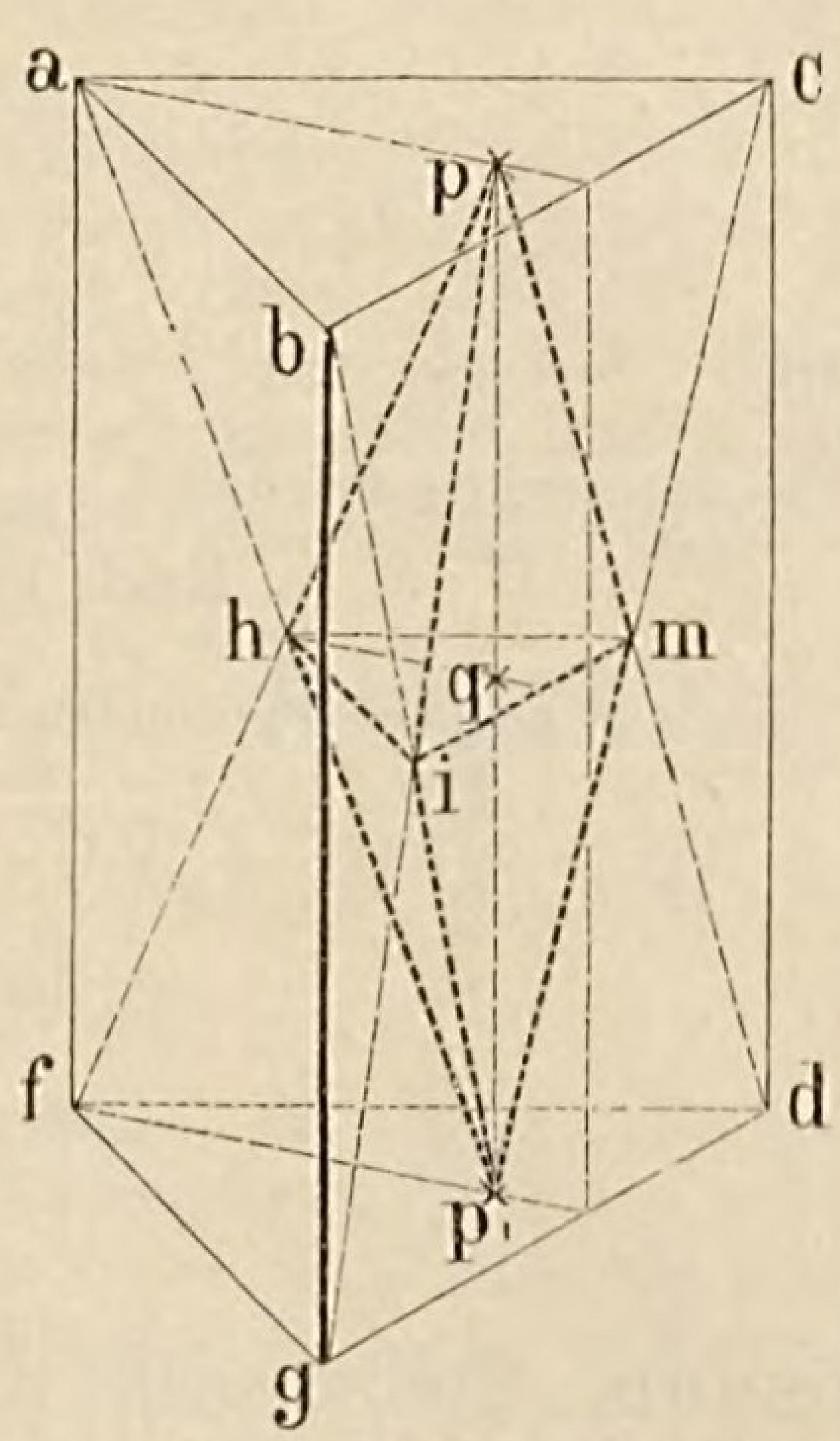
mithin

$$\text{A)} \ldots x = \frac{1}{12} \sqrt{k^2 (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) - a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$$

---

**Aufgabe 661.** Innerhalb eines geraden, dreiseitigen Prismas sei eine Linie parallel zu der Achse des Prismas gezogen, und die Durchschnittspunkte dieser Linie mit den Grundflächen des Prismas seien je mit den Ecken der gegenüberliegenden Grundfläche verbunden, wodurch man das Kantennetz zweier sich durchdringenden Pyramiden erhält. In welchem Verhältnis steht das Volumen des beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Körperteils zu dem Volumen des Prismas.

Figur 179.




**Formeln:**

Für ein gerades Prisma:

I. . . . $V = G \cdot H$ (s. Erkl. 1)

Für eine Doppelpyramide:

II. . . . $V = \frac{G \cdot A}{3}$ (s. Erkl. 537).

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 179, $abcdfg$ das gegebene dreiseitige, gerade Prisma, $pp_1$ die beliebig gezogene Linie, welche parallel der Achse, bezw. parallel den Seitenkanten des Prismas ist und man denkt sich $p$ mit $f$, $g$ und $d$, ebenso $p_1$ mit $a$, $b$ und $c$ verbunden, so erhält man zwei schiefe Pyramiden, deren Seitenflächen sich bezw. in den Linien $hi$, $im$ und $mh$ durchschneiden. Bezeichnet man nun den Inhalt der Durchschnittsfläche $him$ beider Pyramiden mit $D$, den Inhalt einer der Grundflächen des Prismas mit $G$, die Strecke $pp_1$ mit $H$ und berücksichtigt man, dass der Körperteil, welchen jene beiden Pyramiden gemeinschaftlich haben, aus den schiefen Pyramiden $phim$ und $p_1him$ zusammengesetzt ist, so hat man nach vorstehenden Formeln für das gesuchte Verhältnis der Volumen $V$ und $V_1$ des Prismas und dieses gemeinsamen Körperstücks, die Relation:

**Erkl. 537.** Bezeichnet man den Inhalt der gemeinschaftlichen Grundfläche zweier Pyramiden, welche zusammen eine Doppelpyramide bilden, deren Höhen in ein und derselben Geraden liegen, mit G, die Achse dieser Doppelpyramide, d. i. die Entfernung der beiden Spitzen mit $A$ und das Volumen mit $V$, so besteht die Relation:

$$V = \frac{G \cdot A}{3}$$

**Beweis:** Für das Volumen $v$ der Pyramide $phim$ in der Fig. 179 hat man z. B. nach der in der Erkl. 532 aufgestellten Formel:

$$V = \frac{G \cdot H}{3}$$

wenn man den Inhalt der Grundfläche $him$ mit $G$ bezeichnet:

$$\text{a)} \ldots v = \frac{G \cdot \overline{pq}}{3}$$

Ebenso hat man für das Volumen $v_1$ der Pyramide $p_1him$:

$$\text{b)} \ldots v_1 = \frac{G \cdot \overline{p_1q}}{3}$$

Durch Addition der Gleichungen a) und b) erhält man für das Volumen $V$ der Doppelpyramide $phimp_1$:

$$V = \frac{G \cdot \overline{pq}}{3} + \frac{G \cdot \overline{p_1q}}{3}$$

oder

$$V = \frac{G}{3}(\overline{pq} + \overline{p_1q})$$

und wenn man berücksichtigt, dass $\overline{pq} + \overline{p_1q} = \overline{pp_1}$ oder $= A$, nämlich gleich der Achse der Doppelpyramide ist:

$$1) \ldots V = \frac{G \cdot A}{3}$$

$$V : V_1 = G \cdot H : \frac{D \cdot H}{3}$$

oder

$$\text{a)} \ldots V : V_1 = G : \frac{D}{3}$$

Ferner hat man nach dem in der Erkl. 195 ausgesprochenen Lehrsatz die Relation:

$$\triangle fgd : \triangle him = \overline{p_1p}^2 : \overline{qp}^2$$

oder, da $\triangle fgd = G$

$\triangle him = D$

$\overline{p_1p} = H$ und

$\overline{qp} = \frac{H}{2}$ ist, wie man sich leicht aus der Figur überzeugen kann, die Relation:

$$G : D = H^2 : \frac{H^2}{4}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{b)} \ldots D = \frac{1}{4} G$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man hiernach:

$$V : V_1 = G : \frac{G}{12}$$

oder

$$\text{A)} \ldots V : V_1 = 12 : 1$$

---

**Aufgabe 662.** In einem Prisma sei eine zu den Seitenkanten parallele Gerade gezogen, welche die eine Grundfläche in einem Punkt $A$, die andre in einem Punkt $B$ schneidet. Von jedem dieser Punkte aus seien Strahlen durch alle Eckpunkte der zugehörigen Grundfläche gezogen, und man habe die von $A$ ausgehenden Strahlen zwischen $A$ und den betreffenden Eckpunkten, die von $B$ ausgehenden auf den Verlängerungen über die Eckpunkte hinaus, sämtlich in gleichem Verhältnis $m : n$ geteilt, die Teilpunkte in jeder der beiden Grundflächen den Seiten des letzteren entsprechend verbunden und die entstandenen Figuren zu Grundflächen einer abgestumpften Pyramide gemacht. Für welche Werte von

**Formeln:**

Für ein gerades Prisma:

$$\text{I.} \ldots V = G \cdot H \text{ (s. Erkl. 1)}$$

Für einen schiefen Pyramidenstumpf:

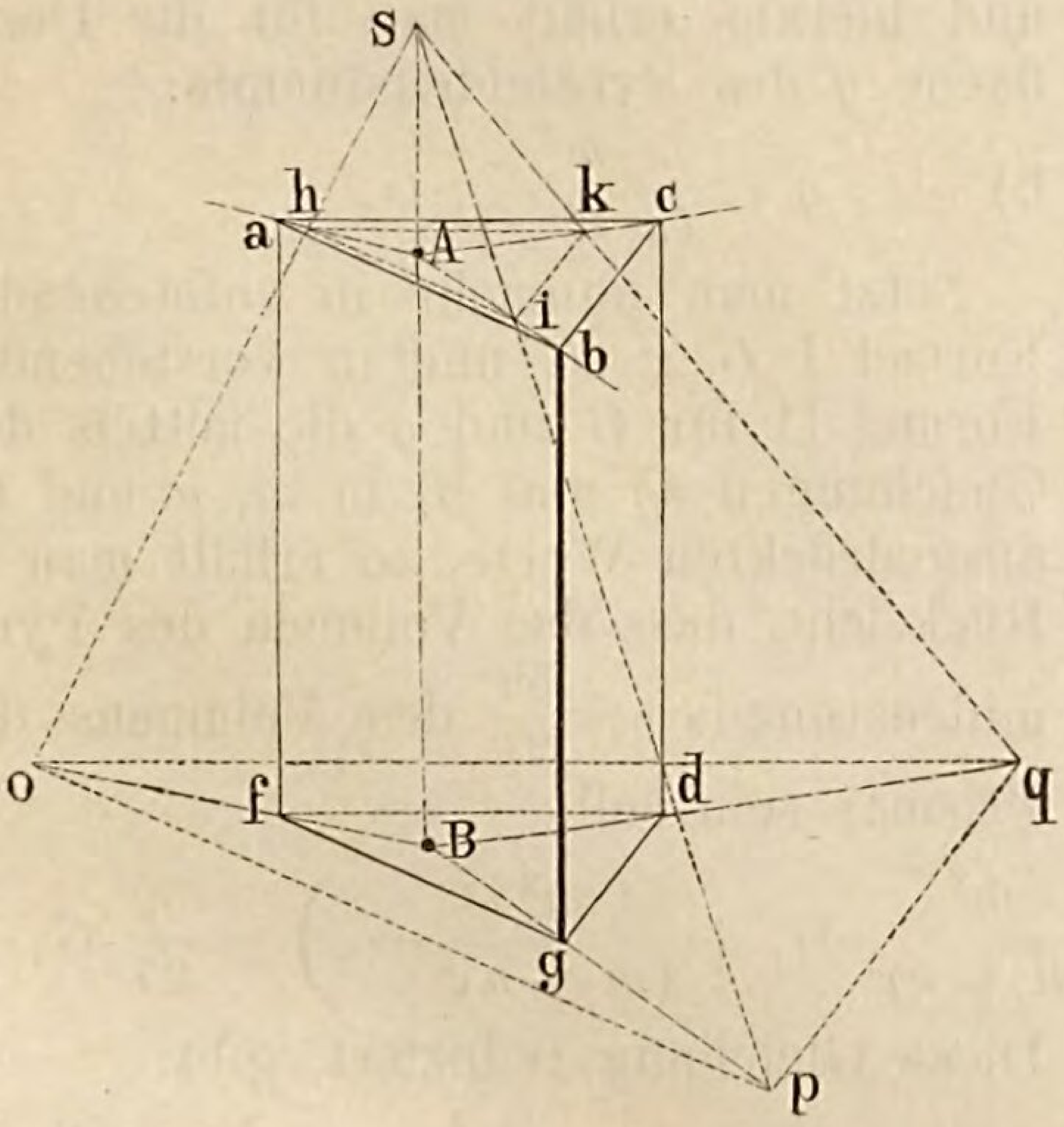
$$\text{II.} \ldots V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{G \cdot g} + g)$$

(s. Erkl. 538).

**Auflösung.** Stellt, siehe Figur 180, $abcdfg$ ein beliebiges Prisma dar, sind ferner $A$ und $B$ die Durchschnittspunkte einer beliebigen, zu den Seitenkanten

$m:n$ beträgt der Inhalt der letzteren $\frac{52}{27}$ des Inhalts des Prismas?

Figur 180.




**Erkl. 538.** Die im 1. Buch der Körperberechnungen aufgestellte Kubikinhaltsformel für einen geraden Pyramidenstumpf gilt auch für einen schiefen Pyramidenstumpf, indem man einen schiefen Pyramidenstumpf als die Differenz zweier schiefen Pyramiden betrachten kann, ähnlich wie man einen geraden Pyramidenstumpf als die Differenz zweier geraden Pyramiden betrachtete, und die Kubikinhaltsformel für eine schiefe Pyramide dieselbe als für eine gerade Pyramide ist (s. Erkl. 532).

Bezeichnet man also den Inhalt der grösseren Grundfläche eines schiefen Pyramidenstumpfs mit $G$, den Inhalt der kleineren Grundfläche mit $g$, die Höhe desselben mit $H$ und das Volumen mit $V$, so besteht hiernach die Formel:

$$V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

**Erkl. 539.** Was in der Erkl. 533 in bezug auf die Berechnung der Mantel- und der Oberfläche einer schiefen Pyramide gesagt ist, gilt auch in bezug auf die Berechnung eines schiefen Pyramidenstumpfs.

des Prismas parallel gezogenen Geraden mit den Grundflächen des Prismas, und man denkt sich durch $A$ und die Eckpunkte der Grundfläche $abc$, ebenso durch $B$ und die Eckpunkte der Grundfläche $fgd$ Strahlen gezogen, dann auf den Strahlen, welche in der oberen Grundfläche des Prismas liegen, die in dieser Grundfläche liegenden Punkte $h$, $i$ und $k$, so gewählt, dass:

$$\frac{hA}{ha} = \frac{iA}{ib} = \frac{kA}{kc} = \frac{m}{n}$$

ist, in analoger Weise auf den Strahlen, welche in der unteren Grundfläche des Prismas liegen, die ausserhalb dieser Grundfläche liegenden Punkte $o$, $p$ und $q$, so gewählt, dass:

$$\frac{oB}{of} = \frac{pB}{pg} = \frac{qB}{qd} = \frac{m}{n}$$

ist und die Punkte $h$, $i$, $k$, $o$, $p$ und $q$ so verbunden, wie die Figur zeigt, so erhält man, da die Seiten der Dreiecke $hik$ und $opq$, bezw. den Seiten der Dreiecke $abc$ und $fgd$ parallel, also diese Dreiecke $hik$ und $opq$ nicht allein den Dreiecken $abc$ und $fgd$, sondern auch unter sich ähnlich sind, das Kantennetz des schiefen Pyramidenstumpfs $hikqop$.

Bezeichnet man nun die Höhe $AB$ des Prismas $abcdfg$ mit $H$, so ist auch die Höhe des Pyramidenstumpfs $hikqop = H$. Bezeichnet man ferner den Inhalt der Grundfläche $fgd$ des Prismas mit $G_1$, den Inhalt der Grundfläche $opq$ des Pyramidenstumpfs mit $G$, so hat man nach dem in der Erkl. 88 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz:

$$G : G_1 = \overline{op}^2 : \overline{fg}^2 = \overline{oB}^2 : \overline{fB}^2 = \overline{oB}^2 : (\overline{oB} - \overline{of})^2$$

oder

$$G : G_1 = m^2 : (m - n)^2$$

und hieraus erhält man für die Grundfläche $G$ des Pyramidenstumpfs:

$$\text{a)} \ldots G = \frac{m^2}{(m-n)^2} \cdot G_1$$

Bezeichnet man schliesslich den Inhalt der Grundfläche $abc$ des Prismas wie vorhin mit $G_1$, den Inhalt der Deck-

fläche $hik$ des Pyramidenstumpfs mit $g$, so hat man, analog wie vorhin:

$$G_1 : g = \overline{ab}^2 : \overline{hi}^2 = \overline{aA}^2 : \overline{hA}^2 = (\overline{ah} + \overline{hA})^2 : \overline{hA}^2$$

oder

$$G_1 : g = (m + n)^2 : m^2$$

und hieraus erhält man für die Deckfläche $g$ des Pyramidenstumpfs:

$$\text{b)} \ldots g = \frac{m^2}{(m+n)^2} \cdot G_1$$

Setzt man nunmehr in vorstehender Formel I $G = G_1$ und in vorstehender Formel II für $G$ und $g$ die mittels den Gleichungen a) und b) in $m$, $n$ und $G_1$ ausgedrückten Werte, so erhält man in Rücksicht, dass das Volumen des Pyramidenstumpfs $= \frac{52}{27}$ des Volumens des Prismas sein soll:

$$\frac{H}{3}\left(\frac{m^2}{(m-n)^2} \cdot G_1 + \sqrt{\frac{m^2}{(m-n)^2} \cdot G_1 \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} \cdot G_1} + \frac{m^2}{(m+n)^2} \cdot G_1\right) = \frac{52}{27} \cdot G_1 \cdot H$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m^2}{(m-n)^2} \cdot G_1 + G_1 \cdot \frac{m}{(m-n)} \cdot \frac{m}{(m+n)} + \frac{m^2}{(m+n)^2} \cdot G_1\right) = \frac{52}{27} \cdot G_1$$

oder

$$1) \ldots \frac{m^2}{(m-n)^2} + \frac{m^2}{(m+n)(m-n)} + \frac{m^2}{(m+n)^2} = \frac{52}{9}$$

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung ergibt sich schliesslich für das gesuchte Verhältnis $m:n$ nach der Erkl. 540:

$$\text{A)} \ldots m:n = 2:1$$

oder

$$\text{B)} \ldots m:n = \sqrt{13}:5$$

**Erkl. 540.** Mittels nebenstehender Gleich. 1) kann man die eine der Grössen $m$ und $n$ in die andre wie folgt ausdrücken:

Durch Multiplikation jener Gleichung mit dem Generalnenner $9 \cdot (m-n)^2 \cdot (m+n)$ erhält man zunächst:

$$9m^2(m+n)^2 + 9m^2(m-n)(m+n) + 9m^2(m-n)^2 = 52(m-n)^2(m+n)^2$$

und diese Gleichung nach $m$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$9m^2(m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - n^2 + m^2 - 2mn + n^2) = 52[(m-n)(m+n)]^2$$

$$9m^2(3m^2 + n^2) = 52(m^2 - n^2)^2$$

$$27m^4 + 9m^2n^2 = 52(m^4 - 2m^2n^2 + n^4)$$

$$27m^4 + 9m^2n^2 = 52m^4 - 104m^2n^2 + 52n^4$$

$$-52n^4 = 25m^4 - 113m^2n^2$$

$$m^4 - \frac{113}{25}m^2n^2 = -\frac{52}{25}n^4$$

Setzt man $m^2 = x$

und $m^4 = x^2$

und löst diese somit erhaltene Gleichung nach $x$ auf, so erhält man:

$$x^2 - \frac{113}{25}n^2 \cdot x = -\frac{52}{25}n^4$$

$$x^2 - \frac{113}{25}n^2 \cdot x + \left(\frac{113}{2 \cdot 25}n^2\right)^2 = -\frac{52}{25}n^4 + \left(\frac{113}{2 \cdot 25}n^2\right)^2$$

$$\left(x-\frac{113}{50}n^2\right)^2=-\frac{52}{25}n^4+\frac{12769}{50^2}n^4$$

$$x-\frac{113}{50}n^2=\pm\sqrt{-\frac{52\cdot 2\cdot 50}{25\cdot 2\cdot 50}\cdot n^4+\frac{12769}{50^2}\cdot n^4}$$

$$x=\frac{113}{50}n^2\pm\sqrt{\frac{-5200\,n^4+12769\,n^4}{50^2}}$$

$$x=\frac{113}{50}n^2\pm\sqrt{\frac{7569\,n^4}{50^2}}$$

$$x=\frac{113}{50}n^2\pm\frac{87\,n^2}{50}$$

Da man somit für

$$m^2=x=\frac{113\pm 87}{50}\cdot n^2$$

gefunden hat, so ergibt sich hieraus:

$$\text{a) } \ldots m=n\cdot\sqrt{\frac{113\pm 87}{50}}$$

Will man aus dieser Gleichung das Verhältnis der Grössen $m$ und $n$ bestimmen, so erhält man durch Division mit $n$:

$$\frac{m}{n}=\sqrt{\frac{113\pm 87}{50}}$$

oder, wenn man nur das obere Vorzeichen berücksichtigt:

$$\frac{m}{n}=\sqrt{\frac{200}{50}};\quad \frac{m}{n}=\sqrt{4};\quad \frac{m}{n}=2$$

oder

$$\text{b) } \ldots m:n=2\cdot 1$$

Berücksichtigt man dagegen das untere Vorzeichen, so erhält man:

$$\frac{m}{n}=\sqrt{\frac{26}{50}};\quad \frac{m}{n}=\sqrt{\frac{13}{25}}$$

oder

$$\text{c) } \ldots m:n=\sqrt{13}:5$$

---

**Aufgabe 663.** Wie gross ist das Volumen eines schiefen und schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas, dessen drei parallele Seitenkanten die Längen $k_1$, $k_2$ und $k_3$ haben und dessen Normalschnitt den Inhalt $N$ hat?

**Formeln:**

Für ein schiefes Prisma:

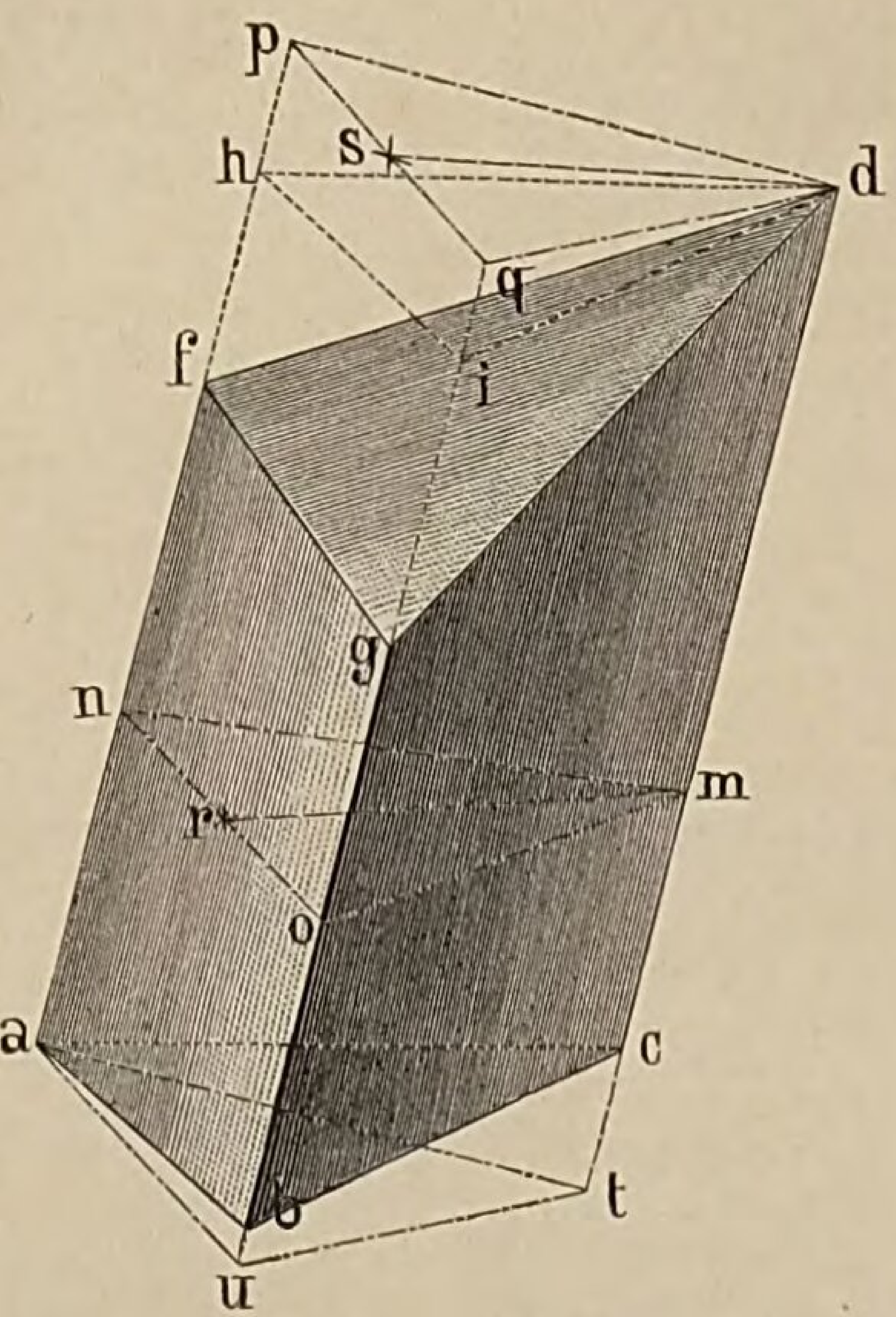
$$\text{I. } \ldots V=G\cdot H \quad \text{(s. Erkl. 541)}$$

Für eine schiefe Pyramide:

$$\text{II. } \ldots V=\frac{G\cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 532).}$$

**Auflösung.** In Figur 181 stelle $abcdfg$ ein schiefes und schief abgeschnittenes, dreiseitiges Prisma dar, dessen drei parallele Seitenkanten $af$, $bg$ und $cd$, bezw. die Längen $k_1$, $k_2$ u. $k_3$ haben (s. Erkl. 543). Denkt man sich durch dieses Prisma eine Ebene so gelegt, dass dieselbe senkrecht zu den drei parallelen Seitenkanten ist, so erhält man den Normalschnitt $mno$, dessen Inhalt mit $N$ gegeben ist.

Figur 181.




**Erkl. 541.** Aus den in Antwort der Frage 22 auf Seite 6 im 1. Buch der Körperberechnungen angeführten, stereometrischen Sätzen ergibt sich, dass man jedes schiefe Parallelepipedon und auch jedes beliebige schiefe Prisma in ein gerades Parallelepipedon, bezw. in ein gerades Prisma verwandelt denken kann, welches mit ersterem gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Die im 1. Buch der Körperberechnungen aufgestellte Kubikinhaltsformel für ein gerades Prisma gilt somit auch zur Berechnung des Volumens eines beliebigen schiefen Prismas.

Bezeichnet man also den Inhalt der Grundfläche eines schiefen Prismas mit $G$, die Höhe desselben mit $H$, das Volumen mit $V$, so besteht hiernach die Formel:

$$V = G \cdot H$$

**Erkl. 542.** Zur Berechnung der Mantelflächen und der Oberflächen von schiefen Prismen kann man keine allgemein gültige Formeln aufstellen, indem die Seitenflächen verschiedene schiefe Parallelogramme sind. Die Berechnung der Mantelflächen und der Oberflächen von schiefen Prismen lässt sich nur in einigen besonderen Fällen ohne Anwendung der Trigonometrie ausführen und setzt in den weitaus meisten Fällen die Kenntnis der Trigonometrie voraus.

Diesbezügliche Aufgaben findet man in dem 2. Teil des 2. Buchs der Körperberechnungen.

**Erkl. 543.** Stellt in der Fig. 181 $abcdhi$ ein schiefes, dreiseitiges Prisma dar und man denkt sich z. B. durch die Ecke $d$ die Ebene $dfg$ schief zu den parallelen Grundflächen $abc$ und $hid$ gelegt, so erhält man das schiefe und schief abgeschnittene, dreiseitige Prisma $abcdfg$.

Das Volumen $V$ jenes Prismas kann man nun auf folgende Weise in die gegebenen Dimensionen ausdrücken.

Denkt man sich, siehe Figur 181, durch den Endpunkt $d$ des erweitert gedachten Prismas die Ebene $dpq$ parallel dem Normalschnitt $mno$ gelegt, so kann man das Volumen des geraden aber schief abgeschnittenen Prismas $nomdfg$ als die Differenz der Volumen des geraden Prismas $nomdpq$ und der schiefen, vierseitigen Pyramide $dpfgq$, deren Grundfläche $pfgq$ ist, betrachten. Nach den Erkl. 544 und 545 hat man also für jenes Volumen:

a) . . . Volumen des Prismas $nomdfg$

$$= N \cdot \overline{md} - \frac{\overline{pf} + \overline{qg}}{6} \cdot \overline{pq} \cdot \overline{mr}$$

Setzt man in dieser Gleichung:

b) . . . $\overline{pf} = \overline{pn} - \overline{fn} = \overline{dm} - \overline{fn}$

c) . . . $\overline{qg} = \overline{qo} - \overline{go} = \overline{dm} - \overline{go}$ und

d) . . . $\overline{pq} = \overline{no}$

so erhält man:

Volumen des Prismas $nomdfg$

$$= N \cdot \overline{md} - \frac{\overline{dm} - \overline{fn} + \overline{dm} - \overline{go}}{6} \cdot \overline{no} \cdot \overline{mr}$$

$$= N \cdot \overline{dm} - \frac{\overline{dm} - \overline{fn} + \overline{dm} - \overline{go}}{3} \cdot \frac{\overline{no} \cdot \overline{mr}}{2}$$

$$= N \cdot \overline{dm} - \frac{\overline{dm} - \overline{fn} + \overline{dm} - \overline{go}}{3} \cdot N$$

$$= N \left( \overline{dm} - \frac{\overline{dm} - \overline{fn} + \overline{dm} - \overline{go}}{3} \right)$$

$$= N \cdot \frac{3\overline{dm} - \overline{dm} + \overline{fn} - \overline{dm} + \overline{go}}{3}$$

oder

1) . . . Volumen des Prismas $nomdfg$

$$= N \cdot \frac{\overline{fn} + \overline{go} + \overline{dm}}{3}$$

Wie man hiernach das Volumen des geraden aber schief abgeschnittenen Prismas $nomdfg$ in den Inhalt $N$ von dessen Grundfläche $nom$ und in die Länge der drei Seitenkanten $\overline{fn}$, $\overline{go}$ und $\overline{dm}$ ausgedrückt hat, so kann man in analoger Weise das Volumen des geraden aber schief abgeschnittenen Prismas $nomcab$

**Erkl. 544.** Das Prisma *nomdpq* in Fig. 181 ist ein gerades Prisma, da die parallelen Grundflächen *nom* und *pqd* senkrecht zu den Seitenkanten gelegt wurden. Ist der Inhalt der Grundfläche $nom = N$ (wie in vorsteh. Aufgabe) und wählt man als Höhe die Seitenkante $\overline{md}$, so hat man nach nebenstehender Formel 1) für das Volumen $V$ jenes Prismas:

$$\text{a)} \ldots V = N \cdot \overline{md}$$

**Erkl. 545.** Die vierseitige Pyramide *dpfgq* in Figur 181 hat als Grundfläche das Viereck *pfgq*. Da nun dieses Viereck ein || tr. mit den parallelen Seiten *pf* und *qg* ist und da der senkrechte Abstand dieser parallelen Seiten $= pq$ ist, so hat man nach der Erkl. 19 für den Inhalt $G$ dieses Vierecks:

$$\text{a)} \ldots G = \frac{\overline{pf} + \overline{qg}}{2} \cdot \overline{pq}$$

Da ferner die Ebene des Dreiecks *dpq* senkrecht auf den Kanten *ap* u. *bq* steht, so ist die Höhe *ds* des Dreiecks *dpq*, bezw. die Höhe *mr* des ihm kongruenten Dreiecks *mno* gleich der Höhe jener vierseitigen, schiefen Pyramide *dpfgq*.

Nach nebenstehender Formel 2) hat man somit für das Volumen $V$ jener vierseitigen, schiefen Pyramide *dpfgq* die Relation:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{pf} + \overline{qg}}{2} \cdot \overline{pq} \cdot \overline{mr}$$

oder

$$\text{b)} \ldots V = \frac{\overline{pf} + \overline{qg}}{6} \cdot \overline{pq} \cdot \overline{mr}$$

**Erkl. 546.** Bezeichnet man den Inhalt des Normalschnitts eines schiefen und schief abgeschnittenen oder, was dasselbe ist, eines geraden aber **beiderseits** schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas mit $N$, die Längen der drei parallelen Seitenkanten mit $k_1$, $k_2$ und $k_3$ und das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$$

d. h.: das Volumen eines **schiefen und schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas** oder eines geraden, **beiderseits** schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt $N$ des Normalschnitts und dem arithmetischen Mittel der drei parallelen Seitenkanten $k_1$, $k_2$ und $k_3$.

**Erkl. 547.** Bezeichnet man den Inhalt der Grundfläche eines geraden, nur auf einer Seite schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas mit $G$, die Länge der Seitenkanten mit $k_1$, $k_2$ und $k_3$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der Erkl. 546, da für diesen Fall der Normalschnitt mit der Grundfläche identisch ist, die Formel:

$$V = G \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$$

d. h. das Volumen eines **geraden**, nur auf einer Seite **schief abgeschnittenen Prismas** ist

in den Inhalt $N$ von dessen Grundfläche *nom* und in die Länge der drei Seitenkanten $\overline{na}$, $\overline{ob}$ u. $\overline{mc}$ ausdrücken. Denkt man sich zu diesen Zwecken durch $a$ die Ebene *aut* parallel zum Normalschnitt *nom* gelegt, so erhält man in analoger Weise wie vorhin:

$$2) \ldots \text{Volumen des Prismas } nomcab = N \cdot \frac{\overline{na} + \overline{ob} + \overline{mc}}{3}$$

Durch Addition der Gleichungen 1) und 2) erhält man schliesslich für das gesuchte Volumen $V$ des schiefen und schief abgeschnittenen Prismas *abcdfg*:

$$V = N \cdot \frac{\overline{fn} + \overline{go} + \overline{dm}}{3} + N \cdot \frac{\overline{na} + \overline{ob} + \overline{mc}}{3}$$

oder

$$V = N \cdot \frac{(\overline{fn} + \overline{na}) + (\overline{go} + \overline{ob}) + (\overline{dm} + \overline{mc})}{3}$$

$$V = N \cdot \frac{\overline{fa} + \overline{gb} + \overline{dc}}{3}$$

oder wenn man schliesslich:

$$\overline{fa} = k_1, \ \overline{gb} = k_2 \text{ und } \overline{dc} = k_3$$

setzt:

$$\text{A)} \ldots V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \text{ (s. Erkl. 546).}$$

gleich dem Produkt aus dem Inhalt $G$ der Grundfläche und dem arithmetischen Mittel der drei parallelen Seitenkanten $k_1$, $k_2$ und $k_3$.

**Erkl. 548.** Bezeichnet man den Inhalt des Normalschnitts eines dreiseitigen, schiefen Prismas mit $N$, die Länge einer der Seitenkanten, bezw. die Achse mit $A$ und das Volumen mit $V$, so besteht die Relation:

$$V = N \cdot A$$

Diese Formel kann man aus der in der Erkl. 546 aufgestellten allgemeinen Formel ableiten, wenn man berücksichtigt, dass für diesen Fall die drei Seitenkanten gleich lang sind, dass man also, wenn eine dieser Seitenkanten (oder die Länge der Achse) mit $A$ bezeichnet wird für:

$$\frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} = \frac{A + A + A}{3} = \frac{3A}{3}$$

oder $= A$ setzen.

**Erkl. 549.** Bezeichnet man den Inhalt des Normalschnitts eines beliebigen, schiefen Prismas mit $N$, die Länge einer der Seitenkanten oder für den Fall, dass der Normalschnitt eine reguläre Figur ist, die Länge der Achse mit $A$ und das Volumen mit $V$, so besteht die Relation:

$$V = N \cdot A.$$

Diese Formel kann man auf einfache Weise durch Zerlegen des Prismas in dreiseitige Prismen und mittels der in voriger Erkl. 548 aufgestellten Formel herleiten. (S. die Erkl. 555.)

**Erkl. 550.** Bezeichnet man den Umfang des Normalschnitts eines schiefen Prismas mit $U$, die Achse, bezw. die Länge einer Seitenkante mit $A$ und den Mantel jenes Prismas mit $M$, so besteht die Relation:

$$M = U \cdot A$$

welche sich auf einfache Weise aus der Betrachtung ergibt, dass die Seiten des Normalschnitts gleich den senkrechten Entfernungen je zweier der parallelen Seitenkanten des Prismas sind. (Siehe die Erkl. 557 und 558.)

**Aufgabe 664.** Wie gross ist das Volumen eines schiefen und schief abgeschnittenen Parallelepipedons, dessen vier parallele Seitenkanten in ihrer Aufeinanderfolge die Längen $k_1$, $k_2$, $k_3$ und $k_4$ haben und dessen Normalschnitt den Inhalt $N$ hat?

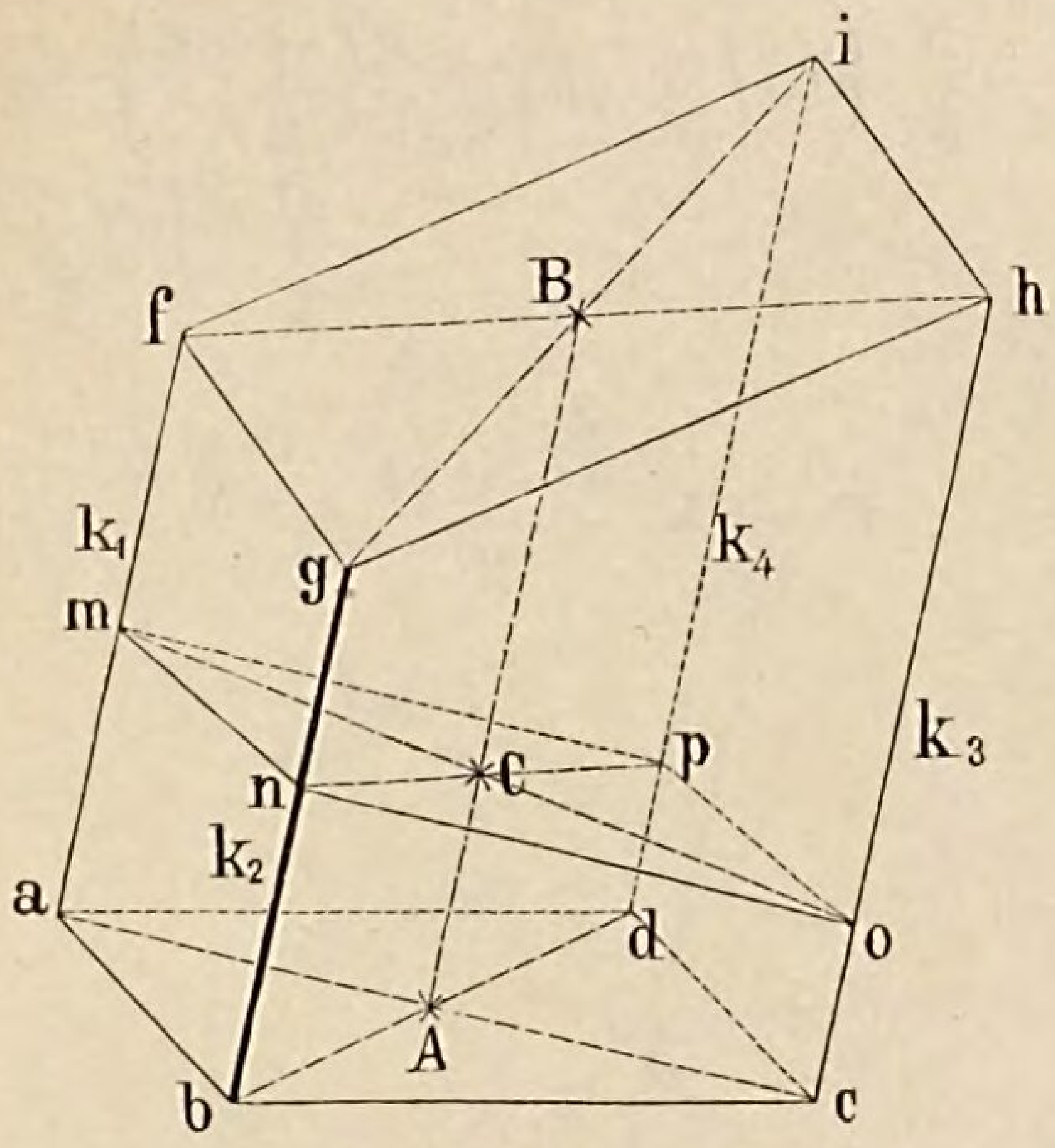
**Formel:**

Für ein schiefes und schief abgeschnittenes, dreiseitiges Prisma:

$$V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad \text{(s. Erkl. 546).}$$

**Auflösung.** Stellt in der Fig. 182 $abcdifgh$ ein schiefes und schief abgeschnittenes Parallelepipedon dar und man denkt sich durch zwei nicht derselben Seitenfläche angehörigen Seitenkanten, z. B. durch die Seitenkanten $af$ und $ch$ die Diagonalebene $achf$ zerlegt, so wird das Parallelepipedon in zwei

Figur 182.




**Erkl. 551.** Denkt man sich durch je zwei gegenüberstehende Seitenkanten eines schief abgeschnittenen Parallelepipedons, z. B. in der Figur 182 durch die Seitenkanten $af$ und $ch$, ebenso durch die Seitenkanten $bg$ und $di$ Ebenen gelegt, so erhält man als Schnittfiguren die sogenannten Diagonalebenen $achf$ und $bdig$ des Parallelepipedons.

Diese Diagonalebenen sind Paralleltrapeze, welche sich in ihren sogenannten Mittellinien gegenseitig durchschneiden.

Da nun die Mittellinie eines jeden Paralleltrapezes gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten ist, so ergibt sich aus der Figur 182, dass

a) . . . $AB = \frac{\overline{af} + \overline{ch}}{2}$ und dass auch

b) . . . $AB = \frac{\overline{bg} + \overline{di}}{2}$

ist. Aus diesen Relationen erhält man die weitere Beziehung:

1) . . . $\frac{\overline{af} + \overline{ch}}{2} = \frac{\overline{bg} + \overline{di}}{2}$

d. h. in jedem Parallelepipedon, einerlei ob gerad oder schief und einerlei ob schief abgeschnitten oder nicht, sind die Summen je zweier gegenüberliegenden Seitenkanten einander gleich.

**Erkl. 552.** Bezeichnet man den Inhalt des Normalschnitts eines schiefen und schief abgeschnittenen Parallelepipedons oder, was dasselbe ist, eines **geraden, beiderseits** schief abgeschnittenen Parallelepipedons mit $N$, die Längen der vier parallelen Seitenkanten und zwar in ihrer Aufeinanderfolge der Reihe nach mit $k_1$, $k_2$, $k_3$ und $k_4$ und das Volumen mit $V$, so bestehen nach den in neben-

schiefe und schief abgeschnittene, dreiseitige Prismen zerlegt. Ist das Rechteck $mnop$ ein Normalschnitt des Parallelepipedons, so ist das Dreieck $mno$ ein Normalschnitt des dreiseitigen Prismas $abchfg$ und das mit jenem kongruente Dreieck $mop$ ist ein Normalschnitt des dreiseitigen Prismas $acdifh$.

Da nun das gesuchte Volumen $V$ des vierseitigen Prismas gleich der Summe der Volumen der beiden dreiseitigen Prismen ist, so besteht nach der in der Erkl. 546 aufgestellten Formel die Relation:

a) . . . $V = \triangle mop \cdot \frac{\overline{af} + \overline{di} + \overline{ch}}{3} + \triangle mno \cdot \frac{\overline{af} + \overline{bg} + \overline{ch}}{3}$

oder, da der Inhalt eines jeden der Dreiecke $mop$ und $mno$ gleich dem halben Inhalt $N$ des Normalschnitts (des Rechtecks) $mnop$ ist:

$$V = \frac{N}{2} \cdot \left( \frac{\overline{af} + \overline{di} + \overline{ch}}{3} + \frac{\overline{af} + \overline{bg} + \overline{ch}}{3} \right)$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$V = \frac{N}{6} (\overline{af} + \overline{di} + \overline{ch} + \overline{af} + \overline{bg} + \overline{ch})$$

$$V = \frac{N}{6} (2 \cdot \overline{af} + 2 \overline{ch} + \overline{di} + \overline{bg})$$

oder

b) . . . $V = \frac{N}{3} \left( \overline{af} + \overline{ch} + \frac{\overline{di} + \overline{bg}}{2} \right)$

Da nun nach der Erkl. 551:

c) . . . $\frac{\overline{di} + \overline{bg}}{2} = \frac{\overline{af} + \overline{ch}}{2}$

oder

d) . . . $\overline{af} + \overline{ch} = \overline{di} + \overline{bg}$

gesetzt werden kann, so erhält man einmal:

$$V = \frac{N}{3} \left( (\overline{di} + \overline{bg}) + \frac{\overline{di} + \overline{bg}}{2} \right) = \frac{N}{3} \cdot \frac{3(\overline{di} + \overline{bg})}{2}$$

oder

A) . . . $V = N \cdot \frac{\overline{di} + \overline{bg}}{2} = N \cdot \frac{k_1 + k_3}{2}$

stehender Auflösung entwickelten Gleichungen A) und B) die Formeln:

$$\text{a)} \ldots V = N \cdot \frac{k_1 + k_3}{2}$$

oder

$$\text{b)} \ldots V = N \cdot \frac{k_2 + k_4}{2}$$

d. h. das Volumen eines **schiefen und schief abgeschnittenen Parallelepipedons** oder, was dasselbe ist, eines geraden, **beiderseits** schief abgeschnittenen Parallelepipedons ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt $N$ des Normalschnitts und dem arithmetischen Mittel aus zwei gegenüberstehenden Seitenkanten.

**Erkl. 553.** Bezeichnet man den Inhalt der Grundfläche eines geraden, aber nur einerseits schief abgeschnittenen Parallelepipedons mit $G$, die Längen zweier in einer und derselben Diagonalebene liegenden Seitenkanten mit $a$ und $b$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der Erkl. 552, da für diesen Fall der Normalschnitt mit der Grundfläche identisch ist, die Formel:

$$V = G \cdot \frac{a + b}{2}$$

d. h. das Volumen eines **geraden** aber **nur einerseits schief abgeschnittenen Parallelepipedons** ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt $G$ der Grundfläche und dem arithmetischen Mittel zweier Seitenkanten, welche in derselben Diagonalebene liegen.

und ein andermal:

$$V = \frac{N}{3} \cdot \left( (\overline{af} + \overline{ch}) + \frac{\overline{af} + \overline{ch}}{2} \right) = \frac{N}{3} \cdot \frac{3(\overline{af} + \overline{ch})}{2}$$

oder

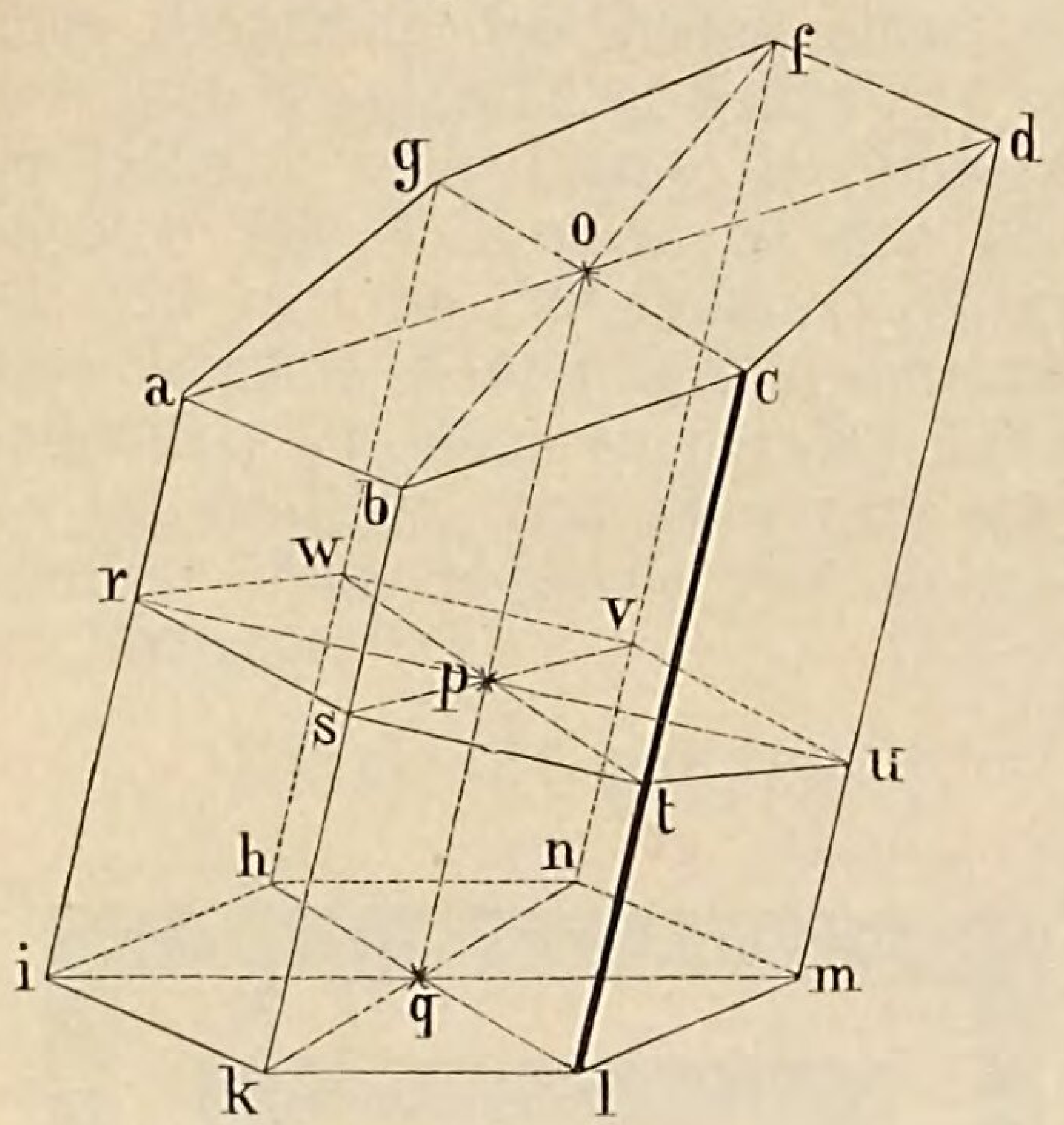
$$\text{B)} \ldots V = N \cdot \frac{\overline{af} + \overline{ch}}{2} = N \cdot \frac{k_2 + k_4}{2}$$

---

**Aufgabe 665.** Wie gross ist das Volumen eines schiefen und schief abgeschnittenen Prisma, dessen Normalschnitt ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist, wenn der Inhalt des Normalschnitts $= N$ und die Achse des Prismas $= A$ ist?

**Auflösung.** In Fig. 183 stelle $abcd\,fghiklmn$ ein schiefes und schief abgeschnittenes Prisma dar, dessen Normalschnitt $rstuvw$ irgend ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl, z. B. ein reguläres Sechseck ist. Denkt man sich in dem Normalschnitt $rstuvw$, welches also ein reguläres Sechseck (allgemein $2n$-Eck) sei, die Durchmesser $ru$, $sv$ und $tw$ gezogen und durch je zwei der parallelen Seitenkanten des Prismas, welche bezw. durch die Endpunkte dieser Durchmesser gehen, Ebenen gelegt, so erhält man als Schnittfiguren die Paralleltrapeze $bknf$, $cghl$ und $daim$, welche die sogenannte Achse $oq$ des Prismas zur gemeinschaftlichen Mittellinie haben.

Figur 183.




Denkt man sich ferner das durch die Figur 183 dargestellte Prisma aus den schiefen und schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismen *obclqk*, *ocdmql*, *odfnqm*, *ofghqn*, *ogaiqh* und *oabkqi* zusammengesetzt und bezeichnet jeden der Inhalte der Normalschnitte *pst*, *ptu*, *puv*, *pvw*, *pwr* und *prs* dieser dreiseitigen Prismen mit $N_1$, indem diese Normalschnitte kongruente, gleichseitige Dreiecke (allgemein Bestimmungsdreiecke eines regulären $2n$-Ecks) sind, die Seitenkanten *bk*, *cl*, *dm*, *fn*, *gh* und *ai* dieser dreiseitigen Prismen der Reihe nach mit $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, $k_5$ und $k_6$ und bezeichnet man schliesslich die Achse *oq*, welche eine gemeinschaftliche Seitenkante für jene sämtlichen dreiseitigen Prismen ist, mit $A$, so hat man, unter der Benutzung der in der Erkl. 546 aufgestellten Formel, für das Volumen $V$ des durch die Fig. 183 dargestellten Prismas:

$$V = N_1 \cdot \frac{k_1 + k_2 + A}{3} + N_1 \cdot \frac{k_2 + k_3 + A}{3} + N_1 \cdot \frac{k_3 + k_4 + A}{3} + N_1 \cdot \frac{k_4 + k_5 + A}{3} + N_1 \cdot \frac{k_5 + k_6 + A}{3} + N_1 \cdot \frac{k_6 + k_1 + A}{3}$$

oder

$$V = \frac{N_1}{3}(k_1 + k_2 + A + k_2 + k_3 + A + k_3 + k_4 + A + k_4 + k_5 + A + k_5 + k_6 + A + k_6 + k_1 + A)$$

$$V = \frac{N_1}{3}(2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + 2 \cdot k_4 + 2 \cdot k_5 + 2 \cdot k_6 + 6 \cdot A)$$

$$V = \frac{2 \cdot N_1}{3}[(k_1 + k_4) + (k_2 + k_5) + (k_3 + k_6) + 3A]$$

Setzt man in diese Gleichung nach der Erkl. 554:

$$(k_1 + k_4) = (k_2 + k_5) = (k_3 + k_6) = 2A$$

so erhält man:

$$V = \frac{2 \cdot N_1}{3}(2A + 2A + 2A + 3A)$$

oder

$$V = \frac{2 \cdot N_1}{3} \cdot 9A$$

$$V = 6 \cdot N_1 \cdot A$$

Substituiert man schliesslich in diese Gleichung für $6 \cdot N_1$ den Inhalt $N$ des ganzen Normalschnitts *rstuvw*, so erhält man:

A) . . . $V = N \cdot A$

**Erkl. 554.** Da in dem || tr *knfb*, siehe Figur 183, die Mittellinie $\overline{oq} = \frac{\overline{bk} + \overline{fn}}{2}$ ist und $\overline{oq} = A$, $\overline{bk} = k_1$ und $\overline{fn} = k_4$ gesetzt wurde, so erhält man hiernach:

$$A = \frac{k_1 + k_4}{2}$$

oder

a) . . . $(k_1 + k_4) = 2A$

In analoger Weise ergibt sich aus dem || tr *gclh*:

b) . . . $(k_2 + k_5) = 2A$

und aus dem || tr *admi*:

c) . . . $(k_3 + k_6) = 2A$

**Erkl. 555.** Bezeichnet man das Volumen eines schiefen und schief abgeschnittenen Prismas oder, was dasselbe ist, eines geraden, beiderseits schief abgeschnittenen Prismas, dessen Normalschnitt ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist, mit $V$, den Inhalt dieses Normalschnitts mit $N$ und die Achse des Prismas mit $A$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichung A) die Relation:

$$V = N \cdot A$$

**Erkl. 556.** Bezeichnet man das Volumen eines geraden und nur einerseits schief abgeschnittenen Prismas, dessen Grundfläche ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist, mit $V$, den Inhalt der Grundfläche mit $G$ und die Achse des Prismas mit $A$, so besteht nach der Erkl. 555, da für diesen Fall der Normalschnitt mit der Grundfläche identisch ist, die Formel: $V = G \cdot A$.

**Erkl. 557.** Bezeichnet man den Mantel eines schiefen und schief abgeschnittenen oder, was dasselbe ist, den Mantel eines geraden und beiderseits schief abgeschnittenen Prismas, dessen Normalschnitt ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist, mit $M$, den Umfang dieses Normalschnitts mit $U$ und die Achse des Prismas mit $A$, so besteht die Relation: $M = U \cdot A$

Diese Formel kann man wie folgt herleiten:

Für den Mantel $M$ des durch die Figur 183 dargestellten Prismas hat man z. B.:

$$M = klcb + lmdc + mnfd + nhgf + hiag + ikba$$

oder, wenn man die Seitenkante $bk$, $cl$, $dm$. $fn$, $gh$ und $ai$, ähnlich wie in nebenstehender Auflösung der Reihe nach mit $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, $k_5$ $k_6$ bezeichnet und berücksichtigt, dass, da $st$, $tu$, $uv$, $vw$, $wr$ und $rs$ die Höhen dieser Paralleltrapeze $klcb$, $lmdc$, .... bedeuten.

$$M = \frac{k_1 + k_2}{2} \cdot st + \frac{k_2 + k_3}{2} \cdot tu + \frac{k_3 + k_4}{2} \cdot uv + \frac{k_4 + k_5}{2} \cdot vw + \frac{k_5 + k_6}{2} \cdot wr + \frac{k_6 + k_1}{2} \cdot rs$$

Da nun der Normalschnitt $rstuvw$ ein reguläres Polygon ist, so kann man

$$st = tu = uv = vw = wr = rs = S$$

setzen und man erhält, ähnlich wie in nebenstehender Auflösung:

$$M = S\,[(k_1 + k_4) + (k_2 + k_5) + (k_3 + k_6)]$$

oder, da $k_1 + k_4 = k_2 + k_5 = k_3 + k_6 = 2A$ gesetzt werden kann (s. Erkl. 554)

$$M = S(2A + 2A + 2A);\; M = S \cdot 6A$$

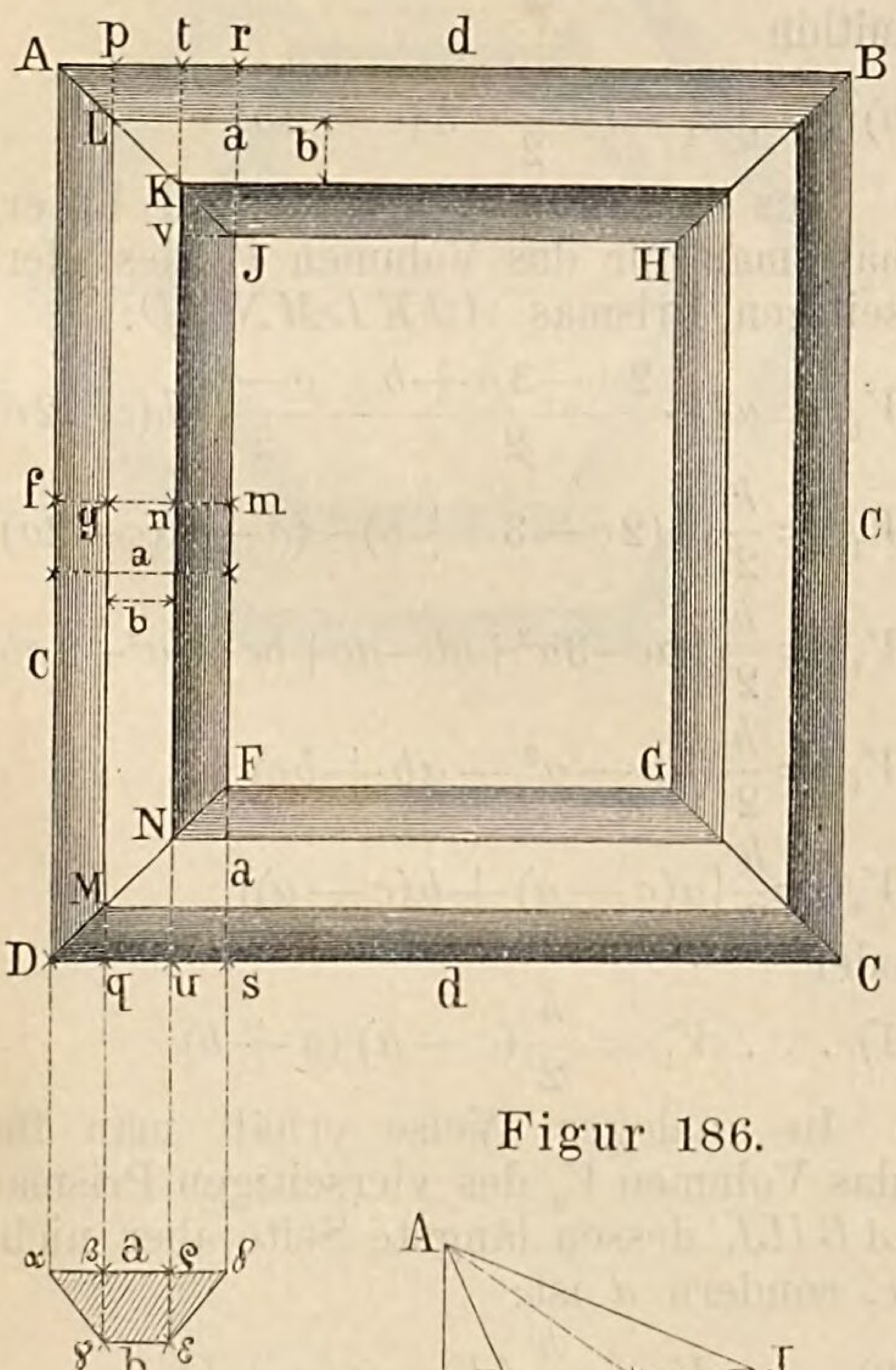
$M = 6S \cdot A$, oder für $6S$ den Umfang $U$ des Normalschnitts $rstuvw$ gesetzt:

$$M = U \cdot A$$

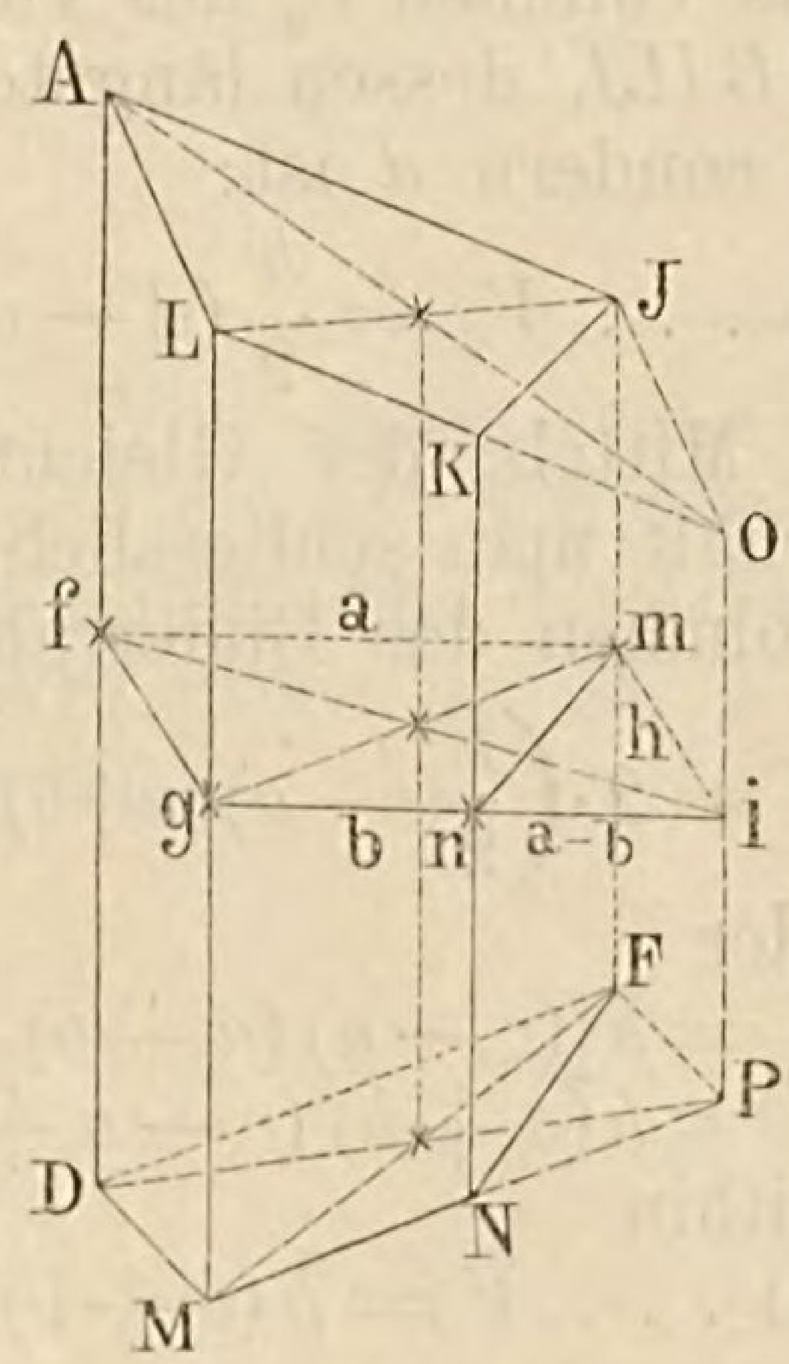
**Erkl. 558.** Bezeichnet man den Mantel eines geraden und nur einerseits schief abgeschnittenen Prismas, dessen Grundfläche ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist mit $M$, den Umfang der Grundfläche mit $U$ und die Achse des Prismas mit $A$, so besteht nach der Erkl. 557, da für diesen Fall der Normalschnitt mit der Grundfläche identisch ist, die Formel: $M = U \cdot A$

**Aufgabe 666.** Ein vierseitiger, rechtwinkliger Bilderrahmen liefert senkrecht zu den parallelen Kanten je einer Seite einen Schnitt in der Gestalt eines Trapezes mit den parallelen Seiten $a$, $b$ und der Höhe $h$. Die Länge der äusseren, längsten der 4 Kanten an der einen Seite ist $= c$, an der andern $= d$, und diese längsten Kanten gehen durch die Endpunkte der längeren, parallelen Seite des jedesmaligen, trapezförmigen Querschnitts. Man berechne das Volumen des Rahmens.

Figur 184 und 185.




Figur 186.




**Formeln:**

Für ein schiefes und schief abgeschnittenes Parallelepipedon:

$$\text{I.}\quad V = N \cdot \frac{k_1 + k_3}{2} \quad \text{(s. Erkl. 552)}$$

Für ein schiefes und schief abgeschnittenes, dreiseitiges Prisma:

$$\text{II.}\quad V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad \text{(s. Erkl. 546).}$$

**Auflösung.** Stellt, siehe Fig. 184, $ABCD$ den in der Aufgabe näher beschriebenen Bilderrahmen dar, dessen Querschnitt durch die Figur 185 dargestellt ist, so kann man sich denselben aus den zwei kongruenten, vierseitigen, schiefen und schief abgeschnittenen Prismen $ADFJ$ und $BCGH$ und aus den zwei kongruenten, vierseitigen, schiefen und schief abgeschnittenen Prismen $ABHJ$ und $DCGF$ zusammengesetzt denken.

Zur Berechnung des vierseitigen, schiefen und schief abgeschnittenen Prismas $ALKJFDNM$, siehe die Figuren 184 u. 186 mag folgende Betrachtung dienen:

Denkt man sich dieses Prisma, wie die Figur 186 zeigt, zu einem schiefen, schief abgeschnittenen Parallelepipedon ergänzt, so ist das Volumen $V_1$ des Prismas $AJKLMNFD$ gleich dem Volumen des Parallelepipedons $AJOLMPFD$ weniger dem Volumen des dreiseitigen Prismas $JOKNPF$. Nach vorstehender Formel I hat man für das Volumen $v$ des Parallelepipedons $AJOLMPFD$:

$$v = \| \text{gr}\ fgim \cdot \frac{AD + OP}{2}$$

oder, da $\| \text{gr}\ fgim = a \cdot h$, $AD = c$ und $OP = c - 3a + b$ (siehe Erkl. 562) gesetzt werden kann:

$$v = a \cdot h \cdot \frac{c + c - 3a + b}{2}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \quad v = a \cdot h \cdot \frac{2c - 3a + b}{2}$$

Nach vorstehender Formel II hat man für das Volumen $v_1$ des dreiseitigen Prismas $JOKNPF$:

$$v_1 = \triangle\, nim \cdot \frac{OP + JF + KN}{3}$$

**Erkl. 559.** Aus der Fig. 184 ergibt sich, dass die Kante $LM = pq - Lp - Mq$ ist.

Da nun $pq = AD = c$

und $Lp = Mq = \frac{a-b}{2}$ (s. Erkl. 561) ist,

so erhält man:

$$LM = c - 2 \cdot \frac{a-b}{2}$$

oder

$$LM = c - a + b$$

**Erkl. 560.** Aus der Fig. 184 ergibt sich, dass die Kante $JF = rs - rJ - Fs$ ist.

Da nun: $rs = AD = c$

$rJ = Fs = a$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$JF = c - 2a$$

**Erkl. 561.** Denkt man sich in dem Paralleltrapez $\alpha\gamma\varepsilon\delta$, siehe Fig. 185, welches gleich dem Querschnitt des Rahmens in Fig. 184 ist, die Perpendikel $\gamma\beta$ und $\varepsilon\varrho$ gefällt, so sind die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\delta\varrho\varepsilon$ kongruent, weil die Seiten $\alpha\gamma$ und $\delta\varepsilon$ einander gleich sind. Da hiernach $\alpha\beta = \delta\varrho$ und $\beta\varrho = b$ ist, so ergibt sich, dass $\alpha\beta = \delta\varrho = \frac{a-b}{2}$ ist. Hiernach ist auch in der Fig. 184 $Ap = Lp = Dq = Mq = \frac{a-b}{2}$.

**Erkl. 562.** Da nach dem in der Erkl. 551 ausgesprochenen Lehrsatz:

$$\frac{AD + OP}{2} = \frac{LM + JF}{2}$$

ist und $AD = c$, gemäss der Aufgabe

$LM = c - a + b$ (s. Erkl. 559)

$JF = c - 2a$ (s. Erkl. 560)

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\frac{c + OP}{2} = \frac{c - a + b + c - 2a}{2}$$

oder

$$c + OP = 2c - 3a + b$$

mithin

$$OP = c - 3a + b$$

**Erkl. 563.** Aus der Fig. 184 ergibt sich, dass die Kante $KN = tu - Kt - Nu$ ist.

Da nun:

$tu = AD = c$

$Kt = Nu = rJ - Ko = rJ - vJ = rJ - Lp$

$= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

gesetzt werden kann (s. Erkl. 561), so erhält man:

$$KN = c - 2 \cdot \frac{a+b}{2}$$

oder

$$KN = c - a - b$$

oder, da

$$\triangle nim = \frac{(a-b) \cdot h}{2}$$

$OP = c - 3a + b$ (s. Erkl. 562)

$JF = c - 2a$ (s. Erkl. 560)

und $KN = c - a - b$ (s. Erkl. 563)

gesetzt werden kann:

$$v_1 = \frac{(a-b)h}{2} \cdot \frac{(c - 3a + b) + (c - 2a) + (c - a - b)}{3}$$

oder

$$v_1 = \frac{(a-b)h}{2} \cdot \frac{3c - 6a}{3}$$

mithin

$$\text{b)} \ldots v_1 = \frac{a-b}{2} h (c - 2a)$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man für das Volumen $V_1$ des vierseitigen Prismas $AJKLMNFD$:

$$V_1 = a \cdot h \cdot \frac{2c - 3a + b}{2} - \frac{a-b}{2} \cdot h(c - 2a)$$

$$V_1 = \frac{h}{2}[a(2c - 3a + b) - (a-b)(c-2a)]$$

$$V_1 = \frac{h}{2}(2ac - 3a^2 + ab - ac + bc + 2a^2 - 2ab)$$

$$V_1 = \frac{h}{2}(ac - a^2 - ab + bc)$$

$$V_1 = \frac{h}{2}[a(c-a) + b(c-a)]$$

oder

$$1) \ldots V_1 = \frac{h}{2}(c-a)(a+b)$$

In analoger Weise erhält man für das Volumen $V_2$ des vierseitigen Prismas $ABHJ$, dessen längste Seite aber nicht $c$, sondern $d$ ist:

$$2) \ldots V_2 = \frac{h}{2}(d-a)(a+b)$$

Mittels der Gleichungen 1) und 2) erhält man schliesslich für das gesuchte Volumen des Bilderrahmens:

$$V = 2 \cdot \left(\frac{h}{2}(c-a)(a+b) + \frac{h}{2}(d-a)(a+b)\right)$$

oder

$$V = h[(c-a)(a+b) + (d-a)(a+b)]$$

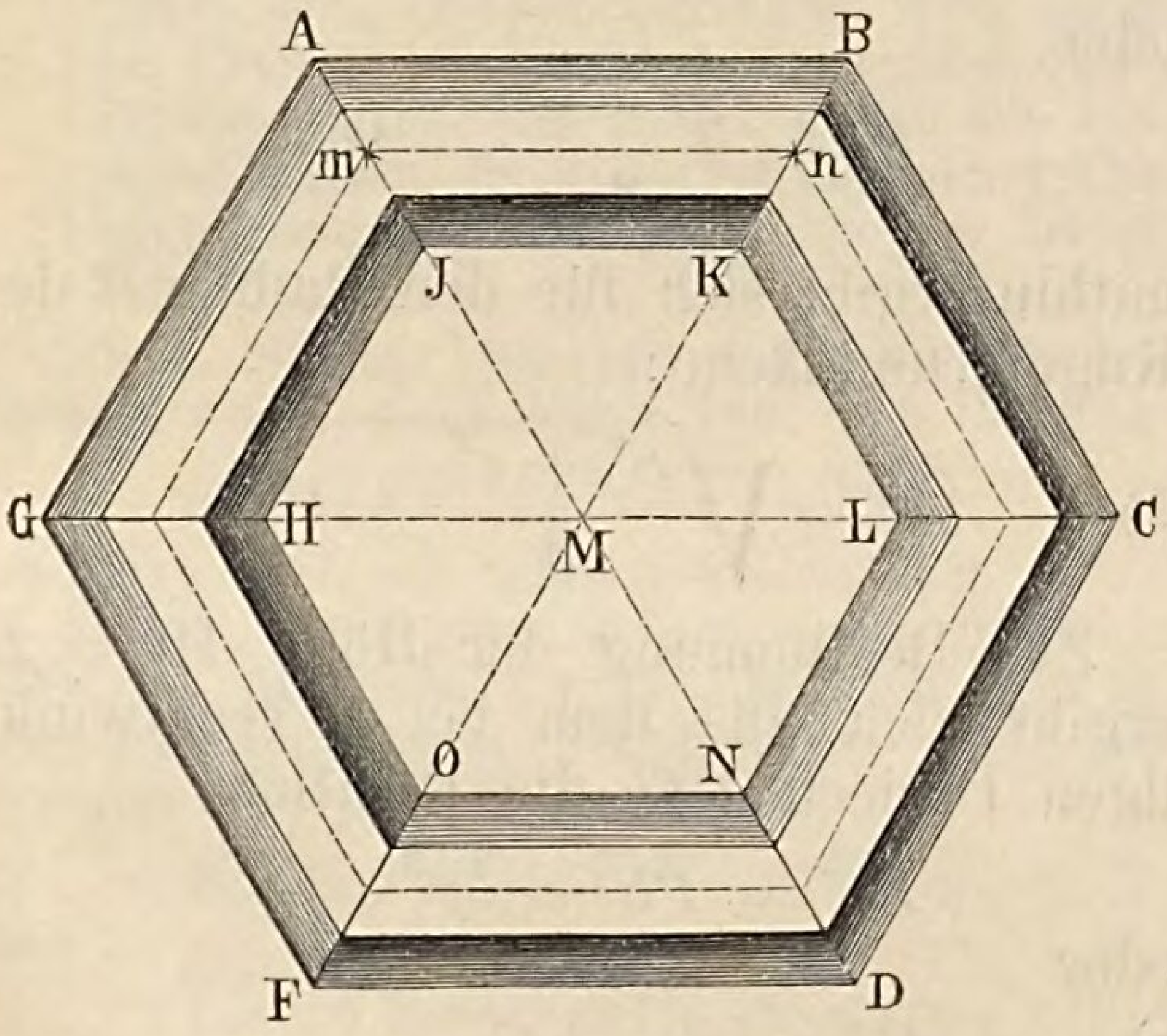
$$V = h(a+b)(c - a + d - a)$$

mithin

$$\text{A)} \ldots V = h(a+b)(c + d - 2a)$$

**Aufgabe 667.** Sechs gerade Prismen, deren Normalschnitte kongruente, reguläre Sechsecke mit der Seite $a$ sind, sind je beiderseits so abgeschnitten, dass wenn dieselben aneinander gefügt werden, die Achsen jener Prismen ein reguläres Sechseck mit der Seite $b$ bilden. Wie gross ist das Volumen des durch Aneinanderfügen jener 6 abgeschnittenen Prismen gebildeten Körpers?

Figur 187.




**Formel:**

Für ein schiefes und schief abgeschnittenes Prisma, dessen Normalschnitt ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist:

$$V = N \cdot A \text{ (s. Erkl. 555).}$$

**Auflösung.** Stellt, siehe Figur 187 $ABCDFGHJKLNO$ den Körper dar, der durch Aneinanderfügen der sechs kongruenten, sechsseitigen, schiefen und schief abgeschnittenen Prismen $ABKJ$, $BCLK$, $CDNL$ .... gebildet wird, so ist aus dieser Figur ersichtlich, dass das gesuchte Volumen $V$ dieses Körpers gleich dem sechsfachen Volumen eines jener Prismen, z. B. des Prismas $ABKJ$ ist.

Da nun das Prisma $ABKJ$ ein schiefes und schief abgeschnittenes Prisma ist, dessen Normalschnitt ein reguläres Sechseck, nämlich ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist, und da ferner die Achse $mn$ dieses Prismas gleich der gegebenen Seite $b$ eines regulären Sechsecks ist, so erhält man, wenn man in vorstehender Formel

$$N = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \text{ (s. Erkl. 263)}$$

und $A = b$ setzt:

für das gesuchte Volumen $V$ des durch die Figur 187 dargestellten Körpers:

$$V = 6 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot b$$

oder

$$V = \frac{36}{4} a^2 b \sqrt{3}$$

mithin

$$\text{A)} \; .. \; V = 9 a^2 b \sqrt{3}$$

---

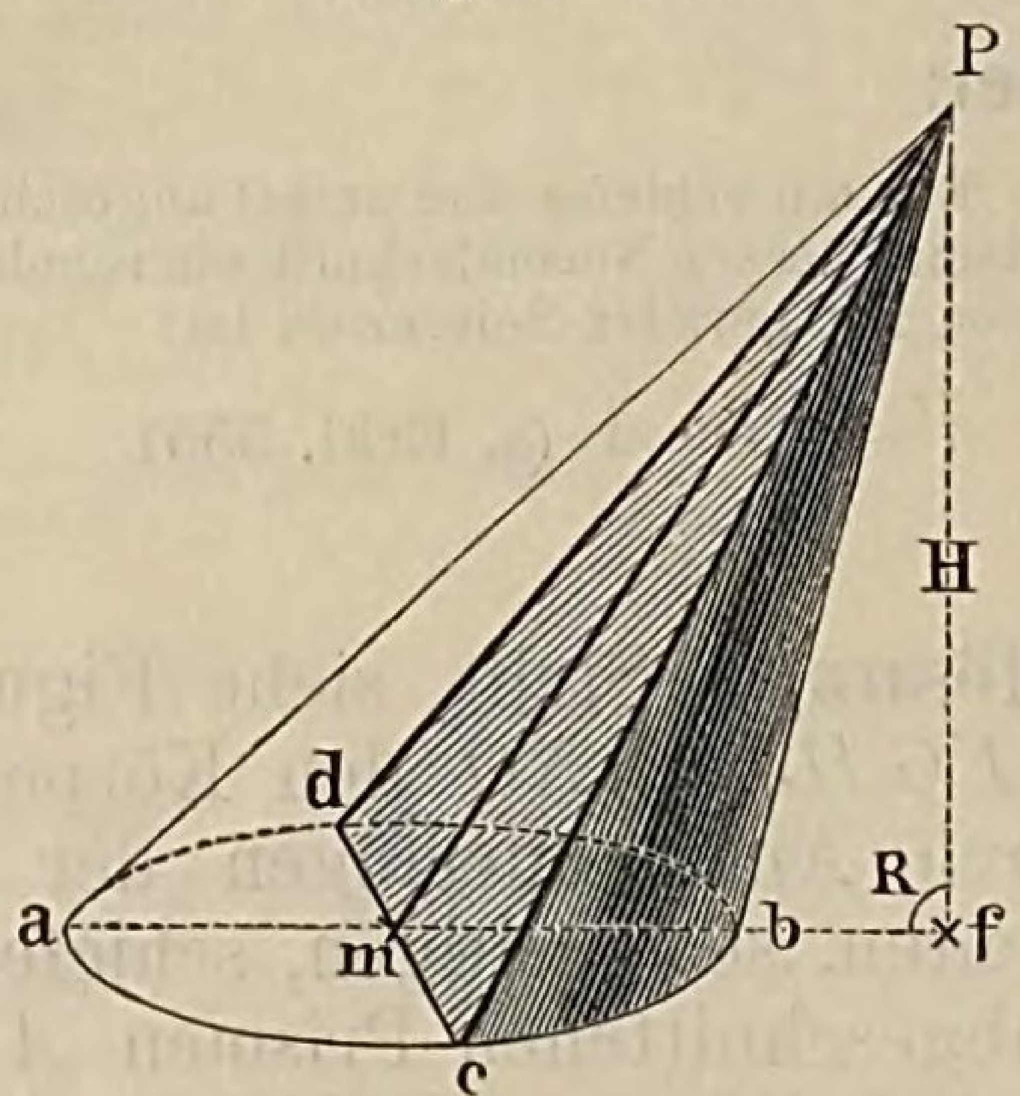
**Aufgabe 668.** Von einem schiefen Kegel kennt man die grösste Seitenlinie $S$, die kleinste Seitenlinie $s$ und die Achse $A$ des Kegels. Wie gross ist das Volumen dieses Kegels?

**Formel:**

$$V = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 564).}$$

**Auflösung.** Stellt, siehe Fig. 188, $Pab$ den schiefen Kegel dar und ist dessen grösste Seitenlinie $S = Pa$, dessen kleinste Seitenlinie $s = Pb$ und dessen Achse $Pm = A$, so findet man zunächst den Radius $am$ des Grundkreises dieses Kegels mittels der Betrachtung, dass

Figur 188.




**Erkl. 564.** Da man einen schiefen Kegel als eine schiefe Pyramide betrachten kann, deren Basis ein Polygon mit unzählig vielen, bezw. mit unendlich kleinen Seiten ist, und das Volumen einer schiefen Pyramide gleich dem dritten Teil des Produkts aus Grundfläche und Höhe ist, so hat man zur Berechnung des Volumens $V$ eines schiefen Kegels, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist, die Formel:

$$V = \frac{R^2\pi \cdot H}{3}$$

**Erkl. 565.** Die Inhaltsbestimmung des Mantels eines schiefen Kegels aus der Höhe $H$ und dem Grundflächenradius $R$, ist auf elementarem Wege nicht möglich.

**Erkl. 566.** Bei einem schiefen Kegel, siehe Fig. 188, sind von allen Seitenlinien nur zwei einander gleich, es sind dies diejenigen Seitenlinien, die in der Ebene liegen, welche zu der durch die Achse des Kegels gelegten Vertikalebene senkrecht steht. Alle übrigen Seitenlinien sind ungleich gross.

Beweisen kann man dies einfach dadurch, dass man den Mittelpunkt der Grundfläche mit einer Anzahl von Punkten der Peripherie des Grundkreises verbindet; die zu diesen Punkten gehörigen Seitenlinien zieht und nachweist, dass von allen diesen hiernach möglichen Dreiecken nur zwei davon kongruent (in Fig. 188 nur die Dreiecke $Bmd$ und $Bmc$) sind.

**Erkl. 567.** Denkt man sich, siehe Fig. 188, durch die Achse eines schiefen Kegels eine vertikale Ebene gelegt, so durchschneidet diese Ebene den Kegelmantel nach der grössten und nach der kleinsten Seitenlinie.

Beweisen kann man dies dadurch, dass man sich in analoger Weise, wie in voriger Erklärung zum dortigen Beweise erwähnt, alle möglichen Dreiecke konstruiert denkt und berücksichtigt, dass diese Dreiecke sämtlich zwei Seiten gleich haben (die Achse und die Radien des Grundkreises), dass ferner von allen diesen Dreiecken dasjenige den grössten (bezw. den

man von dem schiefwinkligen Dreieck $Pab$ die zwei Seiten $Pa$ und $Pb$ und die zur dritten Seite $ab$ gehörige Schwerlinie dieses Dreiecks kennt.

Setzt man $\overline{Pa} = S$, $\overline{Pb} = s$, $\overline{Pm} = A$ und $am = R$, so hat man nämlich nach dem in der Erkl. 568 ausgesprochenen Lehrsatz die Relation:

$$S^2 + s^2 = 2(A^2 + R^2)$$

und hieraus erhält man:

$$A^2 + R^2 = \frac{S^2 + s^2}{2}$$

oder

$$R^2 = \frac{S^2 + s^2}{2} - A^2$$

mithin ergibt sich für den Radius $R$ der Kugelgrundfläche:

$$1) \ldots R = \sqrt{\frac{S^2 + s^2}{2} - A^2}$$

Zur Bestimmung der Höhe $Pf = H$ ergibt sich aus dem bei $f$ rechtwinkligen Dreieck $Pfb$ die Relation:

$$\overline{Pf}^2 = \overline{Pb}^2 - \overline{bf}^2$$

oder

$$a) \ldots H^2 = s^2 - \overline{bf}^2$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $Pfm$ die Relation:

$$\overline{Pf}^2 = \overline{Pm}^2 - \overline{mf}^2 = \overline{Pm}^2 - (\overline{mb} + \overline{bf})^2$$

oder

$$b) \ldots H^2 = A^2 - (R + \overline{bf})^2$$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich zunächst zur Bestimmung von $\overline{bf}$ die Gleichung:

$$s^2 - \overline{bf}^2 = A^2 - (R + \overline{bf})^2$$

Diese Gleichung nach $\overline{bf}$ aufgelöst, gibt:

$$s^2 - \overline{bf}^2 = A^2 - R^2 - 2R \cdot \overline{bf} - \overline{bf}^2$$

$$2R \cdot \overline{bf} = A^2 - R^2 - s^2$$

oder

$$c) \ldots \overline{bf} = \frac{A^2 - R^2 - s^2}{2R}$$

Aus den Gleichungen a) und c) erhält man somit für die Höhe $H$ des Prismas:

kleinsten) von jenen zwei Seiten eingeschlossenen Winkel hat, welches in jener durch die Achse gelegten Vertikalebene liegt und dass, wenn in zwei (oder mehreren) Dreiecken zwei Seiten des einen, bezw. zweien Seiten des andern gleich, die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, dem grösseren dieser Winkel auch die grössere Seite gegenüber liegen muss. (Siehe Kleyers Lehrbuch der Stereometrie, welches über die Lage der Linien und Ebenen im Raume handelt.)

**Erkl. 568.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man von einem Eckpunkt eines Dreiecks aus eine Strecke nach dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, so ist die Summe der Quadrate der beiden dieser Strecke anliegenden Seiten gleich der doppelten Summe der Quadrate über jener Verbindungsstrecke und der Hälfte der dritten Seite.“

Nach diesem Lehrsatz hat man in dem Dreieck $abP$, siehe Figur 188, die Relation:

$$\overline{aP}^2 + \overline{bP}^2 = 2\left(\overline{am}^2 + \overline{Pm}^2\right)$$

was man auch wie folgt beweisen kann:

Ist in der Figur 188 $am = mb$ und man fällt sich die Höhe $Pf$, so ist nach dem erweiterten pythagoräischen Lehrsatz (siehe Erklärung 569):

$$\text{a)} \ldots \overline{Pa}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{am}^2 + 2 \cdot \overline{am} \cdot \overline{mf}$$

und

$$\text{b)} \ldots \overline{Pb}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{mb}^2 - 2 \cdot \overline{mb} \cdot \overline{mf}$$

Addirt man diese beiden Gleichungen und berücksichtigt man, dass

$$\overline{am} = \overline{mb}$$

ist, so erhält man:

$$\overline{Pa}^2 + \overline{Pb}^2 = 2 \cdot \overline{Pm}^2 + 2 \cdot \overline{am}^2$$

oder

$$\overline{Pa}^2 + \overline{Pb}^2 = 2\left(\overline{Pm}^2 + \overline{am}^2\right)$$

**Erkl. 569.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Das Quadrat über einer Seite in einem beliebigen Dreieck ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, vermehrt oder vermindert, je nachdem jene Seite einem stumpfen oder einem spitzen Winkel gegenüberliegt, um das doppelte Rechteck, gebildet aus einer jener beiden andern Seiten und der Projektion der zweiten dieser Seiten auf jene.“

Dieser Lehrsatz ist der sogenannte erweiterte pythagoräischen Lehrsatz.

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.)

**Erkl. 570.** Setzt man in nebenstehender Gleichung d) den Wert für $R$ aus nebenstehender Gleichung 1) ein, so erhält man:

$$\text{d)} \ldots H = \sqrt{s^2 - \left(\frac{A^2 - R^2 - s^2}{2R}\right)^2}$$

oder nach der Erkl. 570:

$$2) \ldots H = \sqrt{s^2 - \frac{(4A^2 - S^2 - 3s^2)^2}{8(S^2 + s^2 - 2A^2)}}$$

Nach der vorstehenden Formel und nach den Gleichungen 1) und 2) erhält man schliesslich für das gesuchte Volumen $V$ des Prismas:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{S^2 + s^2}{2} - A^2\right) \cdot \pi \cdot \sqrt{s^2 - \frac{(4A^2 - S^2 - 3s^2)^2}{8(S^2 + s^2 - 2A^2)}}$$

$$H = \sqrt{s^2 - \left(\frac{A^2 - \left(\frac{S^2 + s^2}{2} - A^2\right) - s^2}{2 \cdot \sqrt{\frac{S^2 + s^2}{2} - A^2}}\right)^2}$$

oder

$$H = \sqrt{s^2 - \left(\frac{2 \cdot 2A^2 - S^2 - s^2 - 2s^2}{4\sqrt{\frac{S^2 + s^2}{2} - A^2}}\right)^2}$$

$$H = \sqrt{s^2 - \frac{(4A^2 - S^2 - 3s^2)^2}{16\left(\frac{S^2 + s^2}{2} - A^2\right)}}$$

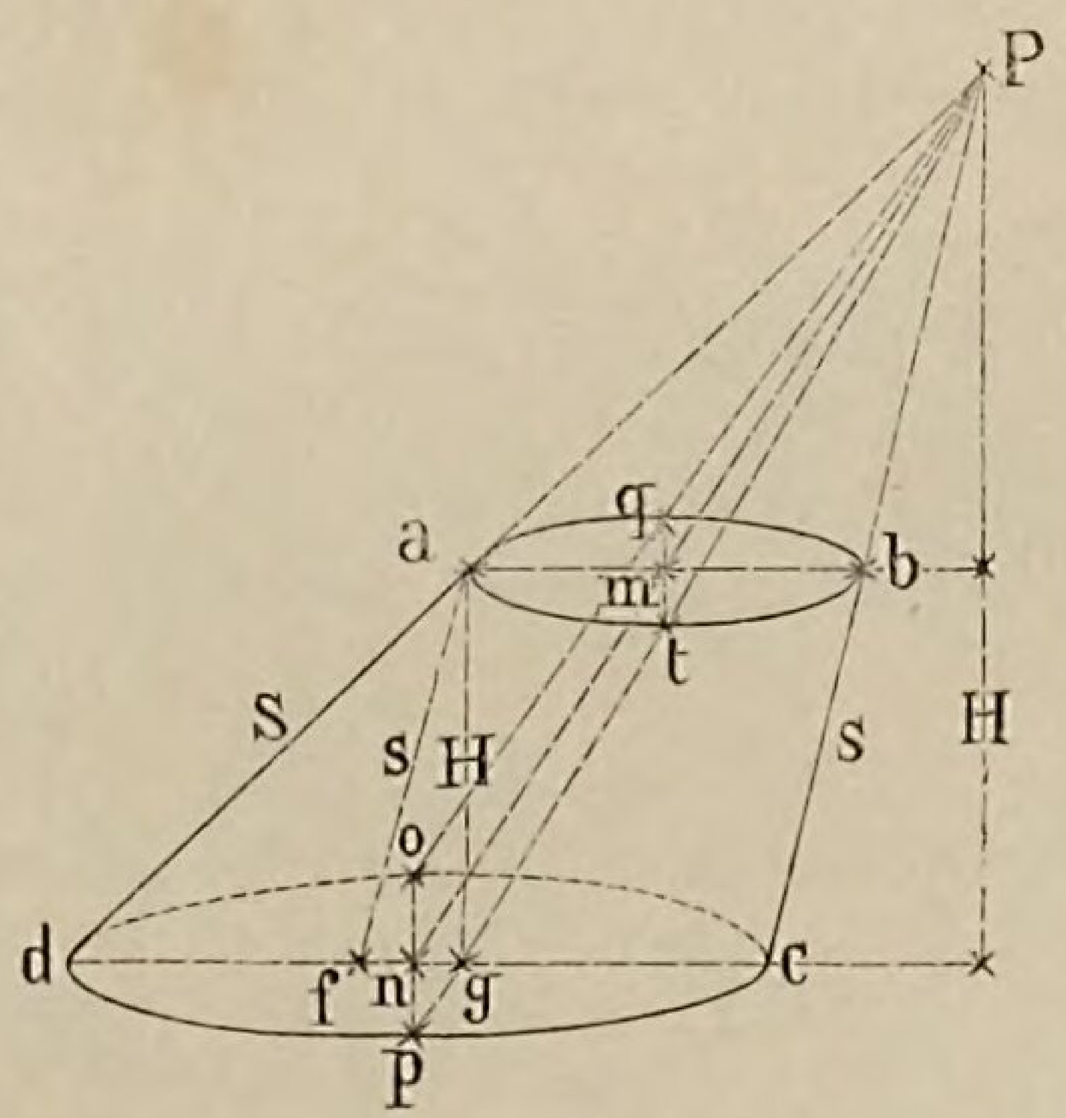
oder

$$H = \sqrt{s^2 - \frac{(4A^2 - S^2 - 3s^2)^2}{8(S^2 + s^2 - 2A^2)}}$$

---

**Aufgabe 669.** Von einem schiefen Kegelstumpf ist die grösste Seitenlinie $= 170$ cm, die kleinste 100 cm und die Radien der Grundflächen beziehungsw. $= 134^3/_4$ cm und $85^1/_2$ cm; wie gross ist das Volumen des Stumpfs?

Figur 189.




**Erkl. 571.** Da man einen schiefen Kegelstumpf als einen schiefen Pyramidenstumpf betrachten kann, dessen Grundflächen Polygone mit unzählig vielen, bezw. mit unendlich kleinen Seiten sind und das Volumen eines schiefen Pyramidenstumpfs $= \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + G)$ ist, so hat man zur Berechnung des Volumens $V$ eines schiefen Kegelstumpfs, dessen Grundflächen die Inhalte $R^2\pi$ und $r^2\pi$ haben und dessen Höhe $= H$ ist, die Formel:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

**Formel:**

Für einen schiefen Kegelstumpf:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \quad \text{(s. Erkl. 571).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ des durch die Figur 189 dargestellten schiefen Kegelstumpfs dient vorstehende Formel. In derselben bedeutet $R$ den Radius der unteren Grundfläche, welcher $= 134^3/_4$ cm ist; dann bedeutet $r$ den Radius der Deckfläche, welcher $= 85^1/_2$ cm ist, und schliesslich bedeutet $H$ die Höhe, welche nicht gegeben ist, also zunächst bestimmt werden muss.

Die Höhe $H$ kann man auf folgende Weise bestimmen:

Denkt man sich in dem Paralleltrapez $abcd$, welches den Achsenschnitt des Kegelstumpfs darstellt, der die grösste Seitenlinie $ad = S$ und die kleinste Seitenlinie $bc = s$ enthält, die Linie $af \parallel bc$ gezogen, so ist in dem Dreieck $adf$ die Seite $ad = S$, die Seite $af = bc = s$ und die Seite $df = dc - fc = dc - ab = 2R - 2r$ od. $= 2(R - r)$. Denkt man sich ferner noch die zur Seite $df$ dieses Dreiecks gehörige Höhe $ag$ gefällt, so stellt diese Höhe $ag$ zugleich auch die gesuchte Höhe des Kegelstumpfs dar und man kann den Inhalt des Dreiecks $adf$ auf zweierlei Weise ausdrücken. Einmal hat man für den Inhalt $J$ des Dreiecks $adf$:

**Erkl. 572.** Die Inhaltsberechnung des Mantels eines schiefen Kegels ist auf elementarem Wege nicht möglich.

**Erkl. 573.** Was in den Erkl. 566 und 567 in bezug auf die grösste und kleinste Seitenlinie eines schiefen Kegels gesagt ist, gilt in analoger Weise auch für den schiefen Kegelstumpf.

**Erkl. 574.** Setzt man in dem Ausdruck:

$$s_1 = \frac{S + 2(R-r) + s}{2}$$

für $S$, $R$, $r$ und $s$ bezw. die Werte 170, $134\frac{3}{4}$, $85\frac{1}{2}$ und 100, so erhält man:

$$s_1 = \frac{170 + 2\left(134\frac{3}{4} - 85\frac{1}{2}\right) + 100}{2}$$

oder

$$s_1 = \frac{270 + 2 \cdot 49\frac{1}{4}}{2} = 135 + 49\frac{1}{4}$$

oder

a) . . . $s_1 = 184\frac{1}{4}$

Hiernach erhält man ferner:

b) . . . für $s_1 - S = 184\frac{1}{4} - 170 = 14\frac{1}{4}$

c) für $s_1 - 2(R-r) = 184\frac{1}{4} - 2\left(134\frac{3}{4} - 85\frac{1}{2}\right)$

$$= 184\frac{1}{4} - 2 \cdot 49\frac{1}{4}$$

$$= 184\frac{1}{4} - 98\frac{1}{2} = 85\frac{3}{4}$$

und

d) . . . für $s_1 - s = 184\frac{1}{4} - 100 = 84\frac{1}{4}$

**Hülfsrechnungen:**

1) $\log\sqrt{184\frac{1}{4} \cdot 14\frac{1}{4} \cdot 85\frac{3}{4} \cdot 84\frac{1}{4}} =$

$\frac{1}{2} \cdot (\log 184{,}25 + \log 14{,}25 + \log 85{,}75 + \log 84{,}25)$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 184{,}25 &= 2{,}2654075 \\ +\log 14{,}25 &= 1{,}1538149 \\ +\log 85{,}75 &= 1{,}9332341 \\ +\log 84{,}25 &= 1{,}9255699 \\ \hline & \phantom{=}\ 7{,}2780264 \\ & \phantom{=}\ \cdot\tfrac{1}{2} \\ \hline & \phantom{=}\ 3{,}6390132 \end{aligned}$$

mithin: 0181

$$\sqrt{184\frac{1}{4} \cdot 14\frac{1}{4} \cdot 85\frac{3}{4} \cdot 84\frac{1}{4}} = 4355{,}3$$

$$J = \frac{\overline{df} \cdot \overline{ag}}{2} = \frac{2(R-r) \cdot H}{2}$$

oder

a) . . $J = (R-r) \cdot H$

Ein andermal hat man für den Inhalt $J$ des Dreiecks $adf$, wenn man in der in der Erkl. 535 aufgestellten Formel:

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{\overline{ad} + \overline{df} + \overline{fa}}{2} = \frac{S + 2(R-r) + s}{2}$$

$$= s_1$$

für

$$s - a = s_1 - S$$

für

$$s - b = s_1 - 2(R-r)$$

und für

$$s - c = s_1 - s$$

setzt:

b) $J = \sqrt{s_1(s_1 - S)[s_1 - 2(R-r)](s_1 - s)}$

worin man sich

c) . . . $s_1 = \dfrac{S + 2(R-r) + s}{2}$

gesetzt zu denken hat.

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man für $H$ die Bestimmungsgleichung:

$$(R-r) \cdot H = \sqrt{s_1(s_1-S)[s_1-2(R-r)](s_1-s)}$$

und hieraus erhält man:

d) $H = \dfrac{\sqrt{s_1(s_1-S)[s_1-2(R-r)](s_1-s)}}{R-r}$

Nach vorstehender Formel erhält man hiernach für das gesuchte Volumen $V$ des schiefen Kegelstumpfs:

A) $V = \dfrac{\pi\sqrt{s_1(s_1-S)[s_1-2(R-r)](s_1-s)}}{3(R-r)} (R^2 + R \cdot r + r^2)$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe, wenn man

$$s_1 = \frac{S + 2(R-r) + s}{2}$$

gesetzt denkt.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man somit und nach der Erklärung 574:

$$V = \frac{3{,}1416}{3(134{,}75-85{,}5)}\sqrt{184\frac{1}{4} \cdot 14\frac{1}{4} \cdot 85\frac{3}{4} \cdot 84\frac{1}{4}} \cdot (134{,}75^2 + 134{,}75 \cdot 85{,}5 + 85{,}5^2)$$

oder

2) $\log 134{,}75^2 = 2 \cdot \log 134{,}75$

Nun ist: $\log 134{,}75 = 2{,}1295288$

$\cdot 2$

$4{,}2590576$

$0441$

$135$

mithin: $143{,}4$

$134{,}75^2 = 18157{,}6$

3) $\log 134{,}75 \cdot 85{,}5 = \log 134{,}75 + \log 85{,}5$

Nun ist: $\log 134{,}75 = 2{,}1295288$

$+ \log 85{,}5 = 1{,}9319661$

$4{,}0614949$

$4902$

$47$

mithin: $37{,}7$

$134{,}75 \cdot 85{,}5 = 11521{,}1$

4) $\log 85{,}5^2 = 2 \cdot \log 85{,}5$

Nun ist: $\log 85{,}5 = 1{,}9319661$

$\cdot 2$

$3{,}8639322$

$9293$

mithin: $29$

$85{,}5^2 = 7310{,}25$ $29{,}5$

5)

$\log V = \log 1{,}0472 + \log 4355{,}2 + \log 37988{,}9 - \log 49{,}25$

Nun ist:

$\log 1{,}0472 = 0{,}0200296$

$+ \log 4355{,}2 = 3{,}6390181$

$+ \log 36988{,}9 = 4{,}5680608$

$+ 106{,}2$

$8{,}2271191$

$- \log 49{,}25 = - 1{,}6924062$

$\log V = 6{,}5347129$

$7113$

mithin: $16$

$V = 3425410$ $12{,}7$

$$V = \frac{1{,}0472}{49{,}25} \cdot 4355{,}3 \cdot (18157{,}6 + 11521{,}1 + 7310{,}25)$$

[siehe die Hülfsrechnungen 1) bis 4)]

$$V = \frac{1{,}0472 \cdot 4355{,}3 \cdot 36988{,}9}{49{,}25}$$

Nach der Hülfsrechnung 5) erhält man hiernach für das gesuchte Volumen $V$:

$$V = 3425410 \text{ ccm}$$

oder

B) . . . $V = 3{,}42541$ cbm

---

**Aufgabe 670.** Man soll das Volumen des schiefen Kugelausschnitts berechnen, der entsteht, wenn man ein Stück einer Kugelfläche, dessen Inhalt $J$ ist, mittels einer beliebigen, in sich zurückkehrenden Linie begrenzt und sämtliche Punkte dieser Linie mit dem Mittelpunkt der Kugel verbunden denkt. Der Radius der Kugel sei $= r$.

**Formel:**

Für eine schiefe Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 532).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich das Stück der Kugelfläche, welches durch die beliebigen Linien begrenzt wird und dessen Inhalt $= J$ ist, in lauter unendlich kleine Figürchen mit den Inhalten $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3 \cdots$ zerlegt und die Eckpunkte derselben mit dem Mittelpunkt der Kugel verbunden, so entstehen unendlich viele

Pyramidchen, deren Grundflächen bezw. $= \delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \cdots$ und deren Höhen gleich dem Radius $r$ der Kugel sind. Da nun diese Pyramidchen in ihrer Gesamtheit den schiefen Kugelausschnitt ausmachen, so hat man für das Volumen $V$ dieses schiefen Kegelausschnitts nach vorstehender Formel:

$$V = \frac{\delta \cdot r}{3} + \frac{\delta_1 \cdot r}{3} + \frac{\delta_2 \cdot r}{3} + \frac{\delta_3 \cdot r}{3} + \cdots$$

oder

$$V = \frac{r}{3}(\delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots)$$

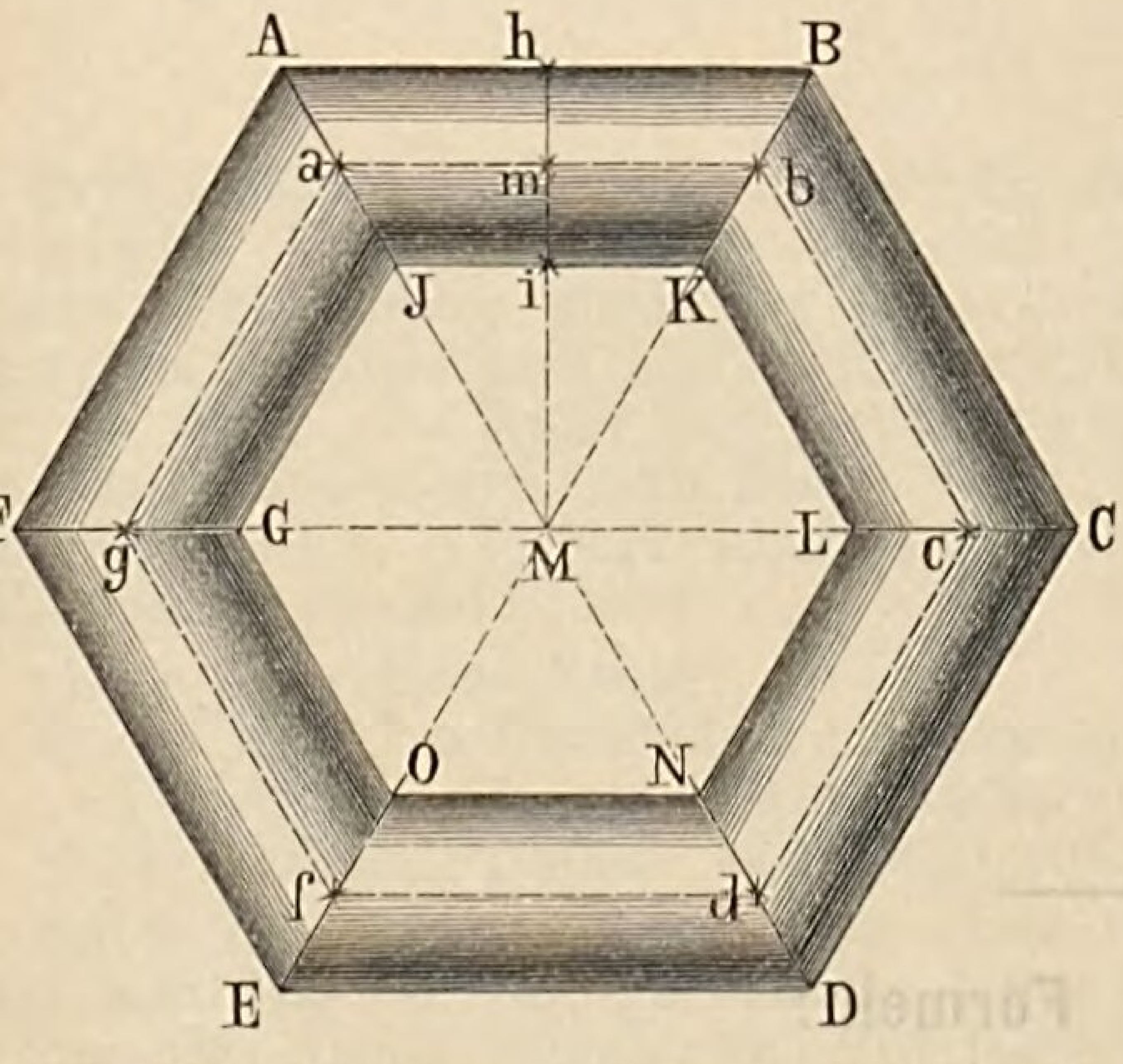
Setzt man für die Summe der Inhalte $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \cdots$ den Inhalt $J$ des begrenzten Stücks der Kugelfläche, so erhält man hiernach:

$$V = \frac{r \cdot J}{3}$$

---

**Aufgabe 671.** Sechs gleiche, cylindrische Röhren mit der lichten Weite $2r$ schneiden sich so, dass ihre Achsen ein reguläres 6-Eck bilden, an dessen Ecken je zwei benachbarte Röhren in einer schiefen Abstumpfungsfläche aneinander stossen; die Seite dieses 6-Ecks sei $= p$. Wie gross ist der innere Hohlraum des so entstandenen Körpers?

Figur 190.




**Erkl. 575.** Da man einen schiefen Cylinder als ein schiefes Prisma betrachten kann, dessen Basis ein Polygon mit unzählig vielen, bezw. mit unendlich kleinen Seiten ist, und das Volumen eines schiefen Prismas gleich dem Produkt aus der Grundfläche und der Höhe ist, so hat man zur Berechnung des Volumens $V$

**Formel:**

Für einen schiefen und schief abgeschnittenen Cylinder:

$$V = \varrho^2 \pi \cdot A \text{ (s. Erkl. 578).}$$

**Auflösung.** Stellt, siehe Fig. 190, $ABCDEFGJKLNO$ den Körper dar, der durch Aneinanderstossen der sechs kongruenten, schiefen und schief abgeschnittenen Cylinder $AJKB$, $BKLC$, $CLND$, $DNOE$, $EOGF$ und $FGJA$ gebildet wird, so ist aus dieser Figur ersichtlich, dass das gesuchte Volumen $V$ dieses Körpers gleich dem sechsfachen Volumen eines jener Cylinder, z. B. des Cylinders $AJKB$ ist.

Da nun der Cylinder $AJKB$ ein schiefer und schief abgeschnittener (oder ein gerader, beiderseits schief abgeschnittener) Cylinder ist, dessen lichte Weite $= 2r$ ist, dessen Normalschnitt also den Radius $r$ hat und dessen Achse $ab$ gleich der gegebenen Seite $p$ des Sechsecks $abcdfg$ ist, so erhält man, wenn man in vorstehender Formel

$$\varrho = r$$

und

$$H = p$$

eines schiefen Cylinders, dessen Grundflächenradius $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist, die Formel:

$$V = R^2\pi \cdot H$$

**Erkl. 576.** Die Inhaltsbestimmung des Mantels eines schiefen Cylinders aus der Höhe $H$ und dem Grundflächenradius $R$, ist auf elementarem Wege nicht möglich.

**Erkl. 577.** Bezeichnet man den Grundflächenradius eines geraden, aber schief abgeschnittenen Cylinders mit $R$, die längste Seitenlinie mit $a$, die kürzeste mit $b$, den Mantel mit $M$ und das Volumen mit $V$, so bestehen nach der gelösten Aufgabe 228 die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \ldots M = 2R\pi \cdot \frac{a+b}{2} \\ &\text{und} \\ &\text{b)} \ldots V = R^2\pi \cdot \frac{a+b}{2} \end{aligned}\right\} \text{(s. Erkl. 214).}$$

**Erkl. 578.** Bezeichnet man den Radius des Normalschnitts eines schiefen und schief abgeschnittenen oder, was dasselbe ist, eines geraden und beiderseits schief abgeschnittenen Cylinders mit $\varrho$, die Achse desselben mit $A$, dessen Volumen mit $V$ und dessen Mantel mit $M$, so bestehen die Formeln:

$$\text{a)} \ldots V = \varrho^2\pi \cdot A$$
$$\text{b)} \ldots M = 2\varrho\pi \cdot A$$

Diese Formeln sind Folgerungen von den in den Erkl. 555 u. 557 aufgestellten Formeln, wenn man den Cylinder als ein Prisma mit unendlich schmalen, bezw. mit unendlich vielen Seitenflächen ansieht.

**Erkl. 579.** Bezeichnet man den Radius des Grundkreises eines geraden und nur einerseits schief abgeschnittenen Cylinders mit $R$, die Achse mit $A$, das Volumen mit $V$ und den Mantel mit $M$, so bestehen nach den in der Erkl. 578 aufgestellten Formeln, da für diesen Fall der Grundkreis zugleich Normalschnitt ist:

$$\text{a)} \ldots V = R^2\pi \cdot A$$
und
$$\text{b)} \ldots M = 2R\pi \cdot A$$

Diese Formeln kann man auch aus den in der Erkl. 577 erwähnten Formeln ableiten, wenn man berücksichtigt, dass die Achse $A$ die Mittellinie eines Paralleltrapezes ist, dessen parallele Seiten $a$ und $b$ sind, dass, also $\frac{a+b}{2} = A$ gesetzt werden kann.

setzt, für das gesuchte Volumen $V$ des durch die Fig. 190 dargestellten Körpers:

$$V = 6 \cdot r^2\pi \cdot p$$

oder

$$\text{A)} \ldots V = 6pr^2 \cdot \pi$$

---

**Aufgabe 672.** Zwei gerade Cylinder, deren Grundflächenradien je $= R$ sind, durchdringen sich so, dass sich ihre Achsen rechtwinklig durchschneiden. Wie gross ist die Oberfläche und wie gross das Volumen des beiden Cylindern gemeinschaftlichen Körperstücks?

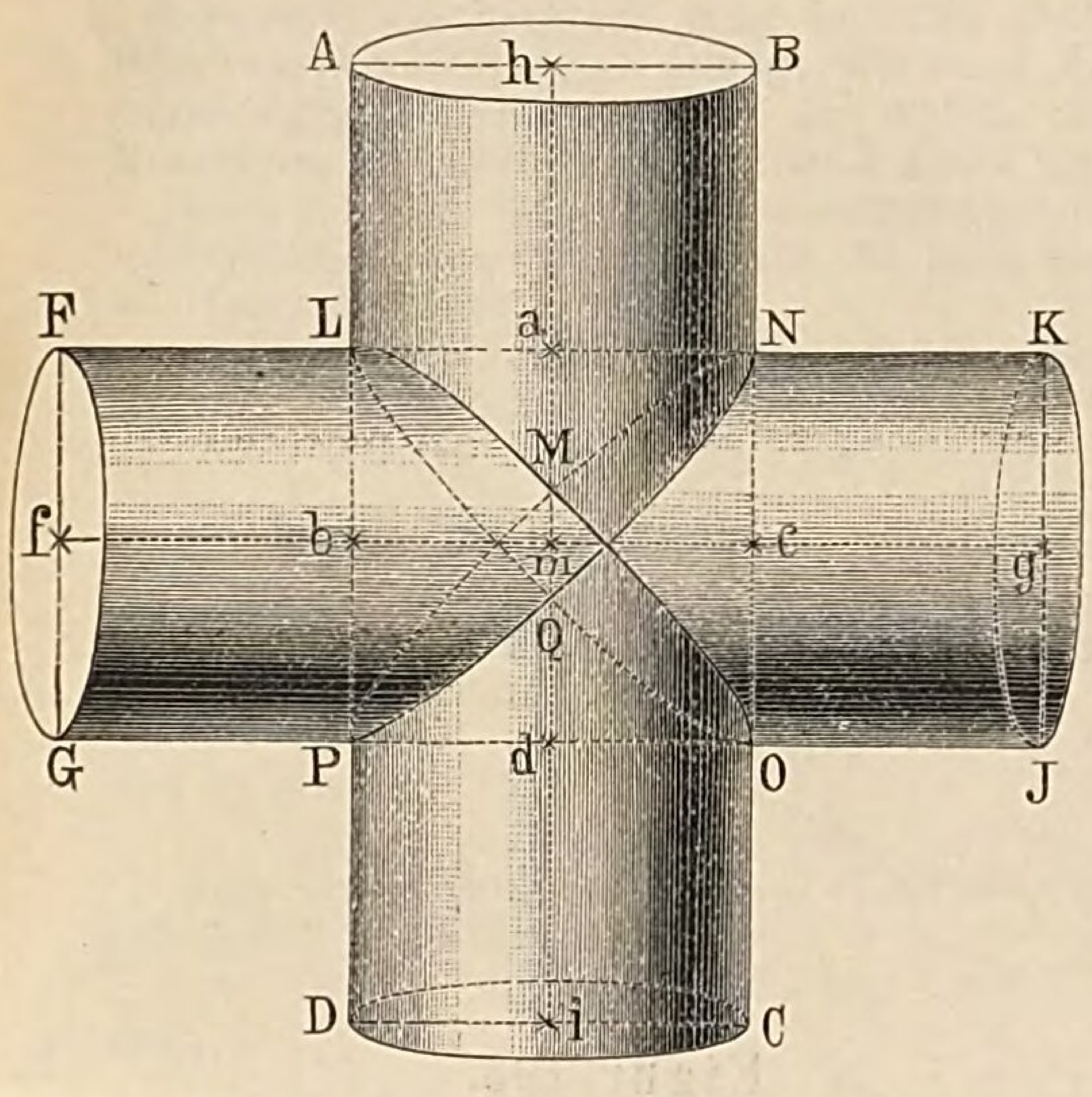
**Formeln:**

Für ein Cylinderhuf, dessen Grundfläche ein Halbkreis ist:

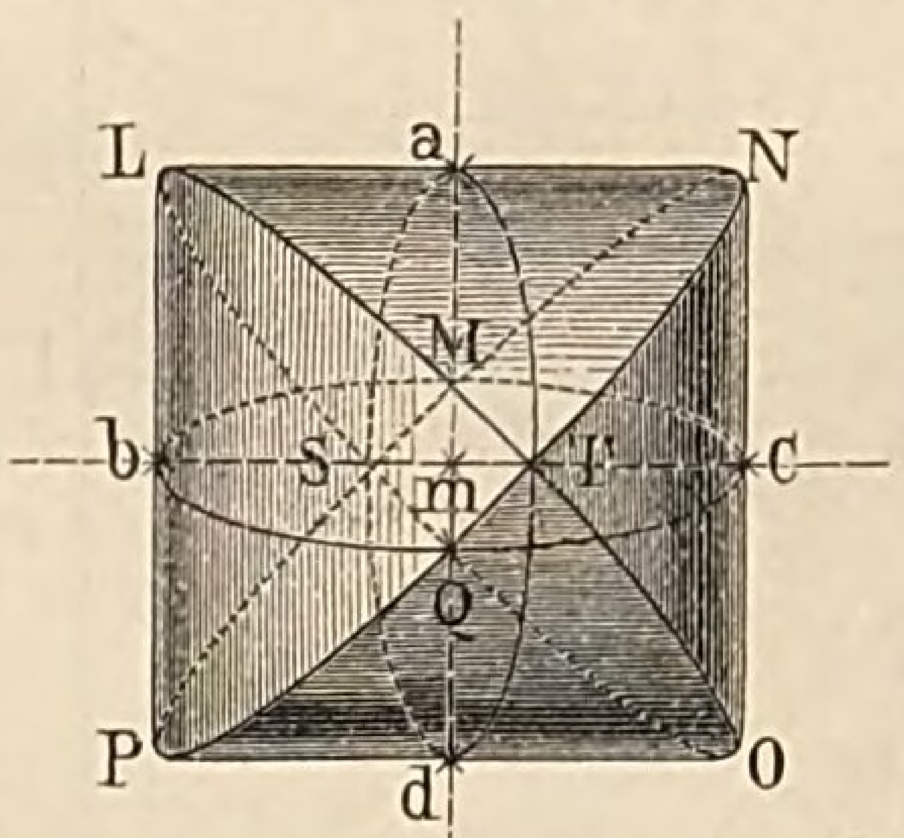
$$\text{I.} \ldots M = 2R \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 583)}$$

$$\text{II.} \ldots V = \frac{2R^2}{3} \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 584).}$$

Figur 191.




Figur 192.




**Erkl. 580.** Unter einem huf- oder klauenförmigen Abschnitt eines Cylinders oder Kegels, bezw. unter einem Cylinder- oder Kegelhuf versteht man einen Teil dieser Körper, der durch eine schief oder senkrecht gegen ihre Grundflächen gerichtete Ebene davon abgeschnitten wird. Die Begrenzungsflächen eines hufförmigen Abschnitts sind:

a) die schneidende Ebene,
b) ein Teil der Grundfläche, in besondern Fällen auch die ganze Grundfläche und
c) ein Teil des Cylinder- oder Kegelmantels.

Unter der Grundfläche eines Hufs versteht man den Teil der Grundfläche jenes Cylinders oder Kegels, welcher den Huf begrenzt; unter dem Mantel eines Hufs versteht man den Teil der Mantelfläche jenes Cylinders oder Kegels, welcher den Huf begrenzt; unter der Höhe eines Hufs versteht man den Abstand des Punktes der Mantelfläche, welcher von der Grundfläche am weitesten entfernt ist, von letzterer.

**Auflösung.** Stellen in der Fig. 191 $ABCD$ und $FGJK$ die kongruenten, sich mit ihren Achsen rechtwinklig durchdringenden, geraden Cylinder dar und man denkt sich den Körperteil, welchen beide sich durchdringenden Cylinder gemeinsam haben, herausgenommen, so erhält man den durch die Figur 192 dargestellten Körper.

Zur Berechnung der Oberfläche und des Volumens dieses durch die Fig. 192 dargestellten Körpers denke man sich durch den Schnittpunkt $m$ der grössten Achsen der kongruenten Ellipsen $LO$ und $PN$, bezw. durch den Schnittpunkt $m$ der Cylinderachsen $fg$ und $hi$, siehe Fig. 191, die zwei zu einander senkrechten Ebenen $ad$ und $bc$ gelegt. Durch diese beiden Ebenen wird der durch die Figur 192 dargestellte Körper in acht kongruente Cylinderhufe zerlegt.

Da jeder dieser acht Cylinderhufe, wie z. B. der Cylinderhuf $cMQN$ als Grundfläche einen Halbkreis $MQc$ hat, so dienen zur Berechnung des Mantels und des Volumens eines solchen Cylinderhufs vorstehende Formeln:

Berücksichtigt man, dass z. B. die Höhe $Nc$ des Cylinderhufs $cMQN$ $= \frac{NO}{2} = \frac{KJ}{2} = \frac{2R}{2} = R$ ist (siehe Fig. 191), dass der Grundflächenradius dieses Hufs ebenfalls gleich dem gegebenen Grundflächenradius $R$ des Cylinders ist und dass der gesuchte Mantel $M$ des durch die Fig. 192 dargestellten Körpers gleich der Summe der Mäntel der acht kongruenten Kegelhufe, das gesuchte Volumen $V$ jenes Körpers gleich der Summe der Volumen dieser acht kongruenten Kegelhufe ist, so hat man mittels Benutzung der vorstehenden Formeln für die gesuchten Grössen $M$ u. $V$:

$$M = 8 \cdot 2R \cdot R$$

oder

A) . . . $M = 16 R^2$

und

$$V = 8 \cdot \frac{2R^2}{3} \cdot R$$

oder

B) . . . $V = \frac{16}{3} \cdot R^3$

**Erkl. 581.** Die Berechnung des Volumens und der Oberfläche eines Hufs gehört im allgemeinen nicht mehr in das Gebiet der elementaren Mathematik, sondern in das Gebiet der analytischen Geometrie des Raumes. Auf elementarem Wege kann man nur die Volumen und die Mäntel der hufförmigen Abschnitte gerader Cylinder und gerader Kegel bestimmen, und selbst das nur auf ziemlich umständliche Weise.

**Erkl. 582.** Ueber die Berechnung hufförmiger Abschnitte findet man ausführliches in Kleyers Lehrbuch der analytischen Geometrie des Raumes.

In den nachfolgenden Erkl. 583 und 584 ist gezeigt, auf welche Weise die Berechnung des Mantels und des Volumens eines Cylinderhufs stattfinden kann und zwar für den besondern Fall, dass die Ebene, welche von dem Cylinder den Huf abschneidet, durch einen Durchmesser der Grundfläche geht, und der Cylinder ein gerader ist.

**Erkl. 583.** Bezeichnet man den Durchmesser des Grundkreises eines geraden Cylinders mit $2R$, die Höhe eines hufförmigen Abschnitts, dessen Grundfläche ein Halbkreis jenes Cylinders ist, mit $H$, die Mantelfläche des Hufs mit $M$, so besteht die Formel:

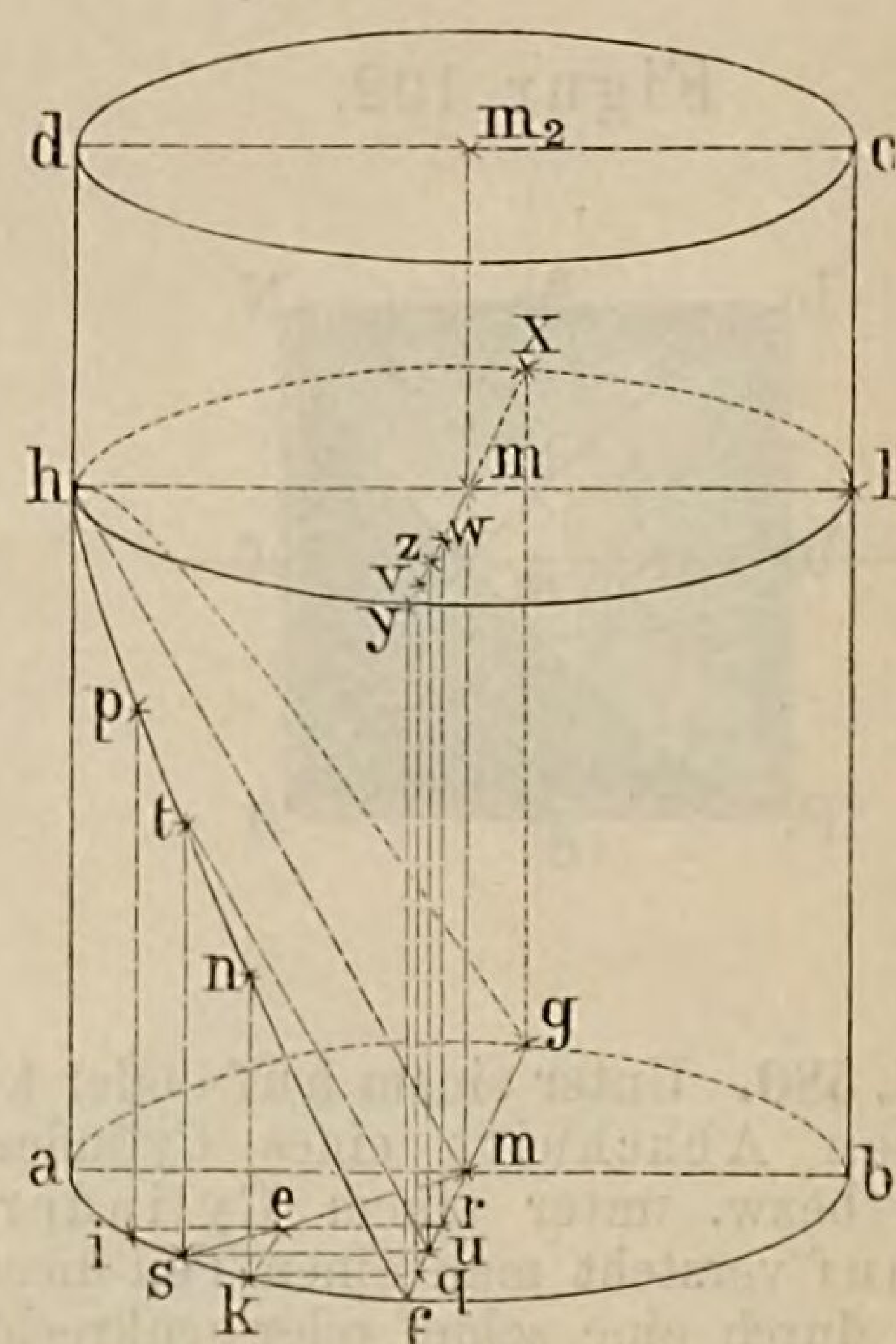
$$1) \ldots M = 2R \cdot H$$

Diese Formel kann man wie folgt herleiten:

Ist, siehe Figur 193, $afgh$ der hufförmige Abschnitt, dessen Grundfläche der Halbkreis $afg$ ist, und man denkt sich senkrecht zum Durchmesser $fg$ eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Huf $afgh$ in dem rechtwinkligen Dreieck $amh$, dessen Kathete $ah$ die Höhe des Hufs ist; denkt man sich ferner durch $h$ eine Ebene parallel zur Grundfläche $ab$ des Cylinders und durch $fg$ eine Ebene senkrecht zur Grundfläche $ab$ gelegt, so erhält man als Schnittfigur dieser beiden Ebenen mit dem Cylinder das Rechteck $fgxy$, dessen Grundlinie $fg = 2R$ und dessen Höhe $mm_1 = ah$, nämlich gleich der Höhe $H$ des Hufs $afgh$ ist und welches noch die Eigenshcaft hat, dass sein Inhalt $2R \cdot H$ $(= \overline{fg} \cdot \overline{mm_1})$ gleich dem zu bestimmenden Mantel $M$ des Hufs $afgh$ ist, was noch zu beweisen übrig bleibt.

Denkt man sich zu diesem Zweck den Bogen $fag$ aus unendlich kleinen geraden Linien, wie $ik$ zusammengesetzt und von den Eckpunkten derselben Senkrechte, wie $ip$ und $kn$ errichtet, so wird hierdurch der Mantel des Hufs in lauter unendlich schmale Paralleltrapeze, wie $iknp$ zerlegt und man kann den Inhalt des Mantels des Hufs gleich der Summe der Inhalte aller dieser Paralleltrapeze setzen. Denkt man sich ferner von den Endpunkten jener unendlich kleinen Linien, wie $ik$, aus welchen man den Bogen $fag$ zusammengesetzt denken kann, Perpendikel auf den Durchmesser $fg$ gefällt, wie z. B. die Perpendikel $ir$ und $kq$ und in den

Figur 193.



Fusspunkten dieser Perpendikel Senkrechte zu $fg$ errichtet, wie z. B. die Senkrechten $qv$ und $rw$, so wird das Rechteck $fgxy$ in lauter kleine Rechteckchen, wie $qrwv$ zerlegt, die bezw. den zugehörigen Paralleltrapezen, in welche der Mantel des Hufs geteilt ist, an Inhalt gleich sind.

Dass z. B. das || tr. $iknp$ dem entsprechenden Rechteckchen $qrwv$ inhaltsgleich ist, kann man wie folgt darthun:

Zieht man sich die Mittellinie $st$ des Paralleltrapezes $iknp$, so ist:

1) . . . I. d. || tr. $iknp = \overline{st} \cdot \overline{ik}$

Zieht man ferner $su \perp fg$

$ke \parallel fg$

und verbindet $u$ mit $t$ und $s$ mit $m$, so ist, wegen Gleichheit der Winkel:

a) . . . $\triangle ike \sim \triangle msu$

und

o) . . . $\triangle sut \sim \triangle amh$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke ergeben sich die Relationen:

b) . . . $\overline{ik} : \overline{ke} = \overline{ms} : \overline{su}$

und

c) . . . $\overline{su} : \overline{st} = \overline{am} : \overline{ah}$

Da nun: $\overline{am} = \overline{ms}$

$\overline{ke} = \overline{qr}$

$\overline{ah} = \overline{qv}$

ist, so erhält man hieraus:

d) . . . $\overline{ik} : \overline{qr} = \overline{am} : \overline{su}$

f) . . . $\overline{su} : \overline{st} = \overline{am} : \overline{qv}$

Durch Division dieser beiden Proportionen ergibt sich:

$$\frac{\overline{ik} \cdot \overline{st}}{\overline{su} \cdot \overline{qr}} = \frac{\overline{am} \cdot \overline{qv}}{\overline{am} \cdot \overline{su}}$$

oder

2) . . . $\overline{ik} \cdot \overline{st} = \overline{qr} \cdot \overline{qv}$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man somit:

3) . . . I. d. || tr. $iknp = \overline{st} \cdot \overline{ik} = \overline{qr} \cdot \overline{qv}$

d. h. der Inhalt des || tr. $iknp$ ist gleich dem Inhalt des Rechtecks $qrwv$.

Aus Vorstehendem ergibt sich also, dass der Inhalt des in unendlich schmale Paralleltrapeze zerlegt gedachten Hufmantels gleich dem Inhalte $2R \cdot H$ des in die entsprechenden Rechteckchen zerlegt gedachten Rechtecks $fgxy$ ist.

**Erkl. 584.** Bezeichnet man den Radius des Grundkreises eines geraden Cylinders mit $R$, die Höhe eines hufförmigen Abschnitts, dessen Grundfläche ein Halbkreis jenes Cylinders ist, mit $H$, das Volumen des Hufs mit $V$, so besteht die Formel:

$$V = \frac{2R^2 \cdot H}{3}$$

Diese Formel kann man wie folgt herleiten:

Denkt man sich, analog wie in voriger Erklärung angegeben wurde, den Mantel eines Cylinderhufs, z. B. den Mantel des Cylinderhufs

$afgh$ in Fig. 193 in lauter unendlich schmale Parallеltrapeze, wie $iknp$, zerlegt und die Eckpunkte dieser Paralleltrapeze mit dem Mittelpunkt $m$ der Cylindergrundfläche verbunden, so wird der Huf $afgh$ in lauter Pyramidchen zerlegt, deren Grundflächen jene Paralleltrapeze und deren Höhen sämtlich gleich dem Radius $R$ des Cylindergrundkreises sind. Für das Volumen $V$ des Hufs hat man somit, wenn man die Inhalte jener Paralleltrapeze der Reihe nach mit $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3 \cdots$ bezeichnet:

$$V = \frac{\delta \cdot R}{3} + \frac{\delta_1 \cdot R}{3} + \frac{\delta_2 \cdot R}{3} + \frac{\delta_3 \cdot R}{3} + \cdots$$

oder

$$V = \frac{R}{3}(\delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots)$$

Da nun die Summe der Inhalte $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2 \cdots$ aller jener Paralleltrapeze gleich dem Mantel $M$ des Hufs ist, so hat man nach der in der Erklärung 583 aufgestellten Formel 1):

$$V = \frac{R}{3} \cdot 2R \cdot H$$

oder

$$1) \ldots V = \frac{2R^2}{3} \cdot H$$

**Erkl. 585.** Bezeichnet man den Grundflächenradius eines geraden Cylinders mit $R$, die Höhe eines hufförmigen Abschnitts, dessen Grundfläche gleich der Grundfläche des Cylinders ist, siehe Figur 194, mit $H$, den Mantel mit $M$, das Volumen mit $V$, so bestehen die Formeln:

$$a) \ldots M = R\pi \cdot H$$

und

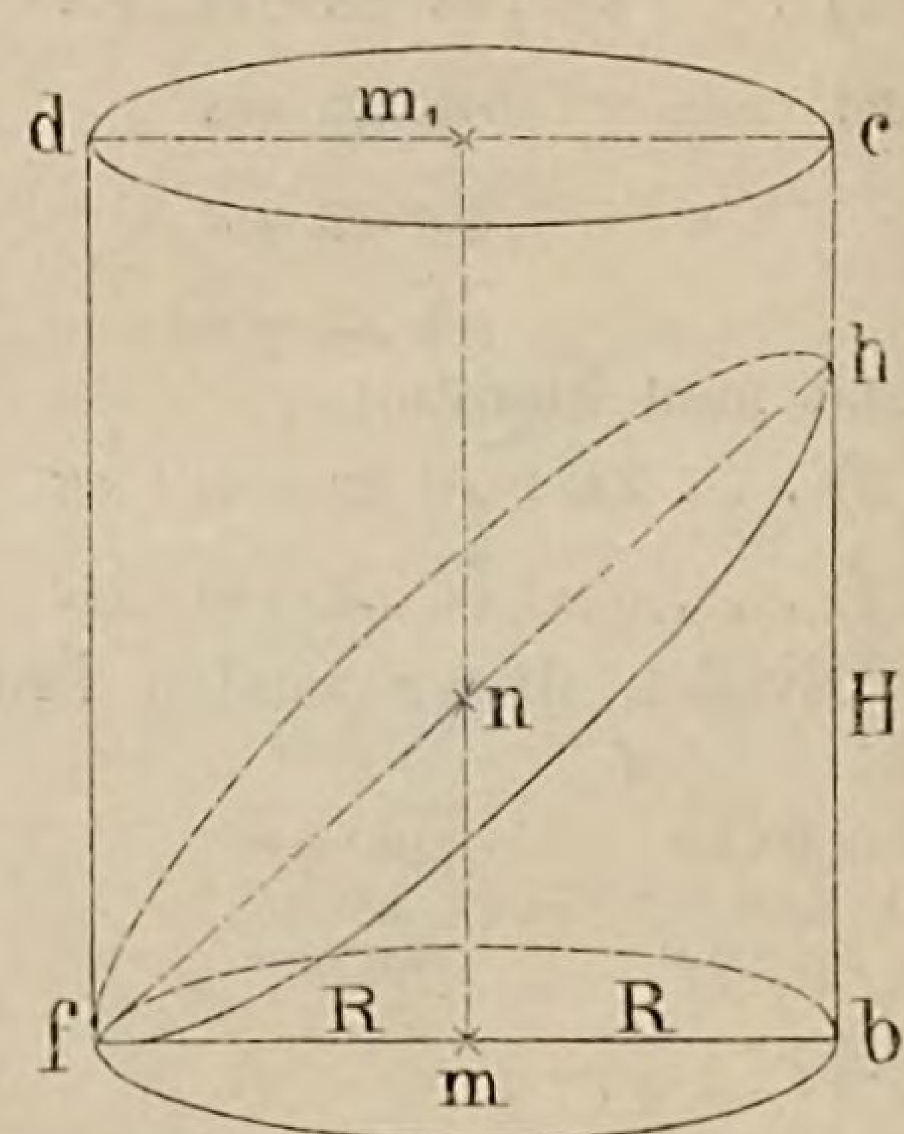
$$b) \ldots V = \frac{R^2\pi \cdot H}{2}$$

Diese Formeln kann man aus den in der Erkl. 577 aufgestellten Formeln herleiten, wenn man in denselben

$$b = H \quad \text{und} \quad a = o$$

setzt.

Figur 194.




## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 673.** Man berechne das Volumen einer Pyramide, deren Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten $a = 0{,}85$ m, $b = 0{,}60$ m, $c = 1{,}02$ m und deren Höhe $H = 2{,}4$ m ist.

**Andeutung.** Die Aufgaben 673 bis 682 sind analog den gelösten Aufgaben 656 bis 660 zu lösen.

**Aufgabe 674.** In der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie $g = 32{,}5$ cm und dessen Schenkel $s = 45{,}08$ cm misst, sei auf der Ebene desselben eine Senkrechte errichtet und ein solcher Punkt derselben mit den beiden andern Dreieckspunkten verbunden, dass diese Verbindungslinien die Länge $c = 72{,}81$ cm haben. Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen der somit gebildeten Pyramide?

**Aufgabe 675.** Wie gross ist das Volumen einer Pyramide, deren Höhe $H = 10$ m und deren Grundfläche ein Kreisviereck mit den Seiten $a = 5$, $b = 6$, $c = 3$ und $d = 2$ m ist?

**Aufgabe 676.** Von einer schiefen, dreiseitigen Pyramide kennt man die Grundkanten $a$, $b$ und $c$ und die Entfernung $p$, $q$ und $t$ des Fusspunktes der Höhe von den Ecken der Grundfläche. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche der Pyramide?

**Aufgabe 677.** Errichtet man in dem Mittelpunkt des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, dessen Umfang $U$ gegeben ist und dessen Seiten in dem Verhältnis wie $m:n:p$ stehen, eine Senkrechte, deren Länge $= H$ ist und verbindet den Endpunkt derselben mit den Eckpunkten jenes Dreiecks, so erhält man das Kantennetz einer schiefen, dreiseitigen Pyramide; wie gross ist das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide?

**Aufgabe 678.** Verbindet man die 4 Ecken einer Seitenfläche eines Würfels mit einer Ecke der dieser Seitenfläche parallelen Seitenfläche, so erhält man das Kantennetz einer schiefen Pyramide. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche der letzteren?

**Aufgabe 679.** Von einer dreiseitigen Pyramide misst jede der drei Seitenkanten 10 m, die Grundkanten messen bezw. 5 m, 3 m und 4 m. Durch dieses Tetraeder soll parallel zur Basis eine Ebene so gelegt werden, dass die durch dieselbe abgeschnittene Pyramide zur ganzen Pyramide im Verhältnis von $2:5$ stehe; wie gross ist das Volumen eines jeden dieser Teile, in welche die Pyramide durch die Schnittebene zerlegt wird?

**Aufgabe 680.** Wie gross ist das Volumen einer dreiseitigen Pyramide, wenn die Grundkanten derselben $= a$, $b$ und $c$ sind und die der Grundkante $a$ gegenüberliegende Seitenkante ebenfalls $= a$, die der Grundkante $b$ gegenüberliegende Seitenkante ebenfalls $= b$ und die der Grundkante $c$ gegenüberliegende Seitenkante ebenfalls $= c$ ist?

**Aufgabe 681.** In einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundkanten $a$, $b$ und $c$ bezw. $=$ 104, 112, 120 und deren Seitenkanten sämtlich $= k = 97$ cm sind, sei ein gerader Cylinder so einbeschrieben, dass seine eine Grundfläche in derjenigen der Pyramide liegt und seine andre Grundfläche einer zu der Grundfläche parallelen Schnittfigur einbeschrieben ist. Wie gross ist das Volumen des Cylinders, wenn die Diagonale $d$ eines Achsenschnitts des Cylinders $= 51$ cm misst?

**Aufgabe 682.** Wie gross ist das Volumen eines schiefen, dreiseitigen Pyramidenstumpfs, dessen Seitenkanten sämtlich die Länge $k = 7{,}5$ m haben und dessen untere Grundkanten $a$, $b$ und $c$, bezw. $= 4{,}2$ m, $2{,}8$ m und $4{,}2$ m sind und deren obere Grundkanten zu den unteren im Verhältnis $3:4$ stehen:

**Aufgabe 683.** Die drei parallelen Seitenkanten eines schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas sind 8 m, 9,5 m und 4,8 m lang; der Inhalt des Normalschnitts beträgt 25 qm; wie gross ist das Volumen jenes Prismas?

**Andeutung.** Die Aufgaben 683 bis 685 sind analog den gelösten Aufgaben 661—665 zu lösen.

**Aufgabe 684.** Die drei parallelen Seitenkanten eines schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas sind 82,5 cm, 60,3 cm und 21,8 cm lang; die drei Seiten des Normalschnitts messen 10,6 cm, 18,2 cm und 21,3 cm. Wie gross ist das Volumen des Prismas?

**Aufgabe 685.** Wenn das Volumen eines schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas 127,8 cbm, der Inhalt des zu den Seitenkanten senkrechten Querschnitts = 9 qm beträgt; wie gross sind alsdann die drei im Verhältnis von 7 : 9 : 14 zu einander stehenden, parallelen Seitenkanten.

---

**Aufgabe 686.** Man soll das Volumen eines schiefen Kegels aus der längsten Seitenlinie $S = 2^1/_2$ m, aus der kürzesten Seitenlinie $s = 2$ m und dem Radius $R = 0,55$ m der Grundfläche berechnen.

**Andeutung.** Die Aufgaben 686 bis 692 sind analog den gelösten Aufgaben 668 bis 669 zu lösen.

**Aufgabe 687.** Die grösste Seitenlinie eines schiefen Kegels sei = 9,5 m, die kleinste = 7,3 m und die Achse des Kegels = 8,4; wie gross ist das Volumen des Kegels?

**Aufgabe 688.** Aus der Höhe eines Kegels = 13 cm seiner Achse = 15,5 cm und seiner grössten Seite = 20 cm die kleinste Seite zu berechnen.

**Aufgabe 689.** Wie gross ist das Volumen eines schiefen Kegels, wenn die Achse = 7 m, die Höhe = 5,3 m, die grösste Seitenlinie desselben = 8,45 m ist?

**Aufgabe 690.** Ein Kegel, dessen Höhe $H =$ 9,85 cbm ist, sei einer vierseitigen Pyramide umbeschrieben, deren Grundfläche ein Sehnenviereck mit den Seiten $a = 13,30$, $b = 6,80$, $c = 9,75$ und $d = 4,45$ cm ist. Wie gross ist das Volumen des Kegels?

**Andeutung.** Zu lösen mittels der in den Erkl. 405 und 406 aufgestellten Relationen.

**Aufgabe 691.** Von einem schiefen Kegelstumpf seien die grösste Seitenlinie $S = 105$ cm, die kleinste $s = 86$ cm und die Radien $R$ und $r$ der Endflächen bezw. = 62 und 44 cm gegeben; wie gross ist das Volumen desselben?

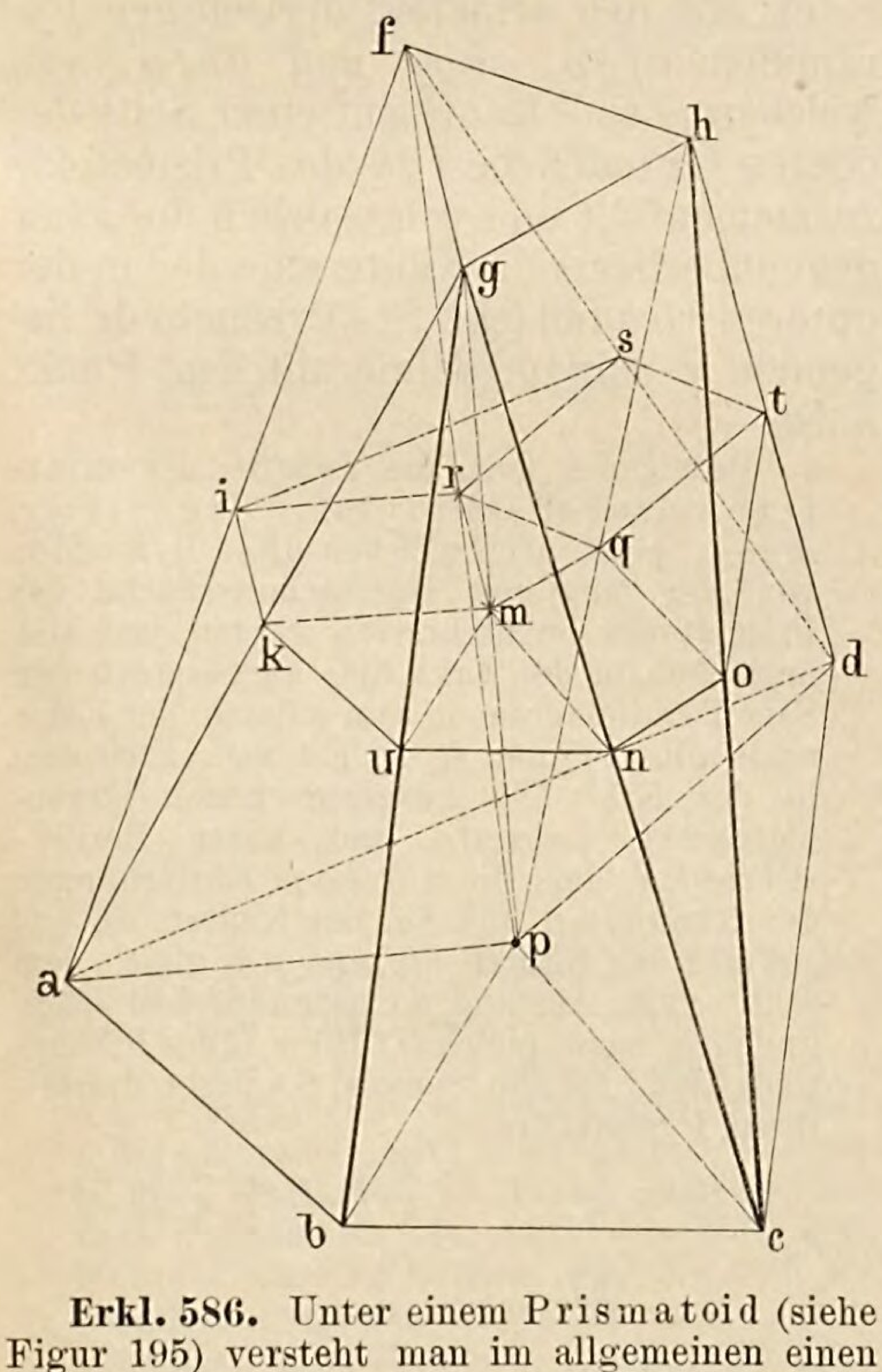
**Aufgabe 692.** Man soll aus dem Volumen $V$ eines schiefen Kegelstumpfs, der grössten Seitenlinie $S = 2,3$ dm, der kleinsten Seitenlinie $s =$ 1,8 dm, der Differenz $d = 0,3$ dm der Radien $R$ und $r$, die Radien $R$ und $r$ berechnen.

# XI.
# Aufgaben über das Prismatoid, den Obelisken und Antiobelisken, das Antiprisma, das Ponton, den Keil und andere zusammengesetzte Körper.

## a). Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 693.** Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man für das Volumen eines Prismatoids, dessen beide Grundflächen, bezw. die Inhalte $G$ und $g$ haben, dessen Höhe $= H$ ist und dessen mittlere Durchschnittsfläche den Inhalt $D$ hat?

Figur 195.




**Erkl. 586.** Unter einem Prismatoid (siehe Figur 195) versteht man im allgemeinen einen jeden Körper, welcher von zwei beliebigen, ebenen, geradlinigen und parallelen Figuren und von so vielen ebenen Dreiecken begrenzt wird als die Summe der Seitenzahlen jener beliebigen Polygone beträgt, wobei diese begrenzenden Dreiecke die Eigenschaft haben müssen, dass je zwei Ecken eines dieser Dreiecke Eckpunkte des einen jener Polygone sind, die dritte Ecke aber je ein Eckpunkt des andern jener Polygone ist.

**Formel:**

Für eine schiefe Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot H}{3} \text{ (s. Erkl. 532).}$$

**Auflösung.** Stellt die Figur 195 ein beliebiges Prismatoid dar (siehe die Erkl. 586 bis 589) und man wählt innerhalb der Grundfläche $abcd$ einen Punkt $p$, verbindet denselben mit den sämtlichen Ecken des Prismatoids, und denkt sich durch je zwei dieser Verbindungslinien, welche aneinanderstossen, Ebenen gelegt, so werden diese Ebenen und ebenso die Seitenflächen des Prismatoids von der durch die Mitte der Höhe des Prismatoids parallel zu den Grundflächen gelegt gedachten, sogenannten mittleren Durchschnittsfläche nach Linien durchschnitten, die, wie die Fig. 195 zeigt, bezw. den Verbindungslinien $pa$, $pb$, $pc$ und $pd$ des Punktes $p$ mit den Eckpunkten der Grundfläche $abcd$ und den Grundkanten des Prismatoids, parallel sind und man kann sich das Prismatoid als aus folgenden Teilen bestehend denken:

a). aus der schiefen, dreiseitigen Pyramide $pfgh$;

Da der Inhalt der Grundfläche $fgh$ dieser Pyramide gleich dem Inhalt $g$ der einen Grundfläche $fgh$ des Prismatoids und da ferner die Höhe dieser Pyramide gleich der Höhe $H$ des Prismatoids ist, so hat man nach vorstehender Formel für das Volumen $v$ dieser Pyramide:

$$1) \ldots v = \frac{g \cdot H}{3}$$

b). aus den schiefen, dreiseitigen Pyramiden $gabp$, $gbcp$, $hcdp$ und $fdap$, deren Grundflächen in der Grundfläche $abcd$ des Prismatoids liegen;

Bezeichnet man die Inhalte der Grundflächen $pab$, $pbc$, $pcd$ und $pda$ dieser Py-

**Erkl. 587.** Unter den Grundflächen eines Prismatoids versteht man die dasselbe begrenzenden, parallelen, beliebigen Polygone.

Unter den Seitenflächen versteht man die zwischen den Grundflächen liegenden Begrenzungsflächen. Unter der Höhe versteht man den senkrechten Abstand jener parallelen Grundflächen.

Unter den Grundkanten versteht man die Durchschnittslinien der beiden Grundflächen mit den Seitenflächen.

Unter den Seitenkanten versteht man die Durchschnittslinien je zweier Seitenflächen.

**Erkl. 588.** Unter dem Mantel eines Prismatoids versteht man die Summe der Inhalte sämtlicher Seitenflächen (siehe Erklärung 587).

**Erkl. 589.** Unter der mittleren Durchschnittsfläche eines Prismatoids versteht man die Durchschnittsfigur, welche man erhält, wenn man durch die Mitte der Höhe eine Ebene parallel zu den beiden Grundflächen gelegt denkt,

**Erkl. 590.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Die Verbindungslinien der vier Halbierungspunkte der vier Kanten einer dreiseitigen Pyramide (eines sog. Tetraeders), von welchen je zwei dieser Kanten einander gegenüber liegen, bilden die Seiten eines Parallelogramms.“

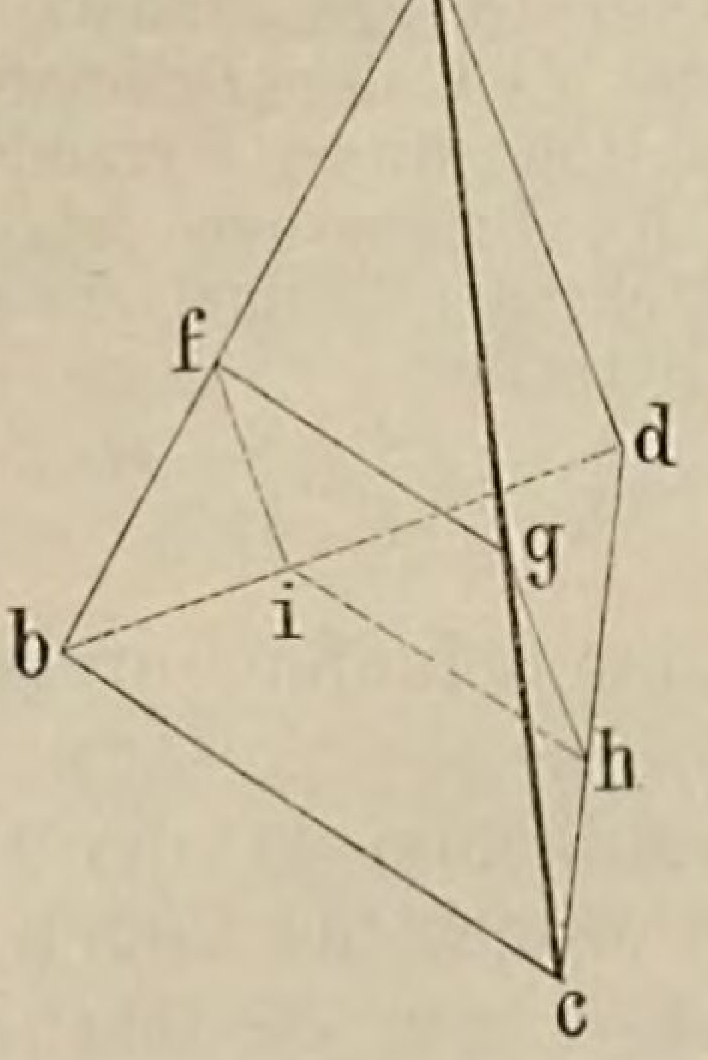
**Beweis:** Sind in der Figur 196 $f, g, h$ u. $i$ die vier Halbierungspunkte der Kanten $ab$, $cd$, $ac$ und $bd$, so ist nach dem in der Erkl. 176 ausgesprochenen, planimetrischen Satz:

$$fg \mathrel{\#} \frac{1}{2}\,bc$$

$$\text{ebenso ist: } ih \mathrel{\#} \frac{1}{2}\,bc$$

$$\overline{\quad fg \mathrel{\#} ih \quad}$$

Figur 196.




ramiden, bezw. mit $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ und $\delta_3$ und berücksichtigt man, dass die Spitzen $g$, $h$ und $f$ dieser Pyramiden in der zu diesen Grundflächen parallelen Ebene $fgh$ liegen, dass also die Höhen derselben sämtlich gleich dem senkrechten Abstand der parallelen Ebenen $abcd$ und $fgh$, bezw. gleich der Höhe $H$ des Prismatoids sind, so hat man nach vorstehender Formel für die Summe $S$ der Volumen jener Pyramiden:

$$S = \frac{\delta \cdot H}{3} + \frac{\delta_1 \cdot H}{3} + \frac{\delta_2 \cdot H}{3} + \frac{\delta_3 \cdot H}{3}$$

oder

$$S = (\delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \cdot \frac{H}{3}$$

Setzt man für die Summe der Inhalte $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ und $\delta_3$ der Grundflächen $pab$, $pbc$, $pcd$ und $pda$ den Inhalt $G$ der Grundfläche $abcd$ des Prismatoids, so erhält man hiernach:

$$2) \;.\;.\;.\; S = \frac{G \cdot H}{3}$$

c). aus den schiefen, dreiseitigen Pyramiden $afgp$, $chgp$ und $dhfp$, von welchen je eine Kante mit einer Seite der oberen Grundfläche $fgh$ des Prismatoids zusammenfällt und von welchen die jener gegenüberliegende Kante eine der in der unteren Grundfläche des Prismatoids liegenden Verbindungslinie mit dem Punkt $p$ ist.

Bezeichnet man die Inhalte der mittleren Durchschnittsfiguren $ikmr$, $mnoq$, $qrst$, nach welchen diese Pyramiden von der mittleren Durchschnittsfläche des Prismatoids durchschnitten werden, und also nach dem in der Erkl. 590 ausgesprochenen Satz Parallelogramme sein müssen, der Reihe nach mit $f$, $f_1$ und $f_2$, so hat man nach dem in der Erkl. 591 ausgesprochenen stereometrischen Lehrsatz und unter Berücksichtigung, dass die kürzesten Entfernungen der Kanten $ap$ und $fg$, der Kanten $gh$ und $pc$ und der Kanten $fh$ und $pd$ gleich dem senkrechten Abstand der Grundflächen $abcd$ und $fgh$, bezw. gleich der Höhe $H$ des Prismatoids sind, für die Summe $S_1$ dieser dreiseitigen Pyramiden:

$$S_1 = \frac{2}{3} f \cdot H + \frac{2}{3} \cdot f_1 \cdot H + \frac{2}{3} \cdot f_2 \cdot H$$

oder

$$S_1 = \frac{2H}{3}(f + f_1 + f_2)$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass die Summe der Inhalte $f$, $f_1$ und $f_2$ der Parallelogramme $ikmr$, $mnoq$ und $qrst$ gleich dem Inhalt $D$ der ganzen mittleren Durchschnittsfläche des Prismatoids, weniger der Summe der Inhalte der Dreiecke $kmu$, $unm$, $irs$, $otq$ und $qrm$ ist, dass ferner nach der Erkl. 593:

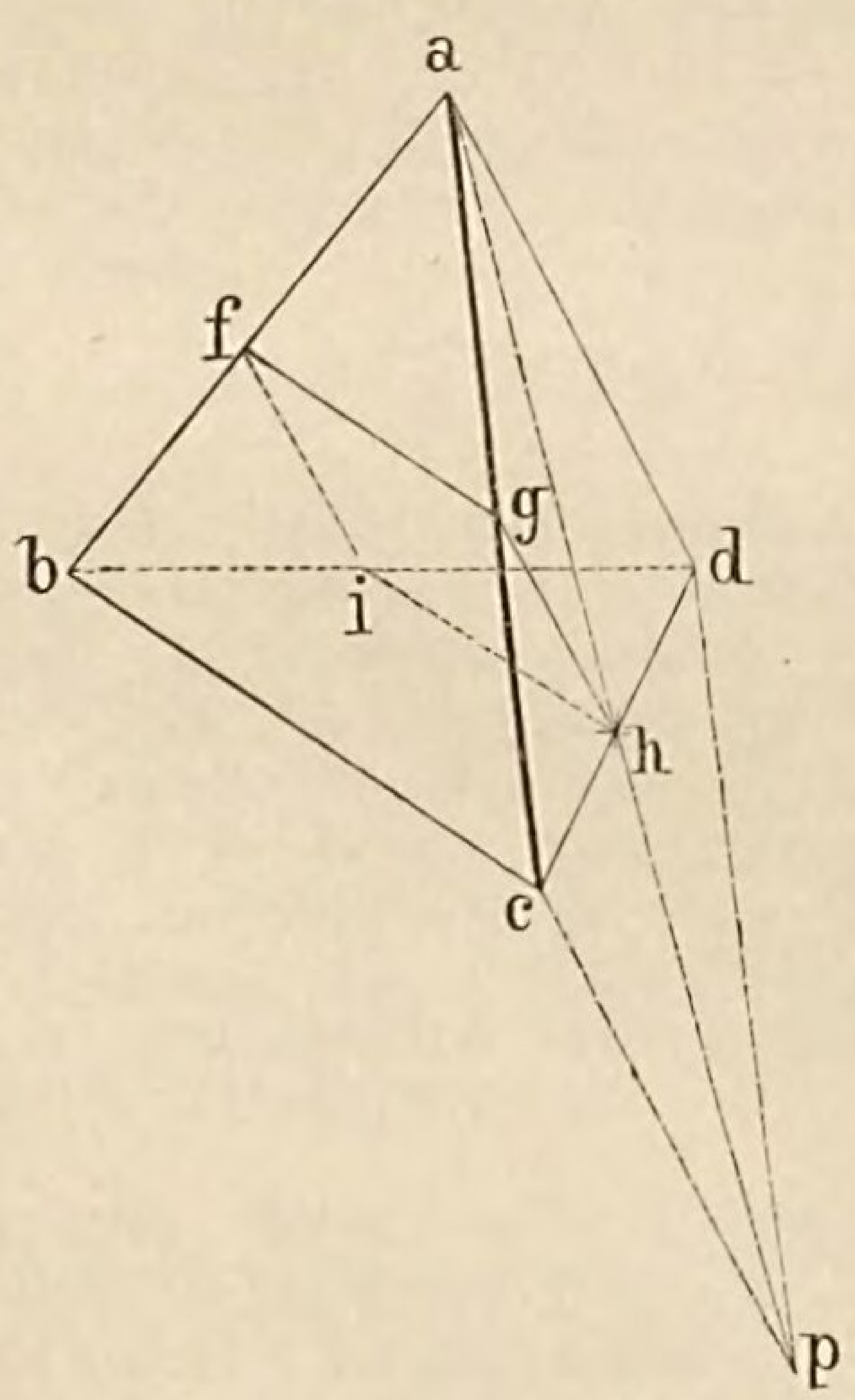
**Erkl. 591.** Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Jede dreiseitige Pyramide (jedes Tetraeder) ist doppelt so gross als eine Pyramide, deren Grundfläche das Parallelogramm ist, welches man als Durchschnittsfigur erhält, wenn man durch die Halbierungspunkte zweier gegenüberliegender Kantenpaare eine Ebene gelegt denkt (s. Erkl. 590), und deren Höhe gleich dem senkrechten Abstand des noch übrigen Kantenpaares ist.“

Ist in der Fig. 197 der Inhalt des Parallelogramms $fghi$, dessen Ecken die Mitten der Kanten $ab$, $ac$, $cd$ und $bd$ sind $= D$ und bezeichnet man mit $H$ den senkrechten Abstand des übrigen Kantenpaares $bc$ und $ad$, so hat man hiernach für das Volumen $V$ des Tetraeders $abcd$:

$$V = \frac{2}{3} D \cdot H$$

Figur 197.




**Beweis.** Denkt man sich, siehe Erkl. 592

$dp \parallel ac$

$cp \parallel ad$ gezogen und $p$ mit $a$ und $b$ verbunden, so erhält man die dreiseitige Pyramide $pabc$, welche mit der dreiseitigen Pyramide $abcd$ die gemeinschaftliche Grundfläche $abc$ und gleiche Höhe hat; letzteres aus dem Grunde, weil die Linie $dp$ parallel zur Grundfläche $abc$ ist, mithin auch die Perpendikel von $d$ und $p$ auf diese Fläche einander gleich sein müssen. Man hat also die Relation:

a) . . . Pyram. $pabc$ = Pyram. $abcd$

Denkt man sich ferner $h$ mit $f$ verbunden, so ist nach der Erkl. 592:

J. d. Dr. $bap = 4 \cdot$ J. d. Dr. $fgh$

oder

b) . . . J. d. Dr. $bap = 2 \cdot D$, wenn $D$ den Inhalt des || grs. $fghi$ bedeutet.

$$\triangle kmu = \frac{1}{4} \triangle apb$$

$$\triangle unm = \frac{1}{4} \triangle bcp$$

$$\triangle otq = \frac{1}{4} \triangle cdp$$

$$\triangle irs = \frac{1}{4} \triangle dap$$

und

$$\triangle qrm = \frac{1}{4} \triangle hfg$$

gesetzt werden kann, so erhält man hiernach:

$$S_1 = \frac{2H}{3}\left(D - \frac{1}{4}(\triangle apb + \triangle bcp + \triangle cdp + \triangle dap) - \frac{1}{4} \triangle hfg\right)$$

oder, da:

$\triangle apb + \triangle bcp + \triangle cdp + \triangle dap = G$, nämlich gleich dem Inhalt der unteren Grundfläche $abcd$ des Prismatoids ist

und da

$\triangle hfg = g$, nämlich gleich dem Inhalt der oberen Grundfläche $hfg$ des Prismatoids ist:

$$S_1 = \frac{2H}{3}\left(D - \frac{1}{4} G - \frac{1}{4} g\right)$$

oder

$$S_1 = \frac{2H}{3}\left(D - \frac{G+g}{4}\right)$$

mithin

$$3) \ldots S_1 = \frac{H}{3}\left(2D - \frac{G+g}{2}\right)$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man schliesslich für das gesuchte Volumen $V$ des Prismatoids:

$$V = \frac{gH}{3} + \frac{GH}{3} + \frac{H}{3}\left(2D - \frac{G+g}{2}\right)$$

oder

$$V = \frac{H}{3}\left(g + G + 2D - \frac{G+g}{2}\right)$$

mithin

$$\text{A)} \ldots V = \frac{H}{3}\left(2D + \frac{G+g}{2}\right)$$

oder

$$\text{B)} \ldots V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

(s. Erkl. 594 bis 599).

Nimmt man nun $bcp$ als Grundfläche der vorhin erwähnten Pyramide $pabc$ und $a$ als die Spitze an, so ist das Perpendikel von $a$ auf $bcp$ oder, was dasselbe ist, die kürzeste, senkrechte Entfernung $H$ der Kanten $ad$ und $bc$ die Höhe dieser Pyramide und man erhält nach vorstehender Formel für das Volumen dieser Pyramide $abcp$, bezw. derselben Pyramide $pabc$:

c) . . . $\text{V. d. Pyr. } pabc = \frac{2 \cdot D \cdot H}{3}$ [s. Gleich. b)]

Aus den Gleichungen a) und c) folgt somit:

$$\text{Vol. d. Pyr. } abcd = \frac{2}{3} D \cdot H$$

was zu beweisen war.

**Erkl. 592.** Da in der Pyramide $abcp$, siehe Figur 197, die Schnittfigur $fgh$ || der Grundfläche $bcp$ parallel ist, so hat man nach dem in der Erkl. 195 ausgesprochenen stereometrischen Lehrsatz die Relation:

$$\frac{\triangle fgh}{\triangle bcp} = \frac{\overline{fa}^2}{\overline{ba}^2}$$

Da $\overline{fa} = \frac{1}{2} \overline{ba}$, also $\overline{fa}^2 = \frac{1}{4} \overline{ba}^2$

ist, so erhält man hieraus:

$$\frac{\triangle fgh}{\triangle bcp} = \frac{\frac{1}{4} \overline{ba}^2}{\overline{ba}^2} = \frac{1}{4}$$

oder

$$\triangle bcp = 4 \cdot \triangle fgh$$

**Erkl. 593.** In der Figur 195 ist z. B. das Dreieck $kmu$ ein Teil der durch die Mitte des Prismatoids und parallel zu den Grundflächen $abcd$ und $fgh$ gelegt gedachten, sogenannten mittleren Durchschnittsfläche, folglich geht dessen Ebene auch durch die Mitte der Höhe der dreiseitigen Pyramide $gabp$ und ist parallel der Grundfläche $abp$ dieser Pyramide. Nach dem in der Erkl. 195 ausgesprochenen Lehrsatz besteht somit die Relation:

$$\triangle abp : \triangle kmu = \overline{ag}^2 : \overline{kg}^2$$

oder, da $\overline{kg} = \frac{1}{2} ag$ gesetzt werden kann:

$$\triangle abp : \triangle kmu = \overline{ag}^2 : \frac{1}{4} \overline{ag}^2$$

und hieraus erhält man:

$$\triangle abp : \triangle kmu = 4 : 1$$

oder

a) . . . $\triangle kmu = \frac{1}{4} \triangle abp$

In analoger Weise kann man darthun, dass:

b) . . . $\triangle unm = \frac{1}{4} \triangle bcp$

c) . . . $\triangle nqm = \frac{1}{4} \triangle cdp$

d) . . . $\triangle vtg = \frac{1}{4} \triangle dap$

und dass ebenso:

$$\text{e)} \ldots \triangle\, qrm = \frac{1}{4} \triangle\, hfg$$

gesetzt werden kann.

**Erkl. 594.** Bezeichnet man die Inhalte der Grundflächen eines Prismatoids, bezw. mit $G$ und $g$, den senkrechten Abstand derselben, also die Höhe mit $H$, den Inhalt der mittleren Durchschnittsfläche mit $D$ und das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$1) \ldots V = \left(2D + \frac{G+g}{2}\right) \cdot \frac{H}{3}$$

d. h. das Volumen eines Prismatoids ist gleich dem Volumen einer Pyramide, deren Grundfläche ihrem Inhalt nach gleich dem doppelten Inhalt der mittleren Durchschnittsfläche vermehrt um das arithmetische Mittel der Inhalte der beiden Grundflächen des Prismatoids ist, und deren Höhe gleich der Höhe des Prismatoids ist.

Aus vorstehender Formel 1) ergibt sich durch Reduktion die weitere und zur Anwendung bequemere Formel:

$$2) \ldots V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

**Erkl. 595.** Sind zwei Grundkanten eines Prismatoids, welche je mit einer und derselben Seitenkante zwei Seiten zweier aneinanderstossender Seitenflächen bilden, parallel, wie z. B. die Grundkanten $bc$ und $hi$ in Fig. 198, so liegen diese beiden aneinanderstossenden, dreieckigen Seitenflächen in einer Ebene und bilden zusammen ein Paralleltrapez oder, wenn jene Grundkanten auch einander gleich sind, ein Parallelogramm.

**Erkl. 596.** Mittels der in der Erklärung 594 aufgestellten Kubikinhaltsformel für ein Prismatoid kann man die Kubikinhaltsformel für einen Pyramidenstumpf wie folgt herleiten.

Betrachtet man die Grundflächen eines Pyramidenstumpfs (s. Fig. 199) als die Grundflächen eines Prismatoids (s. Erkl. 595), dessen Grundflächen ähnliche Polygone sind und bezeichnet man mit $A$ und $a$ zwei homologe Seiten der Grundflächen eines solchen Prismatoids, mit $G$ und $g$ die Inhalte dieser Grundflächen, mit $D$ den Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur des Prismatoids, mit $x$ die jenen Seiten $A$ und $a$ homologe Seite dieser Durchschnittsfigur, so erhält man für jene gedachte Form eines Prismatoids nach der Erkl. 195:

$$\text{a)} \ldots A^2 : x^2 = G : D$$

und

$$\text{b)} \ldots a^2 : x^2 = g : D$$

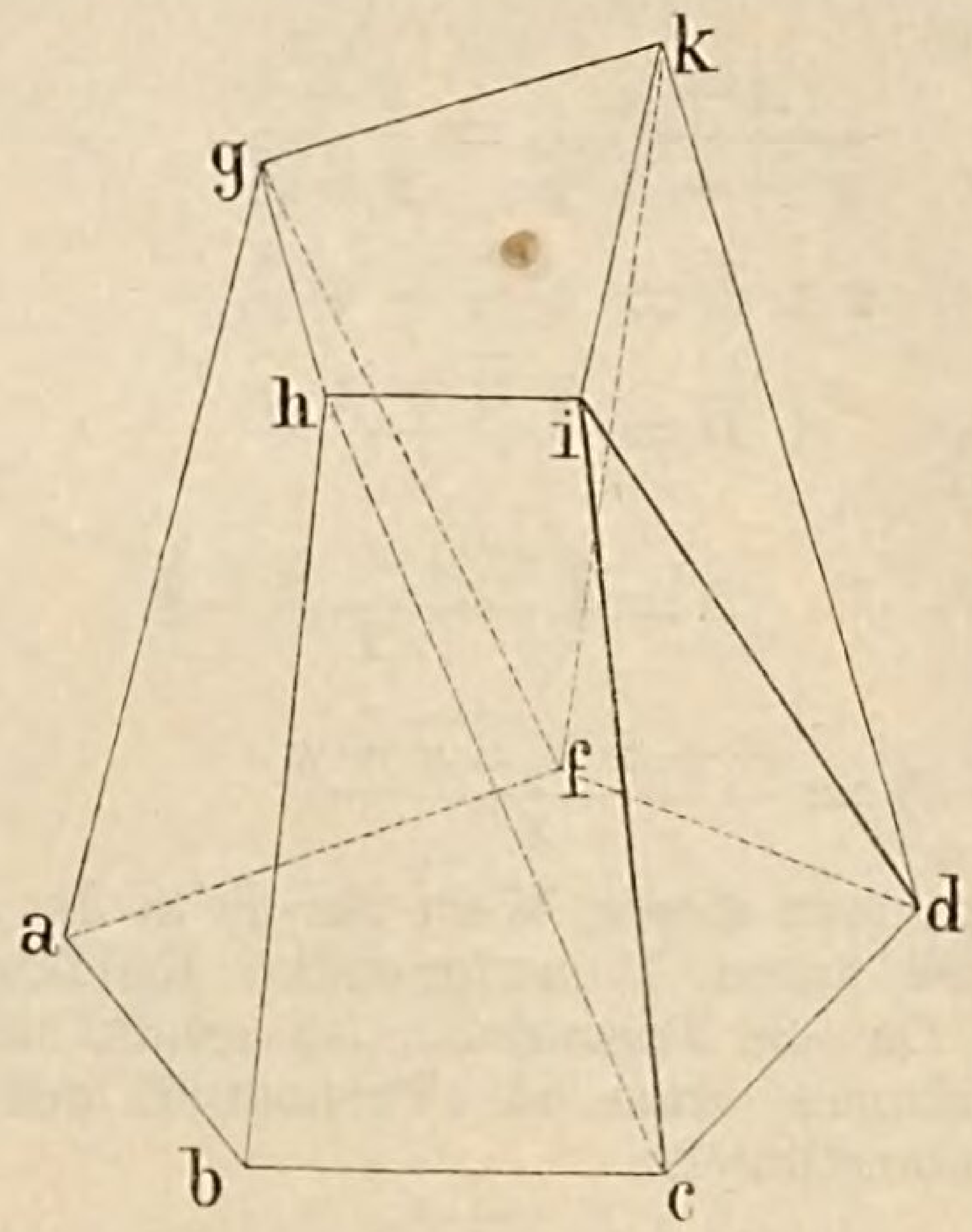
oder die hieraus abgeleiteten Proportionen:

$$\text{c)} \ldots A : x = \sqrt{G} : \sqrt{D}$$

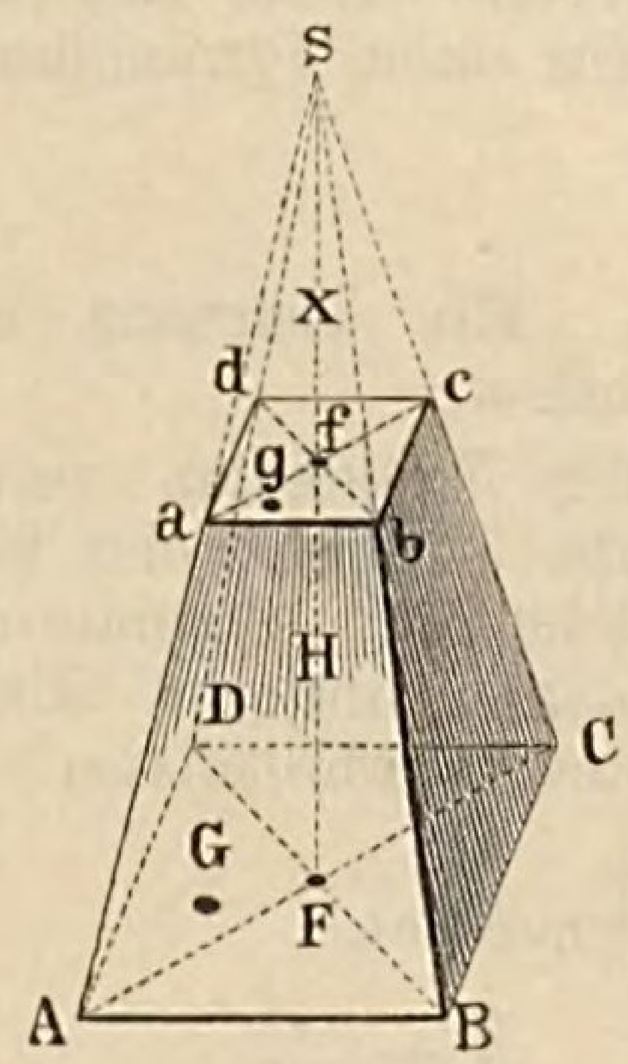
und

$$\text{d)} \ldots a : x = \sqrt{g} : \sqrt{D}$$

Figur 198.




Figur 199. *)




*) Die Buchstaben an dieser Figur stehen in keiner Beziehung zu der in der Erkl. 596 gemachten Entwicklung, sind also an diesem Orte bedeutungslos.

Aus diesen Proportionen erhält man zunächst:

e) . . . $A : \sqrt{G} = x : \sqrt{D}$

und

f) . . . $a : \sqrt{g} = x : \sqrt{D}$

woraus man die Proportion

$$\frac{A}{\sqrt{G}} = \frac{a}{\sqrt{g}} \left( = \frac{x}{\sqrt{D}} \right)$$

bilden kann.

Nach dem in der Erkl. 597 ausgesprochenen Summensatz ergibt sich hieraus:

g) . . . $\frac{A+a}{\sqrt{G}+\sqrt{g}} = \frac{x}{\sqrt{D}} \left( \text{oder} = \frac{A}{\sqrt{G}} \text{ oder} = \frac{a}{\sqrt{g}} \right)$

Da nun $x$ als Mittellinie eines Paralleltrapezes, dessen parallele Seiten $A$ und $a$ sind

$$= \frac{A+a}{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus Gleichung g):

$$\frac{A+a}{\sqrt{G}+\sqrt{g}} = \frac{A+a}{2\sqrt{D}}$$

oder

$$2\sqrt{D} = \sqrt{G} + \sqrt{g}$$

$$\sqrt{D} = \frac{\sqrt{G}+\sqrt{g}}{2}$$

$$D = \left( \frac{\sqrt{G}+\sqrt{g}}{2} \right)^2$$

mithin

h) . . . $D = \frac{G + 2\sqrt{Gg} + g}{4}$

Setzt man diesen Wert für $D$ in die in der Erkl. 594 unter 1) aufgestellte Kubikinhaltsformel für ein Prismatoid, so erhält man für das Volumen eines als Prismatoid gedachten Pyramidenstumpfs:

$$V = \left( 2 \cdot \frac{G + 2\sqrt{Gg} + g}{4} + \frac{G+g}{2} \right) \cdot \frac{H}{3}$$

oder

c) . $V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{G \cdot g} + g)$

nämlich die bereits früher entwickelte Kubikinhaltsformel für einen Pyramidenstumpf (siehe Erkl. 538).

**Erkl. 597.** Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

> „In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der homologen vorderen Glieder zur Summe oder Differenz der homologen hinteren Glieder, wie die Glieder eines Verhältnisses.“

In Zeichen:

besteht die Proportion:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

so ist

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} \text{ oder} = \frac{c}{d}$$

**Erkl. 598.** Mittels der in der Erkl. 594 aufgestellten Formel zur Berechnung des Volumens eines Prismatoids kann man auch die Kubikinhaltsformel für ein schiefes und schief abgeschnittenes, dreiseitiges Prisma wie folgt herleiten?

Betrachtet man das durch die Fig. 200 dargestellte, schiefe und schief abgeschnittene, dreiseitige Prisma $abcdfg$ als ein Prismatoid, dessen untere Grundfläche $G = abgf$, dessen obere Grundfläche $g$ gleich der Kante $cd$, dessen Höhe $= hn$, dessen mittlere Durchschnittsfigur das $\|$ tr. $rqpo$ ist und berücksichtigt man, dass für diesen Fall:

a) . . . $G = \frac{\overline{af} + \overline{bg}}{2} \cdot \overline{im}$

b) . . . $g = \overline{cd} = o$ (da eine Linie keinen Flächeninhalt haben kann)

c) . . . $H = \overline{hn}$

und

d) . . . $D = \frac{\overline{or} + \overline{pq}}{2} \cdot \overline{ts}$

$$= \frac{\frac{\overline{af} + \overline{cd}}{2} + \frac{\overline{bg} + \overline{cd}}{2}}{2} \cdot \frac{\overline{im}}{2}$$

$$= \left(\frac{\overline{af} + \overline{cd}}{2} + \frac{\overline{bg} + \overline{cd}}{2}\right) \cdot \frac{\overline{im}}{4}$$

ist, so erhält man nach der in der Erkl. 594 aufgestellten Formel 1) für das Volumen $V$ des als Prismatoid gedachten, schiefen und schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas, Fig. 200:

$$V = \left[2 \cdot \left(\frac{\overline{af} + \overline{cd}}{2} + \frac{\overline{bg} + \overline{cd}}{2}\right) \cdot \frac{\overline{im}}{4} + \frac{\frac{\overline{af} + \overline{bg}}{2} \cdot \overline{im} + o}{2}\right] \cdot \frac{\overline{hn}}{3}$$

oder, wenn man $\overline{af} = k_1$, $\overline{bg} = k_2$ und $\overline{cd} = k_3$ setzt und reduziert:

$$V = \left(\frac{k_1 + k_3}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_1 + k_2}{2}\right) \cdot \frac{\overline{hn}}{3} \cdot \frac{\overline{im}}{2}$$

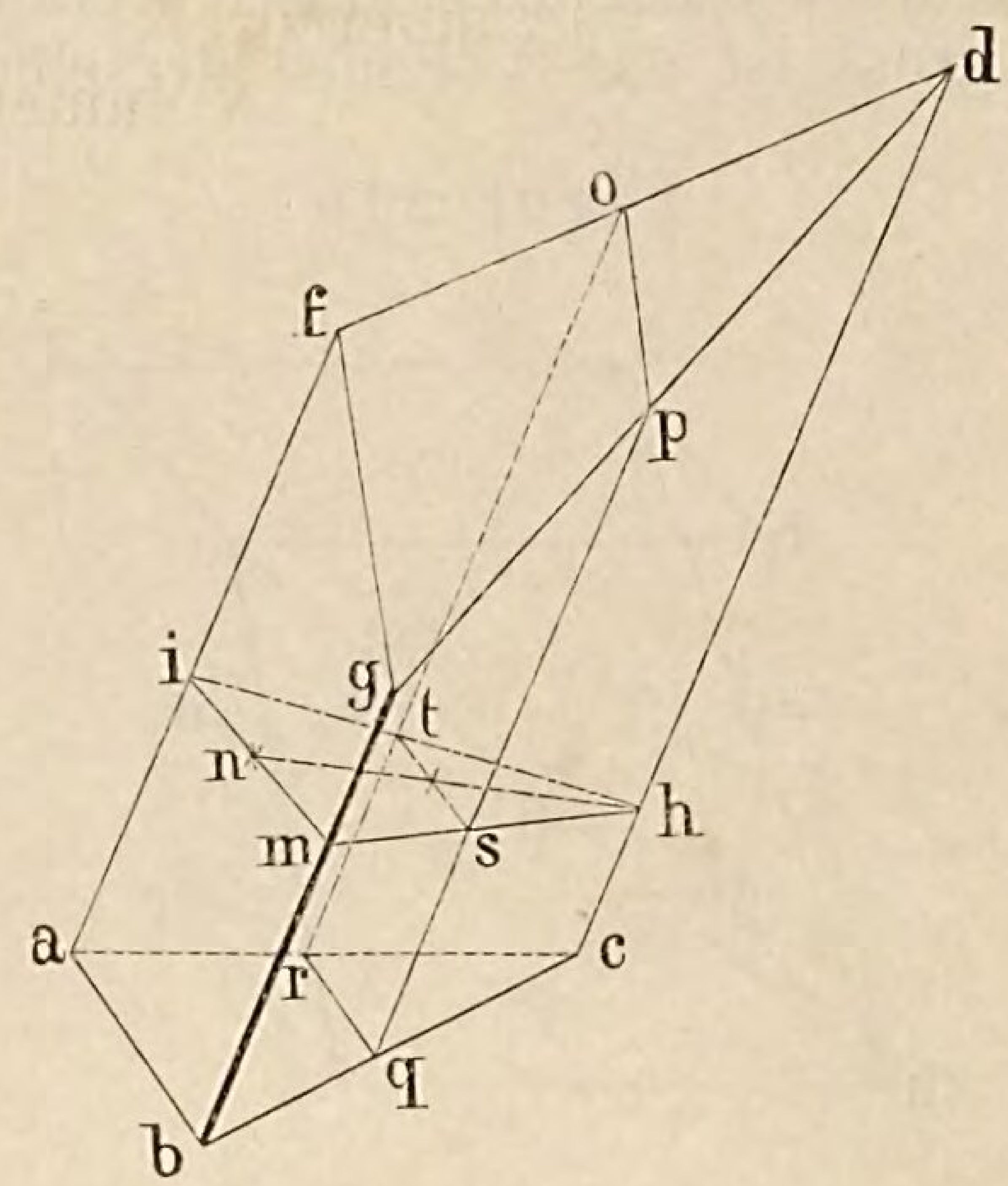
$$V = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{hn} \cdot \overline{im}}{2}$$

Da nun $\frac{\overline{hn} \cdot \overline{im}}{2}$ gleich dem Inhalt $N$ des Normalschnitts $imh$ ist, so erhält man hieraus:

$$V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$$

nämlich die bereits in der Erkl. 546 aufgestellte Formel.

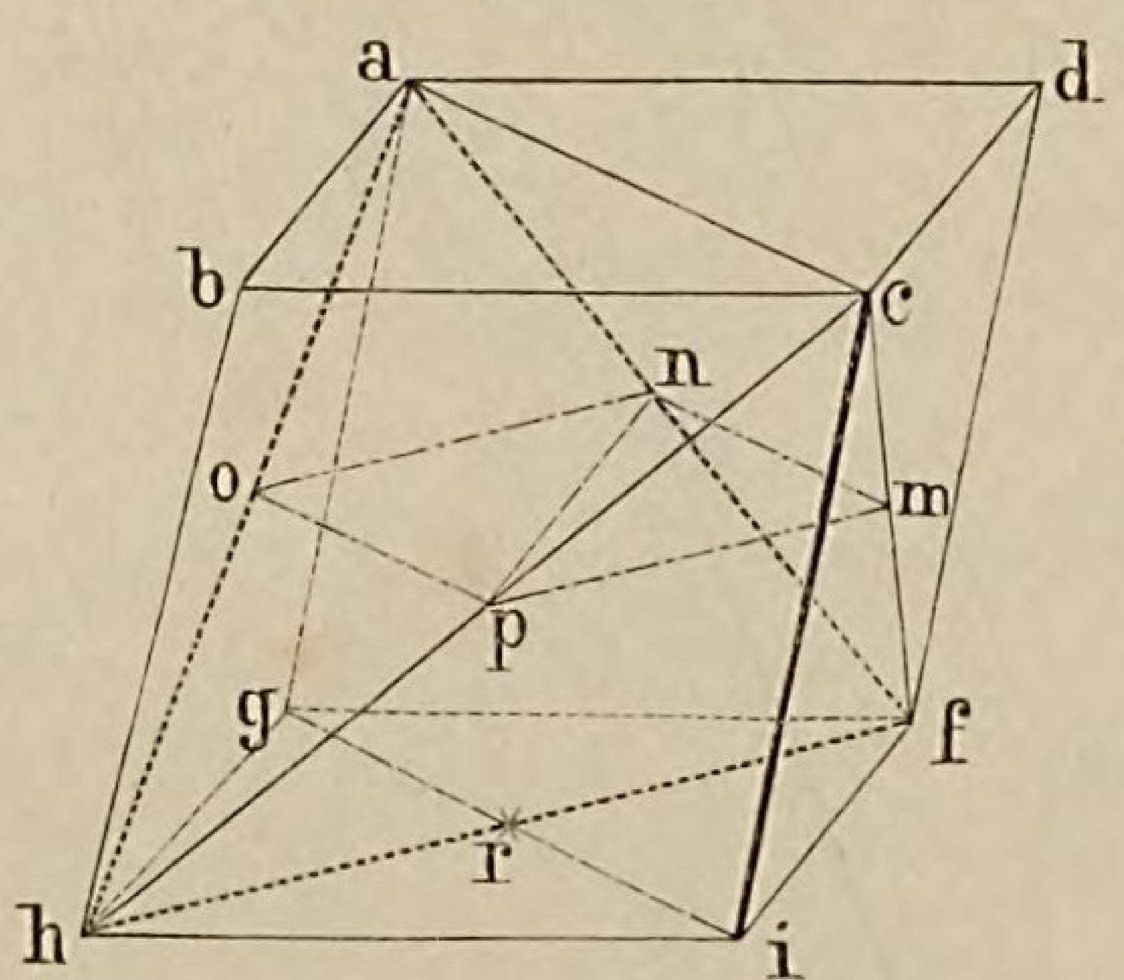
Figur 200.




**Erkl. 599.** Wie sich aus den Erkl. 596 und 598 und den nachfolgenden Aufgaben und Erklärungen ergibt, ist das Prismatoid derjenige Körper, aus welchem man sich fast alle übrigen Körper durch entsprechende Modifikationen abgeleitet denken kann.

**Aufgabe 694.** Zieht man in einem ||ppd., dessen Volumen $= V$ ist, zwei Diagonalen, welche parallelen Begrenzungsflächen angehören und sich kreuzen, und verbindet die vier Eckpunkte dieser beiden Diagonalen, so erhält man das Kantennetz einer dreiseitigen Pyramide; wie gross ist das Volumen derselben?

Figur 201.




**Erkl. 600.** Jede dreiseitige Pyramide kann man als ein Prismatoid betrachten, in welchem die beiden Grundflächen auf Linien reduziert sind (s. Erkl. 599).

**Erkl. 601.** Um den Inhalt $D$ der mittleren Durchschnittsfläche des Prismatoids $achf$ in Figur 201 zu erhalten, denke man sich durch die Mitte des senkrechten Abstandes der sich kreuzenden Linien $ac$ und $hf$ eine Ebene parallel zu diesen Linien gelegt. Diese Ebene durchschneidet die Seitenkanten $ah$, $af$, $ch$ und $cf$ des Prismatoids in den Mitten derselben. Da nun nach dem in den Erkl. 176 und 242 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz:

$$pm \;\#\; \frac{1}{2} hf$$

$$on \;\#\; \frac{1}{2} hf$$

$$op \;\#\; \frac{1}{2} ac$$

$$mn \;\#\; \frac{1}{2} ac$$

ist, so ist die Durchschnittsfigur $mnop$ ein || gr.

Denkt man sich nun die Diagonalen $np$ und $ig$ gezogen, so ist nach Vorstehendem:

$$on \;\#\; \frac{hf}{2} \text{ oder } \#\; hr$$

$$op \;\#\; \frac{ac}{2} \text{ oder } \#\; \frac{gi}{2} \text{ oder } \#\; gr$$

und hieraus ergibt sich, dass $\triangle\, nop \cong \triangle\, hrg$ ist.

**Formel:**

Für ein Prismatoid:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \quad \text{(s. Erkl. 594).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 201, $abcdfghi$ das gegeb. || ppd. und man verbindet die Endpunkte der sich kreuzenden Diagonalen $ac$ und $hf$, so erhält man das Kantennetz der dreiseitigen Pyramide $cahf$.

Wie in der Erkl. 600 erwähnt, kann man diese dreiseitige Pyramide als ein Prismatoid betrachten, dessen Grundflächen durch die Kanten $hf$ und $ac$ der Pyramide dargestellt sind.

Für das gesuchte Volumen $x$ dieser Pyramide hat man somit nach vorstehender Formel, wenn man berücksichtigt, dass für diesen Fall

$G = hf = o$ } $g = ac = o$ } da hier die Grundflächen des gedachten Prismatoids gerade Linien sind und solchen kein Flächeninhalt zukommt

$H = h$, wenn $h$ die Höhe des || ppds., bezw. den senkrechten Abstand der parallelen Flächen $abcd$ und $hifg$, bezw. den senkrechten Abstand der als Grundflächen des Prismatoids gedachten, sich kreuzenden Linien $ac$ und $hf$ bedeutet

und nach der Erkl. 601:

$$D = mnop = \frac{1}{2} hifg$$

oder

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{h}$$

gesetzt werden kann:

$$x = \frac{h}{6}\left(o + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{h} + o\right)$$

oder

$$x = \frac{h}{6} \cdot 2 \cdot \frac{V}{h}$$

mithin

A) $\quad x = \frac{1}{3} V$

In derselben Weise kann man darthun, dass

$$\triangle\, nmp \cong \triangle\, irf$$

ist, dass also der Inhalt $D$ der mittleren Durchschnittsfigur $mnop$ gleich der Summe der Dreiecke $hrg$ und $irf$ ist. Da nun nach dem in der Erkl. 602 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatz

$$\triangle\, hrg + \triangle\, irf = \frac{1}{2} hifg$$

ist und nach der Erkl. 603 der Inhalt der Grundfläche $hifg$ des || ppds. $abcdfghi$, in das Volumen $V$ und die Höhe $h$ desselben ausgedrückt $= \frac{V}{h}$ ist, so ergibt sich hieraus für den Inhalt $D$ der mittleren Durchschnittsfigur des Prismatoids $achf$:

$$1) \ldots D = \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{h}$$

**Erkl. 602.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man in einem || gr. die beiden Diagonalen, so sind die Summen der Inhalte je zweier gegenüberliegender Scheiteldreiecke, in welche hierdurch das || gr. zerlegt wurde, einander gleich, bezw. gleich dem halben Inhalt des Parallelogramms."

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der planimetrischen Figuren handelt.

**Erkl. 603.** Bezeichnet man mit $V$ das Volumen eines Prismas oder eines || ppds., mit $h$ die Höhe desselben, mit $G$ den Inhalt der Grundfläche, so besteht nach der Erkl. 541 die Relation:

$$V = G \cdot h$$

und hieraus erhält man für den Inhalt $G$ der Grundfläche

$$G = \frac{V}{h}$$

---

**Aufgabe 695.** In einen Würfel, dessen Kante $= k$ ist, sind zwei quadratische Prismen so hingestellt, dass die Eckpunkte eines jeden die Seiten zweier parallelen Würfelflächen halbieren. Wie gross ist das Volumen des beiden Prismen gemeinsamen Körpers?

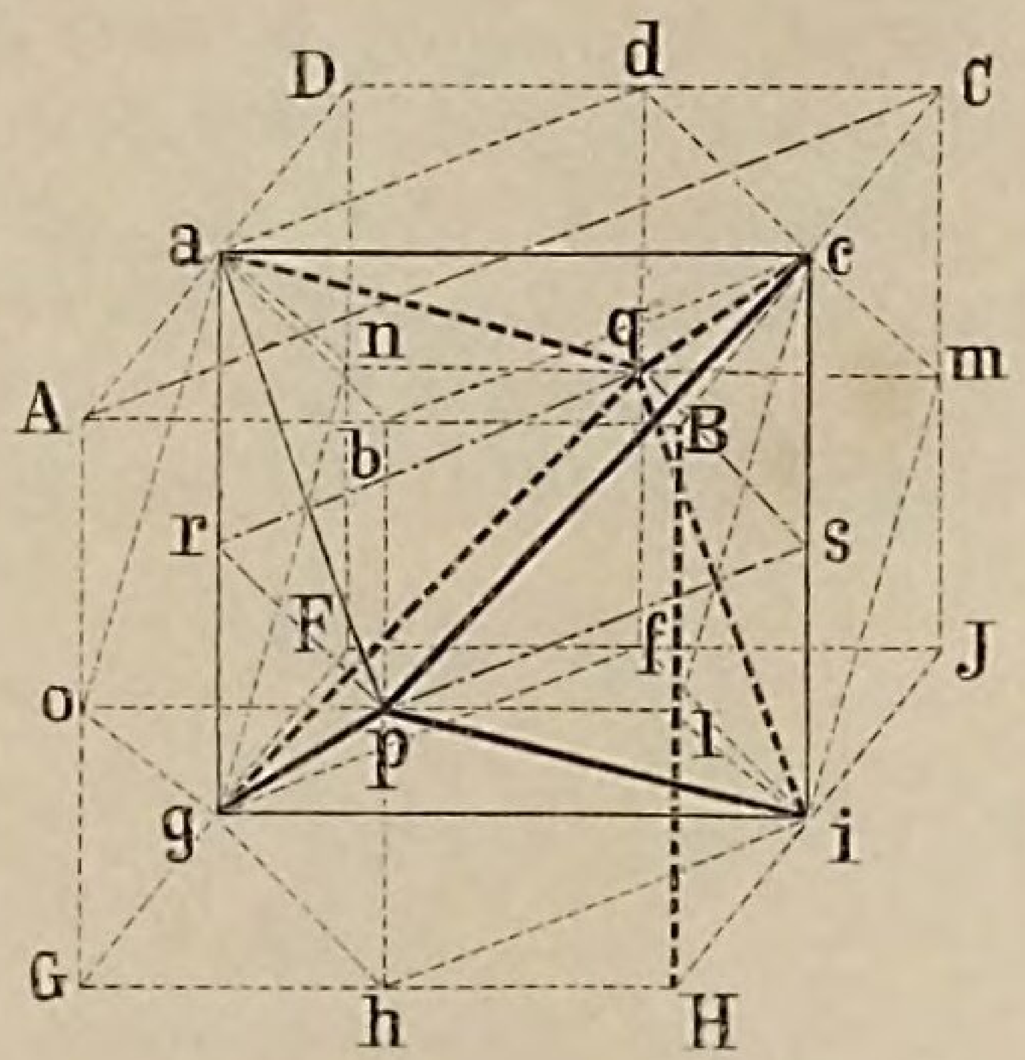
**Formel:**

Für ein Prismatoid:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \text{ (s. Erkl. 594).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 202, $ABCDFGHJ$ der gegebene Würfel und sind $abcdfghi$ und $limcaogn$ die gemäss der Aufgabe in diesen Würfel konstruierten Prismen, so stellt $pagicq$ den beiden Prismen gemeinsamen Körper dar. Diesen Körper kann man als eine quadratische Doppelpyramide betrachten, dessen Grundfläche das Quadrat $agic$ ist und dessen Spitzen die Ecken $p$ und $q$ sind; man kann diesen Körper aber

Figur 202.




**Erkl. 604.** Zur Berechnung des Inhalts $D$ der mittleren Durchschnittsfigur $rpsq$ des als Prismatoid betrachteten Körpers $acqpgi$, siehe Figur 202, beachte man, dass dieselbe, wie an dieser Figur leicht nachgewiesen werden kann, ein Quadrat mit der Seite $\overline{ps} = \overline{bc} = \frac{\overline{AC}}{2}$ ist.

Da nun die Diagonale $AC$ des Quadrats $ABCD$, in die Seite $k$ desselben ausgedrückt $= k\sqrt{2}$ ist, so erhält man hiernach für den Inhalt $D$ der mittleren Durchschnittsfigur $rpsq$:

$$D = \left(\frac{k\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

oder

$$D = \frac{2k^2}{4}$$

mithin

a) . . . $D = \frac{k^2}{2}$

auch als ein Prismatoid betrachten, dessen Grundflächen auf die Linien $gi$ und $ac$ reduziert sind. Betrachtet man den Körper $acpqgi$, wie soeben erwähnt, als ein Prismatoid, so dient zur Berechnung von dessem Volumen vorstehende Formel:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

Setzt man in derselben

$$H = \overline{ci} = \overline{ag} = \overline{AG} = k$$

$$\left.\begin{aligned} G &= \overline{gi} = o \\ g &= \overline{ac} = o \end{aligned}\right\} \text{indem Linien keinen Flächeninhalt haben}$$

und nach der Erkl. 604:

$$D = \frac{k^2}{2}$$

so erhält man für das gesuchte Volumen $x$:

$$x = \frac{k}{6}\left(o + 4 \cdot \frac{k^2}{2} + o\right)$$

oder

$$x = \frac{k}{6} \cdot 2k^2$$

mithin

A) . . . $x = \frac{k^3}{3}$

---

**Aufgabe 696.** Zwei kongruente, gleichseitige Dreiecke, deren Ebenen parallel sind, haben zu einander eine solche symmetrische Lage, dass die Ecken derselben in ihrer Horizontalprojektion ein reguläres Sechseck bilden. Jeder Eckpunkt des einen Dreiecks ist mit den Endpunkten derjenigen Dreiecksseite des andern Dreiecks, welche jener Ecke zunächst liegt, verbunden und hierdurch das Kantennetz eines achtfläch. Körpers, eines sogenannten dreiseitigen Antiprismas gebildet. Man berechne aus der Seite $m$ jener Dreiecke und dem senkrechten Abstand $H$ derselben das Volumen dieses Antiprismas.

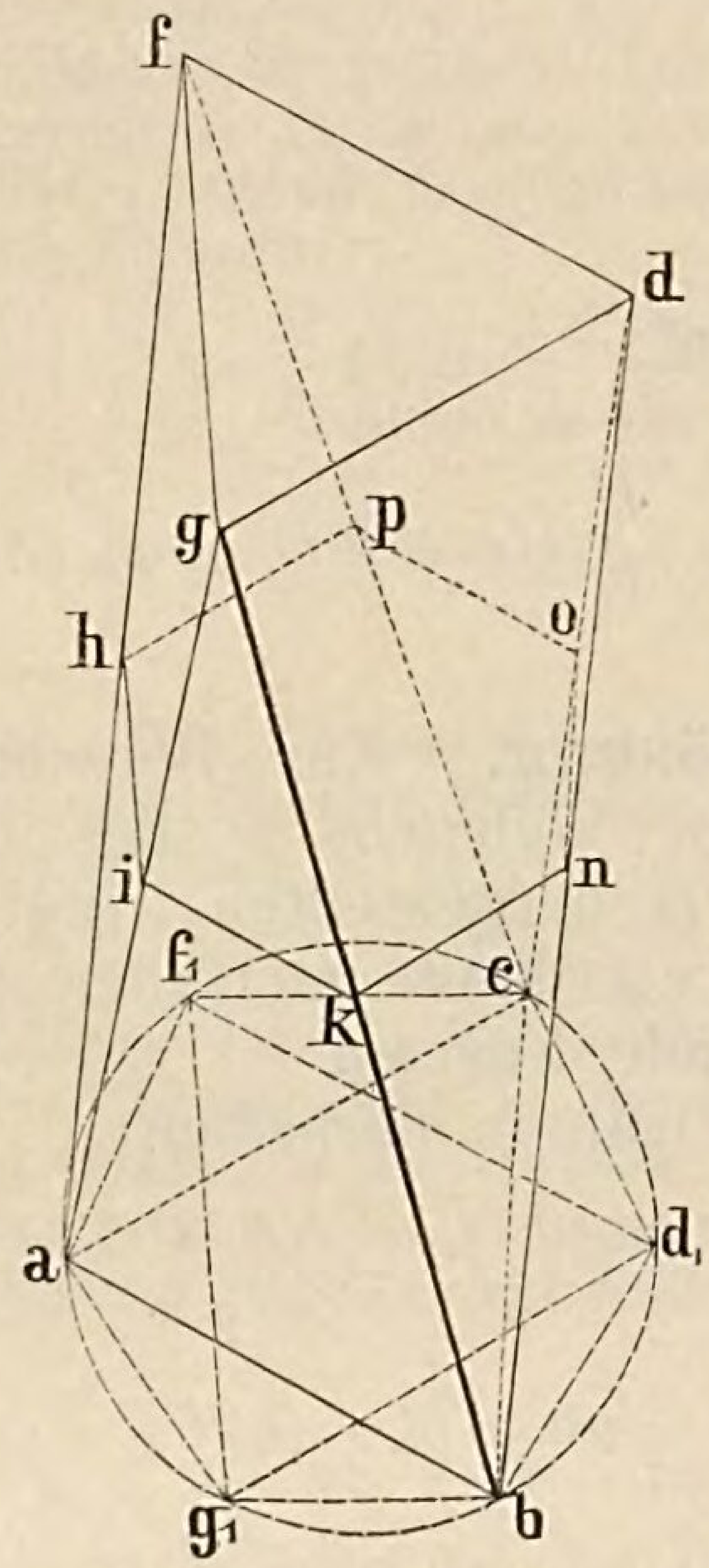
**Formel:**

Für ein Prismatoid:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \quad \text{(s. Erkl. 594).}$$

**Auflösung.** Sind, siehe Figur 203, $abc$ und $dfg$ zwei kongruente, gleichseitige Dreiecke, deren Ebenen parallel sind und welche eine solche Lage zu einander haben, dass sie in ihrer Horizontalprojektion das reguläre Sechseck $ag_1bd_1cf_1$ bilden und man verbindet die Ecke $g$ mit den Ecken $a$ und $b$, die

Figur 203.




**Erkl. 605.** Unter ein Antiprisma im allgemeinen versteht man ein Prismatoid (siehe Erkl. 586), in welchem die Grundflächen kongruente Polygone sind.

**Erkl. 606.** Zur Bestimmung des Inhalts $D$ der mittleren Durchschnittsfigur des durch die Figur 203 dargestellten Prismatoids denke man sich parallel zu den Grundflächen $abc$ und $fgd$ und durch die Mitte des senkrechten Abstandes beider Flächen eine Ebene gelegt. Die Ebene schneidet das Prismatoid, wie leicht einzusehen ist, in dem regulären Sechseck $hiknop$, dessen Seite gleich der Hälfte einer Seite der regulären Grundfläche $abc$ oder $fgd$ des Prismatoids, also $= \frac{m}{2}$ ist (s. Erkl. 176).

Nach der in der Erkl. 263 aufgestellten Formel für ein reguläres Sechseck hat man hiernach für den Inhalt $D$ des regulären Sechsecks $hiknop$:

$$D = 6 \cdot \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^2}{4} \sqrt{3}$$

oder

$$D = 6 \cdot \frac{m^2}{16} \sqrt{3}$$

mithin

$$D = \frac{3}{8} m^2 \sqrt{3}$$

**Erkl. 607.** Bezeichnet man die Höhe eines dreiseitigen Antiprismas, dessen Grundflächen gleichseitige Dreiecke und dessen Seitenflächen kongruente, gleichschenklige Dreiecke sind, siehe

Ecke $d$ mit den Ecken $b$ und $c$ und die Ecke $f$ mit den Ecken $a$ und $c$, so erhält man das Kantennetz des durch die Figur 203 dargestellten, achtflächigen Körpers, welcher den Namen Antiprisma führt (siehe Erkl. 605). Da nun dieser Körper nach der in der Erkl. 586 gegebenen Definition nichts anderes als ein Prismatoid ist, so dient zur Berechnung des Volumens desselben vorstehende Formel:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

Setzt man in derselben:

$H = H$, nämlich gleich dem gegebenen Abstand der parallelen Dreiecke $abc$ und $dfg$.

$G = \frac{m^2}{4}\sqrt{3}$, $g = \frac{m^2}{4}\sqrt{3}$ — da die Dreiecke $abc$ u. $fgd$ gleichseitige Dreiecke mit der Seite $m$ sind (s. Erkl. 268 oder 184)

und nach der Erkl. 606:

$$D = \frac{3}{8} m^2 \sqrt{3}$$

so erhält man hiernach für das gesuchte Volumen $x$:

$$x = \frac{H}{6}\left(\frac{m^2}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{3}{8} m^2 \sqrt{3} + \frac{m^2}{4}\sqrt{3}\right)$$

oder

$$x = \frac{H}{6} \cdot m^2 \sqrt{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$x = \frac{H}{6} m^2 \sqrt{3} \cdot 2$$

mithin

$$\text{A)} \ldots x = \frac{1}{3} H m^2 \sqrt{3}$$

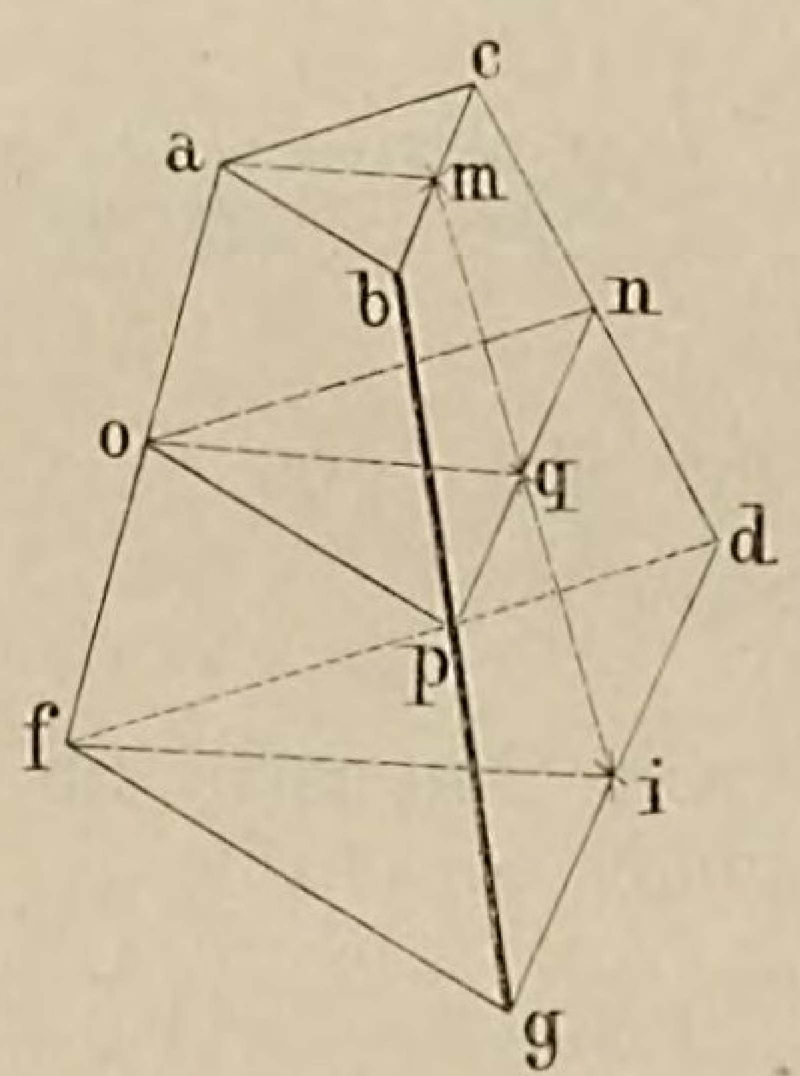
Figur 203, mit $H$, eine Grundkante mit $m$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichung A) die Formel:

$$V = \frac{1}{3} H \cdot m^2 \cdot \sqrt{3}$$

---

**Aufgabe 697.** Wie gross ist das Volumen eines dreiseitigen Obelisken, dessen Höhe $H$ ist, wenn eine Seite der unteren Grundfläche $= A$, die zugehörige Dreieckshöhe $= B$ und eine Seite der oberen Grundfläche $= B$ und die zugehörige Dreieckshöhe $= b$ ist?

Figur 204.




**Erkl. 608.** Unter einem Obelisk, siehe Figur 204, versteht man ein Prismatoid (siehe Erkl. 586), dessen parallele Grundflächen Polygone von gleicher Seitenzahl und dessen Grundkanten paarweise parallel sind. Siehe die Erkl. 587, 599 und 609.

**Erkl. 609.** Jedes Prisma kann man als einen Obelisk betrachten, dessen Grundflächen kongruente Polygone sind.

**Erkl. 610.** Jeden Pyramidenstumpf kann man als einen Obelisk betrachten, dessen Grundflächen ähnliche Polygone sind (siehe die Erkl. 596).

**Erkl. 611.** Je nachdem die Grundflächen eines dreiseitigen Obelisken kongruent sind oder nicht, ist derselbe ein Prisma oder ein Pyramidenstumpf; denn ähnlich sind bei einem dreiseitigen Obelisken die Grundflächen stets, da Dreiecke ähnlich sind, wenn ihre Seiten paarweise parallel sind.

**Erkl. 612.** Jede vollständige Pyramide kann man als ein Prismatoid, bezw. als einen Obelisk betrachten, in welchem jede Kante der einen Grundfläche, und somit diese Fläche selbst, auf einen Punkt reduziert ist.

**Formel:**

Für ein Obelisk:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \quad \text{(s. Erkl. 613).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des durch die Figur 204 dargestellten, dreiseitigen Obelisken dient nach der Erkl. 613 vorstehende Formel.

Setzt man in derselben:

$$G = \frac{\overline{gd} \cdot \overline{fi}}{2} = \frac{A \cdot B}{2}$$

$$g = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{am}}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$H = H$$

und nach der Erkl. 614:

$$D = \frac{\overline{pn} \cdot \overline{oq}}{2} = \frac{(A + a)(B + b)}{8}$$

so erhält man:

$$x = \frac{H}{6}\left(\frac{A \cdot B}{2} + 4 \cdot \frac{(A + a)(B + b)}{8} + \frac{a \cdot b}{2}\right)$$

oder

$$\text{A)} \quad x = \frac{H}{12}[AB + (A + a)(B + b) + ab]$$

(s. Erkl. 615).

**Erkl. 613.** Bezeichnet man den Inhalt der grösseren Grundfläche eines Obelisken mit $G$, den Inhalt der kleineren mit $g$, dessen Höhe mit $H$ und den Inhalt von dessen mittlerer Durchschnittsfläche mit $D$, so hat man nach den Erklärungen 594 u. 608 für das Volumen $V$ eines Obelisken die Formeln:

$$1) \ldots V = \frac{H}{3}\left(2D + \frac{G+g}{2}\right)$$

oder

$$2) \ldots V = \frac{H}{6}\left(G + 4D + g\right)$$

**Erkl. 614.** Zur Bestimmung des Inhalts $D$ der mittleren Durchschnittsfläche des durch die Fig. 204 dargestellten, dreiseitigen Obelisken denke man sich durch die Mitte der Höhe des Obelisken, bezw. durch die Mitte des senkrechten Abstands der parallelen Flächen $fgd$ und $abc$ eine Ebene gelegt, so durchschneidet dieselbe den Obelisk in dem Dreieck $nop$.

Betrachtet man $np$ als Grundlinie und ist $oq$ die zugehörige Höhe, so hat man:

$$D = \triangle nop = \frac{\overline{np} \cdot \overline{oq}}{2}$$

Da nun $np$ als Mittellinie des Paralleltrapezes $gdcb = \frac{\overline{gd} + \overline{bc}}{2} = \frac{A+a}{2}$ und da ferner $\overline{aq}$ als Mittellinie des Paralleltrapezes $fima = \frac{\overline{fi} + \overline{am}}{2} = \frac{B+b}{2}$ ist, so hat man hiernach:

$$D = \frac{\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2}}{2}$$

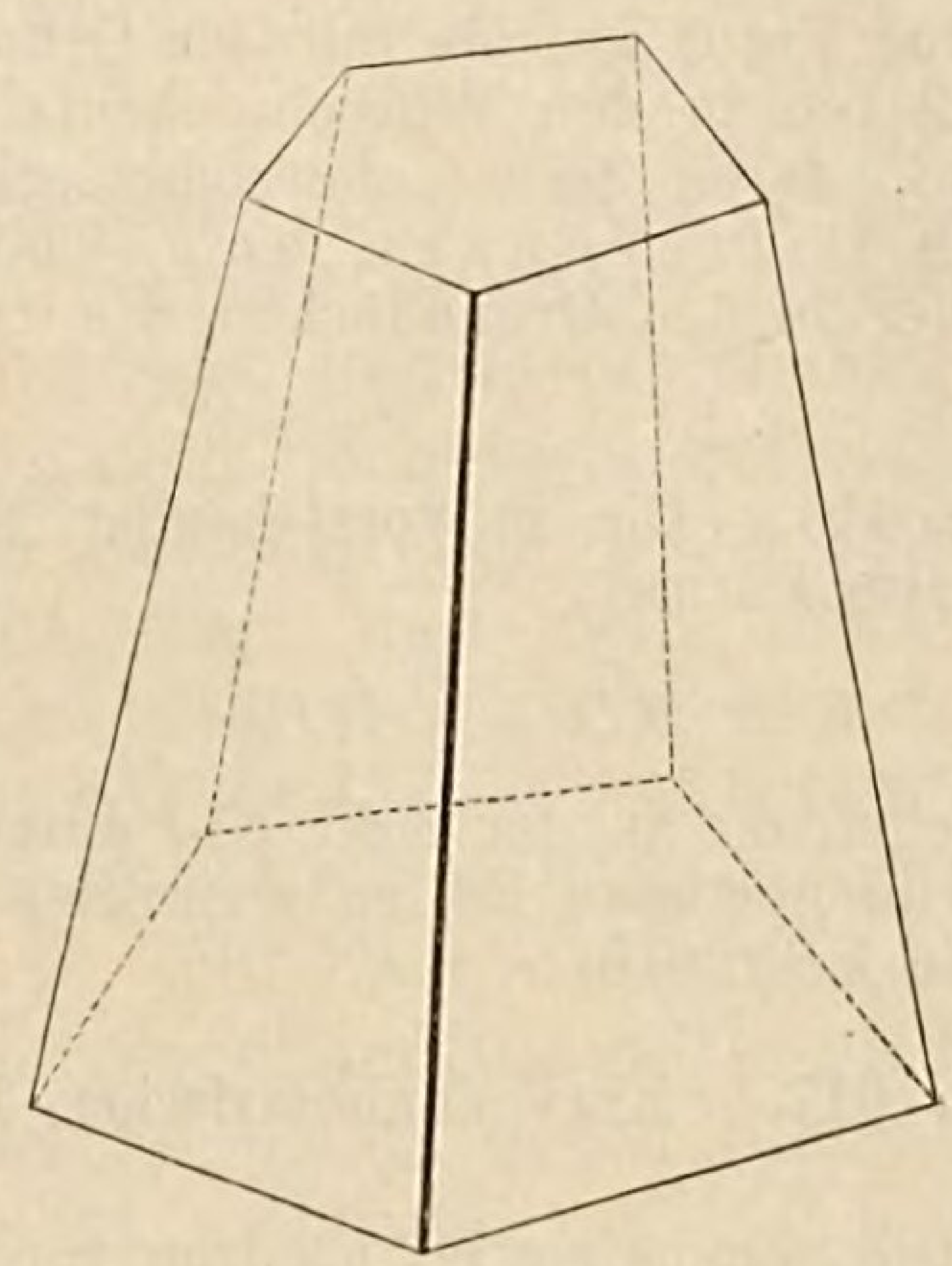
oder

$$D = \frac{(A+a)\,(B+b)}{8}$$

**Erkl. 615.** In jedem Obelisk sind die Seiten der mittleren Durchschnittsfigur Mittellinien der paralleltrapezförmigen Seitenflächen des Obelisken, als solche, bezw. gleich der halben Summe je zweier der entsprechenden Grundkanten des Obelisken.

Bezeichnet man den Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur eines Obelisken, bezw. nach vorstehendem den Inhalt derjenigen Figur, welche mit den Grundflächen des Obelisken gleiche Winkel hat und deren Seiten bezügl. gleich der **halben Summe** je zweier homologer Grundkanten des Obelisken sind, mit $D$, den Inhalt derjenigen Figur, welche ebenfalls mit der Grundfläche des Obelisken gleiche Winkel hat und deren Seiten aber, bezw. gleich der **halben Differenz** je zweier homologer Grundkanten des Obelisken sind, mit $E$ und berücksichtigt man, dass nach dem in der Erkl. 617 ausgesprochenen, planimetrischen Lehrsatz in der Prismatoidenformel:

Figur 205.



$$1) \ldots V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

welche für jeden Obelisken gültig ist, für:

$$G + g = 2\cdot(D + E)$$

gesetzt werden kann, so erhält man zur Berechnung des Volumens eines Obelisken die weitere Formel

$$V = \frac{H}{6}[2(D + E) + 4D]$$

oder

$$2) \ldots V = HD + \frac{1}{3}HE$$

d. h. das Volumen eines Obelisken ist gleich dem Volumen eines Prismas, das mit dem Obelisken gleiche Höhe hat und dessen Grundfläche gleich der mittleren Durchschnittsfigur, bezw. gleich einer Figur ist, die mit der Grundfläche des Obelisken in den Winkeln übereinstimmt und deren Seiten, bezw. gleich den halben Summen der gleichliegenden Seiten der beiden Grundflächen des Obelisken sind, vermehrt um das Volumen einer Pyramide, deren Höhe gleich der Höhe des Obelisken ist und deren Grundfläche eine Figur ist, die mit den Grundflächen des Obelisken in den Winkeln ebenfalls übereinstimmt, deren Seiten aber bezw. gleich den halben Differenzen der gleichliegenden Seiten der beiden Grundflächen des Obelisken sind.

**Erkl. 616.** Die in vorstehender Erkl. 615 aufgestellte Formel

$$V = HD + \frac{1}{3}HE$$

bietet gegen die in der Erkl. 613 aufgestellten Formeln in gewissen Fällen mehrerlei Vorteile (siehe die Erkl. 618).

**Erkl. 617.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

> „Die Summe zweier Figuren von gleicher Seitenzahl und bezüglich gleichen Winkeln ist doppelt so gross als die Summe zweier andern Figuren, welche mit jenen in der Seitenzahl und den Winkeln übereinstimmen, und bei denen die Seiten der einen gleich den halben Summen, die der andern gleich den halben Differenzen der gleichliegenden Seiten der beiden ersten Figuren sind.“

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die Berechnung der planimetrischen Figuren handelt.

**Erkl. 618.** Bezeichnet man das Volumen eines dreiseitigen Obelisken mit $V$, eine Seite der unteren (grösseren) Grundfläche mit $A$, die zugehörige Höhe mit $B$, eine homologe Seite der oberen (kleineren) Grundfläche mit $a$, die zugehörige Höhe mit $b$ und die Höhe des Obelisken mit $H$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

1) . . . $V = \frac{H}{12}[AB + (A+a)(B+b) + ab]$

Benutzt man hingegen die in der Erkl. 615 aufgestellte Formel:

$$V = HD + \frac{1}{3}HE$$

und setzt in derselben, wie in nebenstehender Auflösung

für $D = \frac{(A+a)(B+b)}{8}$

und analog für $E = \frac{(A-a)(B-b)}{8}$ (s. Erkl. 615)

so erhält man ferner:

$$V = H \cdot \frac{(A+a)(B+b)}{8} + \frac{1}{3}H\frac{(A-a)(B-b)}{8}$$

oder die etwas bequemere Formel:

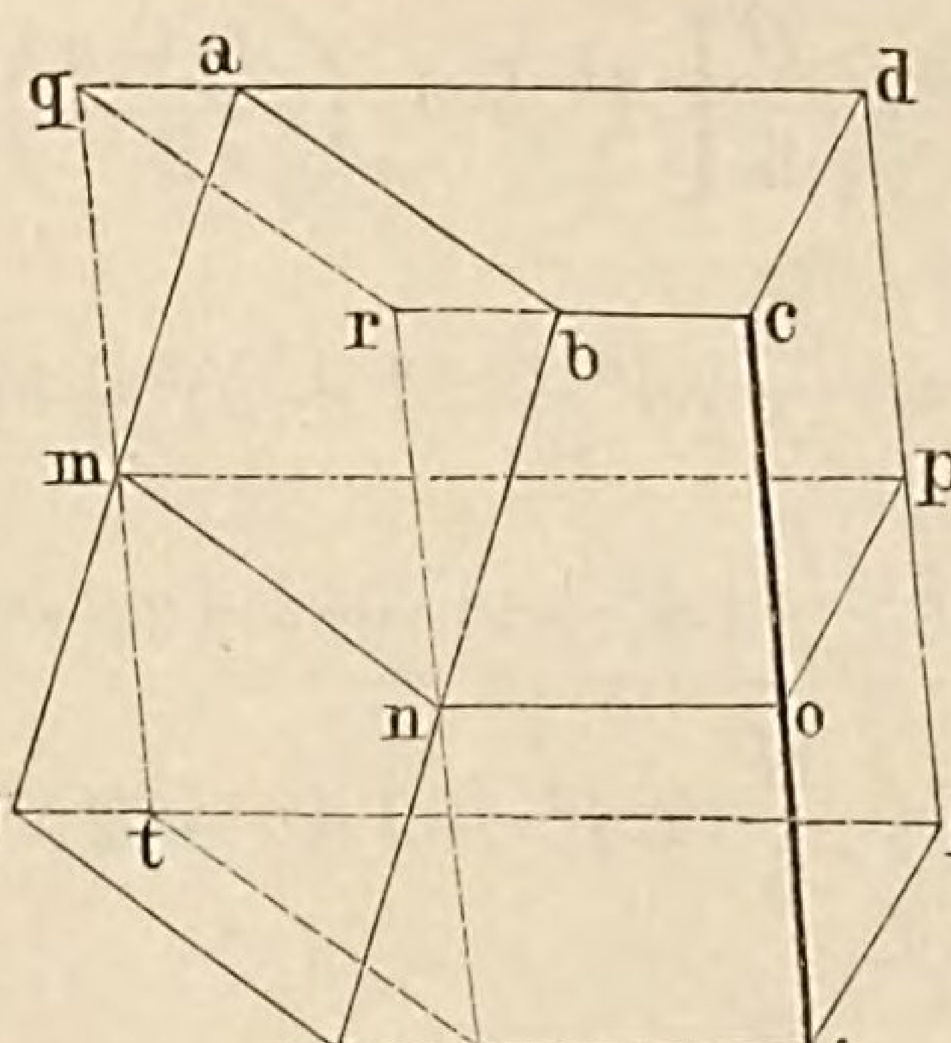
2) . . . $V = \frac{H}{2}\left[\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}\right]$

(siehe die Erkl. 616).

---

**Aufgabe 698.** Wie gross ist das Volumen eines vierseitigen Obelisken, in welchem ausser den Grundflächen noch zwei Seitenflächen parallel sind, wenn der Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur $= D$ und die Höhe des Obelisken $= H$ ist?

Figur 206.




**Erkl. 619.** Bezeichnet man den Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur eines vierseitigen Obelisken, in welchem zwei Seitenflächen parallel sind mit $D$, die Höhe des Körpers mit $H$, das Volumen mit $V$, so besteht nach nebenstehender Auflösung die Formel:

1) . . . $V = D \cdot H$

d. h. das Volumen eines vierseitigen Obelisken, in welchem ausser den beiden Grundflächen noch zwei Seitenflächen parallel sind, ist gleich dem Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche die

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 206, $abcdfgh$ ein vierseitiger Obelisk, in welchem ausser den Grundflächen $abcd$ und $fghi$ auch noch zwei Seitenflächen, z. B. die Seitenflächen $adfg$ und $bcih$ parallel sind und man denkt sich durch die Mitte der Höhe, bezw. durch die Mitte des senkrechten Abstandes der beiden parallelen Grundflächen eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe den Obelisk in der sogenannten mittleren Durchschnittsfläche $mnop$, deren Inhalt mit $D$ gegeben ist. Denkt man sich ferner durch $m$ und $n$ die Linien $qt$ und $rs$ parallel zu $ci$ gezogen, die Grundkanten $ad$ und $bc$ bis zum Durchschnitt mit diesen Linien erweitert, $q$ mit $r$ und $t$ mit $s$ verbunden, so entstehen die Kantennetze der beiden dreiseitigen Prismen $aqmnbr$ und $gtmnhs$, welche kongruent und mithin auch inhaltsgleich sind, und es ergibt sich hieraus, dass das Volumen $V$ des Obelisken $abcd\,fghi$ gleich dem Volumen des Prismas $qrcdftsi$ ist, dessen Grundfläche $tsif$ gleich der mittleren Durchschnittsfigur $mnop$ und dessen Höhe gleich der Höhe des Obelisken ist, man hat somit für das Volumen $V$ des Obelisken:

A) . . . $V = D \cdot H$ (s. die Erkl. 619 u. 620).

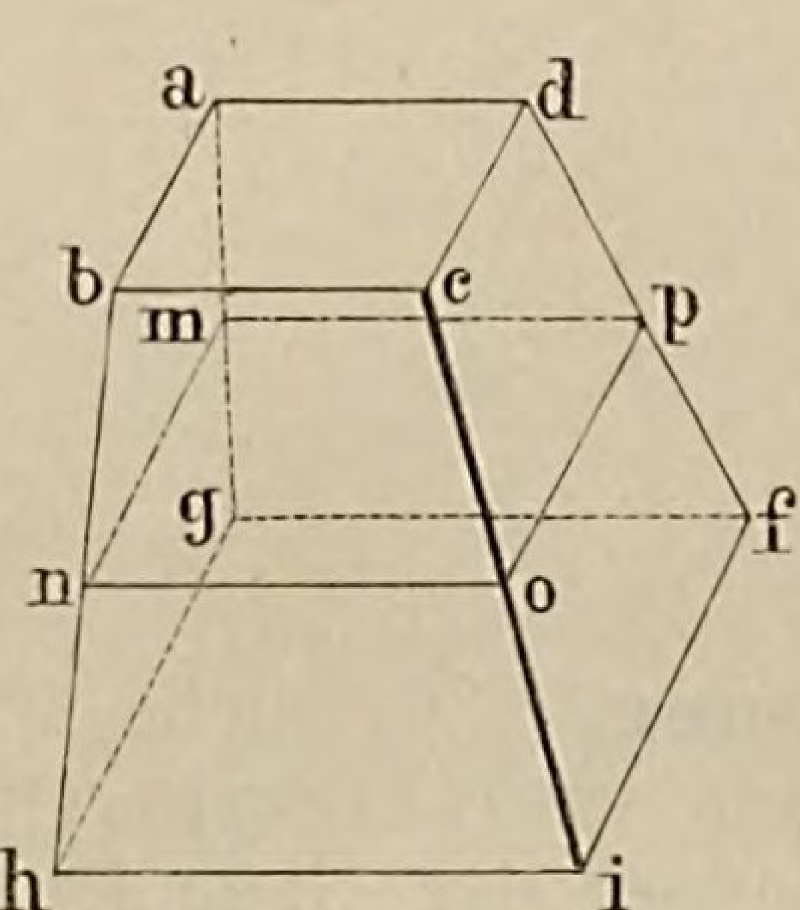
mittlere Durchschnittsfigur des Obelisken und dessen Höhe gleich der Höhe des Obelisken ist.

**Erkl. 620.** Die in der Erkl. 619 aufgestellte Formel gilt auch für den Fall, dass die obere Grundfläche ein Dreieck ist. Dies ist leicht einzusehen, wenn man z. B. in der Fig. 206 $bc = 0$ werden lässt.

---

**Aufgabe 699.** Wie gross ist das Volumen eines Obelisken, dessen Grundflächen Quadrate, bezw. mit den Seiten $A$ und $a$ sind und dessen Höhe $= H$ ist?

Figur 207.




**Erkl. 621.** Die mittlere Durchschnittsfigur $mnop$, siehe Fig. 207, welche man erhält, wenn man durch die Mitte der Höhe des Obelisken eine Ebene parallel den Grundfläche desselben gelegt denkt, ist ein Quadrat, dessen Seiten Mittellinien von Paralleltrapezen sind, deren parallele Seiten bezw. $= A$ und $a$ sind. Für den Inhalt dieser Durchschnittsfigur hat man somit $\left(\frac{A+a}{2}\right)^2$

**Erkl. 622.** Dasselbe Resultat in nebenstehender Auflösung hätte man erhalten, wenn man das Volumen des durch die Figur 207 dargestellten Obelisken, welcher gleichzeitig einen quadratischen Pyramidenstumpf vorstellt, mittels der Pyramidenstumpfformel:

$$V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

berechnet hätte.

**Erkl. 623.** Benutzt man zur Berechnung des Volumens $V$ des durch die Figur 207 dargestellten Obelisken mit quadratischen Grundflächen die in der Erkl. 615 aufgestellte Obeliskenformel:

$$V = HD + \frac{1}{3}HE$$

und setzt, wie in nebenstehender Auflösung:

$$D = \left(\frac{A+c}{2}\right)^2$$

**Formel:**

Für ein Obelisk:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \text{ (s. Erkl. 613).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des durch die Figur 207 dargestellten, vierseitigen Obelisken mit quadratischen Grundflächen dient nach der Erkl. 613 vorstehende Formel:

Setzt man in derselben:

$G =$ dem J. d. Quadrats $hifg = A^2$

$g =$ dem J. d. Quadrats $abcd = a^2$

$H = H$

und nach der Erkl. 621:

$D =$ dem J. d. Quad. $mnop = \left(\frac{A+a}{2}\right)^2$

so erhält man:

$$x = \frac{H}{6}\left[A^2 + 4\cdot\left(\frac{A+a}{2}\right)^2 + a^2\right]$$

oder

$$x = \frac{H}{6}[A^2 + (A+a)^2 + a^2]$$

$$x = \frac{H}{6}(A^2 + A^2 + 2Aa + a^2 + a^2)$$

$$x = \frac{H}{6}(2A^2 + 2Aa + 2a^2)$$

mithin

$$\text{A)} \;.\;. \; x = \frac{H}{3}(A^2 + Aa + a^2)$$

und dementsprechend $E = \left(\frac{A-a}{2}\right)^2$ (s. Erkl. 615)
so erhält man:

$$V = H \cdot \left(\frac{A+a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} H \left(\frac{A-a}{2}\right)^2$$

oder

$$1) \ldots V = H\left[\left(\frac{A+a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{A-a}{2}\right)^2\right]$$

[vergl. hiermit die Formel 2) in der Erkl. 618].

**Erkl. 624.** Bezeichnet man mit $A$ die untere Grundkante, mit $a$ die obere Grundkante, mit $H$ die Höhe, mit $V$ das Volumen eines Obelisken mit quadratischen Grundflächen, so hat man nach nebenstehender Auflösung und nach der Erkl. 623 die Formeln:

$$1) \ldots V = \frac{H}{3}(A^2 + Aa + a^2)$$

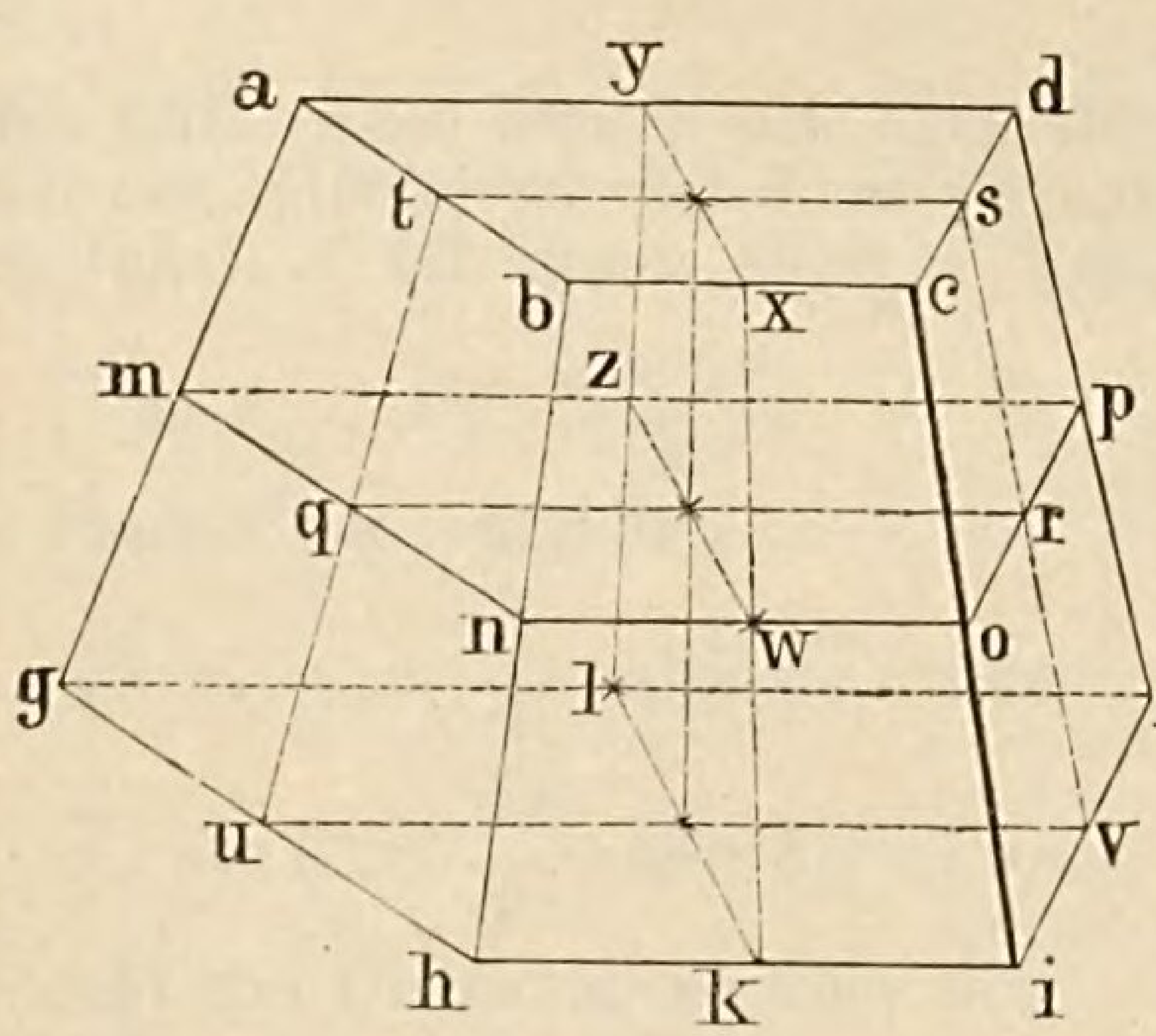
und

$$2) \ldots V = H\left[\left(\frac{A+a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{A-a}{2}\right)^2\right]$$

---

**Aufgabe 700.** Wie gross ist das Volumen eines Obelisken, dessen Grundflächen Paralleltrapeze bezw. mit den Mittellinien $M$ und $m$ und den zugehörigen Höhen $C$ und $c$ sind und dessen Höhe $H$ ist?

Figur 208.




**Erkl. 625.** Ist die Mittellinie eines Paralleltrapezes $= M$ oder $= m$, die Höhe desselben $= C$ bezw. $= c$, so hat man für den Inhalt $J$ desselben:

$$J = M \cdot C$$

bezw. $$J = m \cdot c$$

**Erkl. 626.** Die mittlere Durchschnittsfigur $mnop$, siehe Figur 208, welche man erhält, wenn man durch die Mitte der Höhe des Obelisken eine Ebene parallel den parallelen Grundflächen desselben gelegt denkt, ist ein || tr.,

**Formel:**

Für einen Obelisk:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \text{ (s. Erkl. 613).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des durch die Figur 208 dargestellten, vierseitigen Obelisken mit paralleltrapezförmigen Grundflächen dient nach der Erkl. 613 vorstehende Formel.

Setzt man in derselben:

$G$ = dem J. d. || trs. $ghif = M \cdot C$ 
$g$ = dem J. d. || trs. $abcd = m \cdot c$ (s. Erkl. 625)
$H = H$
und
$D$ = dem J. d. || trs. $mnop = \frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2}$
(s. Erkl. 626)

so erhält man:

$$x = \frac{H}{6}\left(M \cdot C + 4 \cdot \frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2} + m \cdot c\right)$$

oder

$$x = \frac{H}{6}(MC + MC + mC + Mc + mc + mc)$$

mithin

$$A) \ . \ x = \frac{H}{6}(2MC + mC + Mc + 2mc)$$

(s. Erkl. 627 und 628)

dessen Mittellinie $qr$ die Mittellinie des Paralleltrapezes $uvst$ ist, dessen parallele Seiten $uv$ und $ts$ gemäss der Aufgabe $= M$ und $m$ sind, und dessen Höhe $zw$ die Mittellinie eines Paralleltrapezes ist, dessen parallele Seiten $xy$ und $kl$, gemäss der Aufgabe $= C$ und $c$ sind.

Für den Inhalt $D$ der mittleren Durchschnittsfigur $mnop$ hat man somit:

$$D = \overline{qr} \cdot \overline{zw}$$

oder

$$1) \ldots D = \frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2}$$

**Erkl. 627.** Benutzt man zur Berechnung des Volumens $V$ des durch die Figur 208 dargestellten Obelisken mit paralleltrapezförmigen Grundflächen die in der Erkl. 615 aufgestellte Obeliskenformel:

$$V = HD + \frac{1}{3} HE$$

und setzt, wie in nebenstehender Auflösung:

$$D = \frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2}$$

und dementsprechend:

$$E = \frac{M-m}{2} \cdot \frac{C-c}{2} \quad \text{(s. Erkl. 615)}$$

so erhält man:

$$V = H \cdot \frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2} + \frac{1}{3} H \cdot \frac{M-m}{2} \cdot \frac{C-c}{2}$$

oder

$$1) \; V = H\left(\frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{M-m}{2} \cdot \frac{C-c}{2}\right)$$

[vergl. hiermit die Formel 2) in der Erkl. 618].

**Erkl. 628.** Bezeichnet man mit $M$ und $m$ die Mittellinien, mit $C$ und $c$ die Höhen der paralleltrapezförmigen Grundflächen eines Obelisken, dessen Höhe $= H$ ist, und mit $V$ das Volumen, so bestehen nach vorstehender Auflösung und nach der Erkl. 627 die Formeln:

$$1) \; V = \frac{H}{6}(2MC + mC + Mc + 2mc)$$

und

$$2) \; V = H\left(\frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{M-m}{2} \cdot \frac{C-c}{2}\right)$$

---

**Aufgabe 701.** Ein Prismatoid, bezw. ein sog. Antiobelisk (s. Erkl. 629) mit der Höhe $H$ hat zur einen Grundfläche eine Raute und zur andern Grundfläche ein Rechteck, dessen Seiten parallel den Diagonalen jener Raute, halb so lang als diese und bezw. $= m$ und $n$ sind. Welches ist das Volumen dieses Prismatoids, wenn sämtliche Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke, bezw. wenn sämtliche Seitenkanten gleich lang sind?

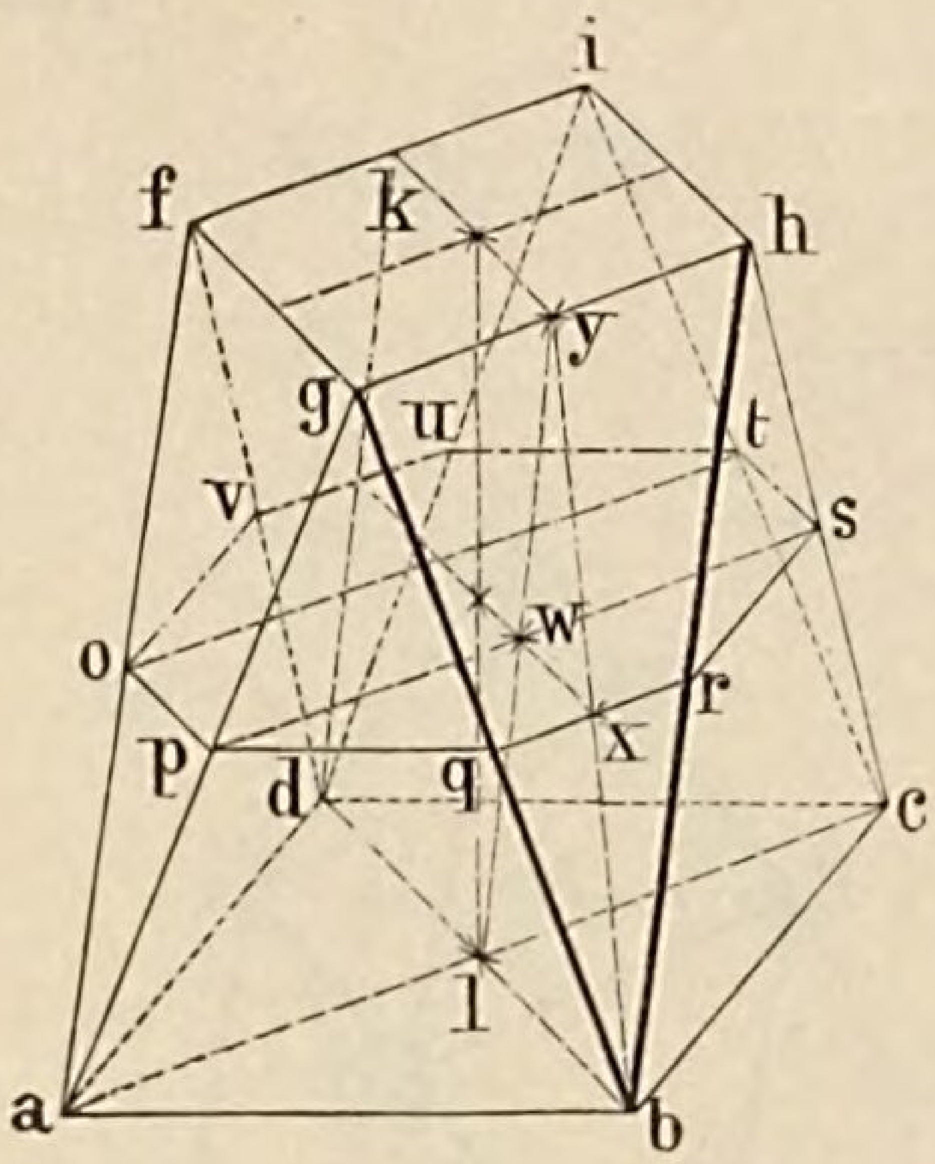
**Formel:**

Für ein Prismatoid:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \quad \text{(s. Erkl. 594).}$$

**Auflösung.** Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ des durch die Figur 209 dargestellten Antiobelisken

Figur 209.




**Erkl. 629.** Unter einem Antiobelisken, siehe Figur 209, versteht man ein Prismatoid (siehe Erkl. 586), dessen parallele Grundflächen Polygone von gleicher Seitenzahl sind, dessen Grundkanten aber nicht wie bei dem Obelisk (s. Erkl. 608) parallel sind, sondern irgend eine andere bestimmte Lage zu einander haben.

**Erkl. 630.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Eine Raute ist die Hälfte eines Rechtecks, dessen Seiten gleich den Diagonalen jener Raute sind.

Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie, welches über die planimetrischen Lehrsätze handelt.

**Erkl. 631.** Nach dem in der Erkl. 630 ausgesprochenen, planimetrischen Lehrsatz hat man für den Inhalt $J$ der Raute $abcd$, s. Fig. 209:

$$\text{a)} \ldots J = \frac{\overline{ac} \cdot \overline{bd}}{2}$$

Da gemäss der Aufgabe:

$$\overline{gh} = m = \frac{\overline{ac}}{2}, \text{ also } \overline{ac} = 2m$$

und $$\overline{fg} = n = \frac{\overline{bd}}{2}, \text{ also } \overline{bd} = 2n$$

ist, so geht die Gleichung a) über in:

$$\text{b)} \ldots J = \frac{2m \cdot 2n}{2}$$

**Erkl. 632.** Zur Bestimmung des Inhalts $D$ der mittleren Durchschnittsfigur des durch die Fig. 209 dargestellten Prismatoids denke man sich durch die Mitte der Höhe $kl$ eine Ebene gelegt und es sei $opqrstuv$ die hierdurch entstandene mittlere Durchschnittsfigur. Verbindet man $p$ mit $s$ und $o$ mit $t$, so wird diese Figur in die beiden kongruenten Paralleltrapeze $pqrs$ und $ovut$ und in das Rechteck $opst$ zerlegt. Da nun $\overline{op}$ als Mittellinie des Dreiecks $fag = \frac{\overline{fg}}{2} = \frac{n}{2}$ und da $\overline{ps}$ als Mittellinie des Parallel-

(s. Erkl. 629), welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, dient vorstehende Formel:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

Setzt man in derselben:

$H = \overline{kl} = H$, nämlich gleich der gegebenen Höhe

$$G = \frac{\overline{ac} \cdot \overline{bd}}{2} = \frac{2 \cdot \overline{gh} \cdot 2 \cdot \overline{fg}}{2} = \frac{2m \cdot 2n}{2} = 2m \cdot n$$

(s. Erkl. 630 und 631)

$$g = \overline{gh} \cdot \overline{fg} = m \cdot n$$

und nach der Erkl. 632:

$$D = \frac{9}{4} m \cdot n$$

so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des durch die Figur dargestellten Antiobelisken:

$$x = \frac{H}{6}\left(2m \cdot n + 4 \cdot \frac{7}{4} m \cdot n + m \cdot n\right)$$

oder

$$x = \frac{H}{6}(2m \cdot n + 7m \cdot n + m \cdot n)$$

$$x = \frac{H}{6} \cdot 10 \cdot m \cdot n$$

oder

$$\text{A)} \quad x = \frac{5}{3} m \cdot n \cdot H$$

(Siehe die Erkl. 633 und 634)

trapezes $achg = \frac{\overline{ac}+\overline{gh}}{2} = \frac{2\overline{gh}+\overline{gh}}{2} = \frac{3}{2}\overline{gh} = \frac{3}{2}m$, so erhält man für den Inhalt $i$ des Rechtecks $opst$:

a) . . . $i = \overline{op}\cdot\overline{ps} = \frac{n}{2}\cdot\frac{3}{2}m = \frac{3}{4}m\cdot n$

Da ferner:

$\overline{qr}$ als Mittellinie des Dreiecks $bgh = \frac{\overline{gh}}{2} = \frac{m}{2}$

$\overline{ps}$ wie vorhin erwähnt $= \frac{3}{2}m$

und die Höhe $\overline{wx}$ des Paralleltrapezes $pqrs$ als Mittellinie des Dreiecks $ylb = \frac{\overline{lb}}{2} = \frac{\overline{bd}}{4} = = \frac{2\overline{fg}}{4} = \frac{n}{2}$ ist, so erhält man für den Inhalt $i_1$ des Paralleltrapezes $pqrs$:

b) . . . $i_1 = \frac{\frac{3}{2}m + \frac{m}{2}}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{m\cdot n}{2}$

Für den Inhalt $D$ der mittleren Durchschnittsfigur $opqrstuv$ erhält man also mittels der Gleichungen a) und b):

$$D = \frac{3}{4}m\cdot n + 2\cdot\frac{m\cdot n}{2}$$

oder

$$D = \frac{7}{4}m\cdot n$$

**Erkl. 633.** Den durch die Figur 209 dargestellten Antiobelisken kann man auch mittels zweier durch die parallelen Kanten $ac$, $gh$ und $fi$ gelegt gedachten Ebenen in die drei Keile $acfghi$, $ghabc$ und $fiacd$, deren Schneiden bezw. $ac$, $gh$ und $fi$ sind, zerlegen und hiernach das Volumen desselben berechnen (siehe Erkl. 645).

**Erkl. 634.** Bezeichnet man das Volumen eines Antiobelisken, dessen untere Grundfläche eine Raute mit den Diagonalen $2m$ und $2n$ ist, dessen obere Grundfläche ein Rechteck ist, dessen Seiten parallel jenen Diagonalen und bezw. $= m$ und $n$ sind, und dessen Seitenflächen ferner gleichschenklige Dreiecke sind, mit $V$, die Höhe mit $H$, so hat man nach nebenstehender Auflösung die Formel:

$$V = \frac{5}{3}m\cdot n\cdot H$$

---

**Aufgabe 702.** Von einem geraden, quadratischen Prisma kennt man die Grundkante $v$ und die Seitenkante $w$. Denkt man sich durch die Diagonalen der oberen Grundfläche Ebenen gelegt, welche die Seitenkanten in der Entfernung $u$ über der unteren Grundfläche durchschneiden, so entsteht ein prismatischer Körper mit pyramidalischer Zu-

**Formeln:**

Für ein Prisma:

I. . . . $V = G\cdot H$ (s. Erkl. 541)

Für eine Pyramide:

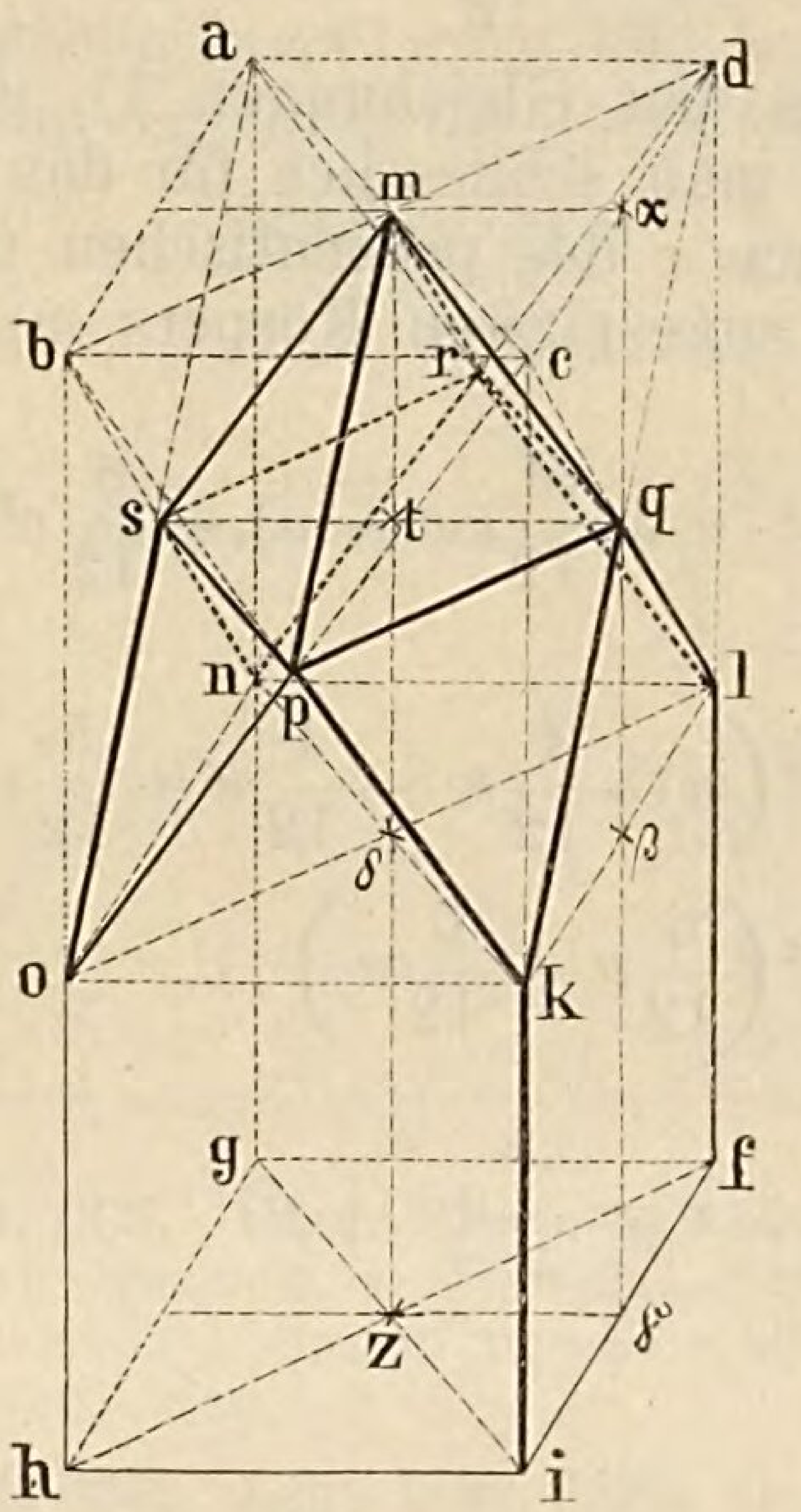
II. . . . $V = \frac{G\cdot H}{3}$ (s. Frkl. 532)

Für einen Antiobelisken mit quadratischen Grundflächen:

III. . . . $V = \frac{5}{6}A^2\cdot H$ (s. Erkl. 637).

spitzung; wie gross ist das Volumen desselben?

Figur 210.




**Erkl. 635.** Wie aus der Figur 210 leicht ersichtlich, ist z. B. die Linie $pq$ die Verbindungslinie der Mitten $p$ und $q$ der Seiten $bk$ und $dk$ des Dreiecks $bdk$ und als solche, nach dem in der Erkl. 176 ausgesprochenen, planimetrischen Lehrsatz $= \frac{\overline{bd}}{2}$.

Da nun $\overline{bd}$ als Diagonale des Quadrats $abcd$, dessen Seite mit $v$ gegeben, gleich $v\sqrt{2}$ ist, so ergibt sich hieraus,

dass die Seite $pq = \frac{v}{2}\sqrt{2}$ ist.

Da ferner, wie hiernach leicht einzusehen ist, das Viereck $pqrs$ ein Quadrat ist, so hat man für eine Seite dieses Quadrats, in die gegebene Grundkante $v$ ausgedrückt, den Wert:

$$\text{a)} \ldots \frac{v}{2}\sqrt{2}$$

und sonach für den Inhalt desselben:

$$\text{b)} \ldots \frac{v^2}{2}$$

**Erkl. 636.** Aus dem bei $l$ rechtwinkligen Dreieck $dkl$, siehe Fig. 210, ergibt sich:

$$\overline{dk} = \sqrt{\overline{dl}^2 + \overline{kl}^2}$$

oder, da $\overline{dl} = \overline{df} - \overline{lf} = w - n$ u. $\overline{kl} = v$ ist:

$$\text{a)} \ldots \overline{dk} = \sqrt{(w-u)^2 + v^2}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 210, $abcdfghi$ das gegebene Prisma und man denkt sich durch die Diagonalen der oberen Grundfläche $abcd$ die Ebenen $bdk$, $bdn$, $aco$ und $acl$ so gelegt, dass die Abschnitte $bk$, $fl$, $gn$ u. $ho$ auf den Seitenkanten des Prismas einander gleich und zwar gleich der gegeb. Strecke $u$ werden, so schneiden sich diese Ebenen nach den Linien $mp$, $mq$, $mr$ und $ms$ und es entsteht der pyramidalisch zugespitzte Körper $mpqrsoklnghif$. Zur Berechnung des gesuchten Volumens $x$ dieses Körpers denke man sich durch die Eckpunkte $o$, $k$, $l$ und $n$, ebenso durch die Eckpunkte $p$, $q$, $r$, $s$ je eine Ebene gelegt, wodurch jener Körper in das gerade, quadratische Prisma $hifgnokl$, in das Prismatoid $oklnspqr$ und in die gerade, vierseitige Pyramide $mpqrs$ zerlegt wird. Für das Volumen $x_1$ des Prismas $hifgnokl$ hat man nach vorstehender Formel I und in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe eine Grundkante, z. B. $hi = v$ und eine Seitenkante, z. B. $ik = u$ ist:

$$1) \ldots x_1 = v^2 \cdot u$$

Für das Volumen $x_2$ der Pyramide $mpqrs$ hat man nach vorstehender Formel II und in Rücksicht, dass der Inhalt der Grundfläche $pqrs = \frac{v^2}{2}$ (siehe Erkl. 635) und die Höhe $mt = \frac{1}{2}(w-u)$ (siehe Erkl. 636) ist:

$$x_2 = \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{2}(w-u) : 3$$

oder

$$2) \ldots x_2 = \frac{v^2}{12}(w-u)$$

Für das Volumen $x_3$ des Prismatoids $oklnspqr$, welches ein Antiobelisk mit quadratischen Grundflächen darstellt, hat man nach vorstehender Formel III und in Rücksicht, dass in dieser Formel:

$A = \overline{ok} = \overline{hi} = v$

und

$H = \overline{t\delta} = \overline{mz} - \overline{\delta z} - \overline{mt} = w - u - \frac{1}{2}(w-u) = \frac{1}{2}(w-u)$ ist (s. Erkl. 636)

Da ferner $\overline{kq} = \frac{\overline{kd}}{2}$

ist, so hat man:

b) . . . $\overline{kq} = \frac{1}{2}\sqrt{(w-u)^2 + v^2}$

Aus dem bei $\beta$ rechtwinkligen Dreieck $k\beta q$ ergibt sich:

$$\overline{q\beta} = \sqrt{\overline{kq}^2 - \overline{k\beta}^2}$$

oder, da $\overline{k\beta} = \frac{\overline{kl}}{2} = \frac{\overline{if}}{2} = \frac{v}{2}$

und für $\overline{kq}$ der Wert aus Gleich. b) gesetzt werden kann:

$$\overline{q\beta} = \sqrt{\frac{1}{4}[(w-u)^2 + v^2] - \left(\frac{v}{2}\right)^2}$$

oder

$$\overline{q\beta} = \sqrt{\frac{1}{4}(w-u)^2 + \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{4}v^2}$$

mithin

c) . . . $\overline{q\beta} = \frac{1}{2}(w-u)$

Berücksichtigt man nunmehr, dass die Höhe $mt$ der Pyramide $mpqrs$

$= \overline{\alpha q} = \overline{\alpha\gamma} - \overline{\beta\gamma} - \overline{q\beta}$ ist, so erhält man:

$$mt = w - u - \frac{1}{2}(w-u) \text{ [siehe Gleich. c)]}$$

$$= w - u - \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}u$$

$$= \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}u$$

d) . . $= \frac{1}{2}(w-u)$

**Erkl. 637.** Nach der Erkl. 634 besteht zur Berechnung des Volumens $V$ eines Antiobelisken, dessen Höhe $= H$, dessen untere Grundfläche eine Raute mit den Diagonalen $2m$ und $2n$ und dessen obere Grundfläche ein Rechteck mit den zu jenen Diagonalen parallelen Seiten $m$ u. $n$ ist:

1) . . . $V = \frac{5}{3}m \cdot n \cdot H$

Werden nun die Diagonalen $2m$ und $2n$ jener Raute einander gleich, wird also $2m = 2n$, bezw. $m = n$, so ist diese Raute ein Quadrat; bezeichnet man die Seite desselben mit $A$ und berücksichtigt man, dass für diesen Fall $2m^2 = A^2 + A^2$, bezw. dass $m = \frac{A}{2}\sqrt{2}$ gesetzt werden kann, so geht die Gleichung 1) über in:

$$V = \frac{5}{3} \cdot \frac{A}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{A}{2}\sqrt{2} \cdot H$$

und hieraus erhält man für das Volumen $V$ eines Antiobelisken, dessen Höhe $= H$, dessen untere Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $A$ ist und dessen obere Grundfläche ein Quadrat ist, dessen Seiten parallel den Diagonalen jenes Quadrats und halb so lang als diese sind:

2) . . . $V = \frac{5}{6}A^2 \cdot H$

$$x_3 = \frac{5}{6}v^2 \cdot \frac{1}{2}(w-u)$$

oder

3) . . . $x_3 = \frac{5}{12}v^2(w-u)$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man schliesslich für das gesuchte Volumen $x$ des prismatischen und pyramidal zugespitzten Körpers $mpqrsoklnghif$:

$$x = v^2 \cdot u + \frac{v^2}{12}(w-u) + \frac{5}{12}v^2(w-u)$$

oder

$$x = v^2\left(u + \frac{1}{12}w - \frac{1}{12}u + \frac{5}{12}w - \frac{5}{12}u\right)$$

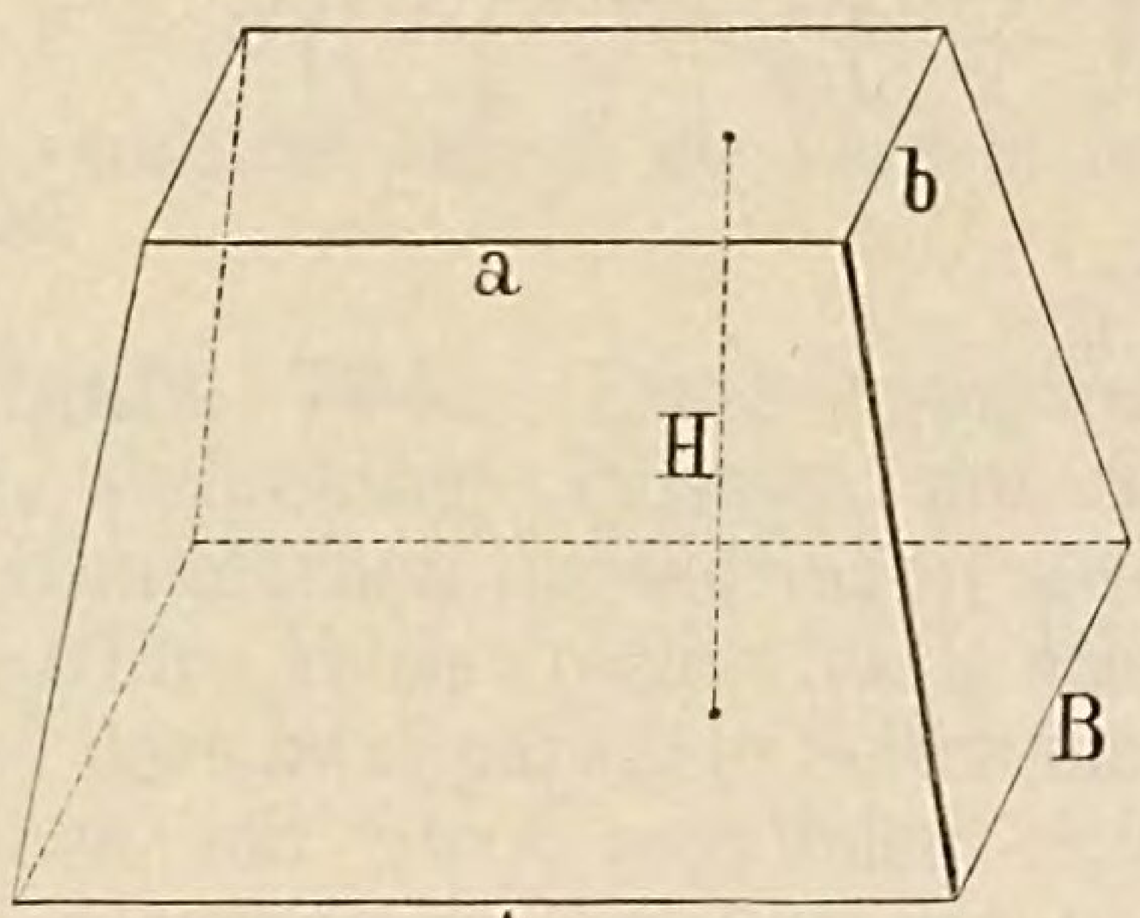
$$x = v^2\left(\frac{6}{12}u + \frac{6}{12}w\right)$$

mithin

A) . . . $x = \frac{v^2}{2}(w+u)$

**Aufgabe 703.** Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man für das Volumen eines Pontons (s. Erkl. 638), wenn die Seiten der grösseren Grundfläche bezw. $= A$ und $B$, die Seiten der kleineren Grundfläche bezw. $= a$ und $b$ sind und die Höhe des Pontons $= H$ ist?

Figur 211.




**Erkl. 638.** Unter einem „Ponton", auch „Kasten" genannt, s. Figur 211, versteht man einen Obelisken, dessen parallele Grundflächen Rechtecke sind.

**Erkl. 639.** Legt man durch die Mitte der Höhe eines Pontons, s. Figur 211, eine Ebene, so schneidet dieselbe das Ponton in der sogenannten mittleren Durchschnittsfläche. Diese Durchschnittsfläche ist ein Rechteck, dessen Seiten als Mittellinien von Paralleltrapezen bezw. $= \frac{A+a}{2}$ und $= \frac{B+b}{2}$ sind.

Für den Inhalt $D$ dieser Durchschnittsfläche hat man somit:

$$D = \frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2}$$

**Erkl. 640.** Bezeichnet man die Seiten der grösseren Grundfläche eines Pontons mit $A$ und $B$, die Seiten der kleineren Grundfläche mit $a$ und $b$, die Höhe des Pontons mit $H$ und das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$1) \ldots V = \frac{H}{6}[AB + (A+a)(B+b) + ab]$$

Diese Formel kann man noch durch Auflösen der inneren Klammern wie folgt, umformen.

$$V = \frac{H}{6}[AB + AB + aB + Ab + ab + ab]$$

und man erhält die weitere Formel:

$$2) \ldots V = \frac{H}{6}[2AB + aB + Ab + 2ab]$$

oder auch:

$$3) \ldots V = \frac{H}{6}[(2A+a)B + (2a+A)b]$$

(Siehe auch die Erkl. 641)

**Formel:**

Für einen Obelisk:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g) \quad \text{(s. Erkl. 613).}$$

**Auflösung.** Da nach der Erkl. 638 ein Ponton, siehe Figur 211, nichts anderes als ein Obelisk (bezw. ein Prismatoid) ist, in welchem die Grundflächen Rechtecke sind, so dient zur Berechnung des gesuchten Volumens $V$ des durch die Figur 211 dargestellten Pontons vorstehende Formel:

$$a) \ldots V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

Berücksichtigt man, dass bei dem durch die Figur 211 dargestellten Ponton, gemäss der Aufgabe:

$$G = A \cdot B$$
$$g = a \cdot b$$
$$D = \frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} \quad \text{(s. Erkl. 639)}$$

gesetzt werden kann, so erhält man hieraus:

$$V = \frac{H}{6}\left(A \cdot B + 4 \cdot \frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + a \cdot b\right)$$

oder

$$A) \; V = \frac{H}{6}[AB + (A+a)(B+b) + ab]$$

(siehe die Erkl. 640 bis 643).

**Erkl. 641.** Benutzt man zur Berechnung des Volumens $V$ des durch die Figur 211 dargestellten Obelisken mit rechteckigen Grundflächen „Ponton oder Kasten genannt," die in der Erkl. 615 aufgestellte Obeliskenformel:

$$V = HD + \frac{1}{3} HE$$

und setzt man in derselben wie in nebenstehender Auflösung:

$$D = \frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2}$$

und dementsprechend:

$$E = \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2} \quad \text{(s. Erkl. 615)}$$

so erhält man:

$$V = H \cdot \frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} H \cdot \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}$$

oder

$$1) \ldots V = H\left(\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}\right)$$

**Erkl. 642.** Sind in einem Ponton zwei homologe, den Grundflächen angehörige Seiten gleich gross, so ist das Volumen des Pontons:

a) gleich dem Volumen des Prismas, welches mit ihm gleiche Höhe hat und dessen Grundflächen gleich der mittleren Durchschnittsfigur sind, und

b) gleich dem Volumen des Prismas, welches mit ihm gleiche Höhe hat und von welchem jede Grundfläche gleich dem arithmetischen Mittel aus den Grundflächen des Pontons ist.

**Beweis:** Setzt man in der in der Erkl. 641 aufgestellten Pontonformel:

$$V = H\left(\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}\right)$$

z. B. $a = A$

so erhält man:

$$V = H \cdot \frac{2A}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \frac{B-b}{2}$$

oder

$$1) \ldots V = H \cdot A \cdot \frac{B+b}{2}$$

was man wie folgt in Worten ausdrücken kann:

a) Denkt man sich ein Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke mit den Seiten $A$ und $\frac{B+b}{2}$ bezw. dessen Grundflächen je gleich dem mittleren Durchschnitt jenes Pontons sind, und dessen Höhe gleich der Höhe $H$ des Pontons ist, so hat dieses Prisma mit jenem Ponton gleiches Volumen

oder:

b) denkt man sich ein Prisma, dessen Grundflächeninhalte je $= \frac{A \cdot B + A \cdot b}{2} \left(= A \cdot \frac{B+b}{2}\right)$, nämlich gleich dem arithmetischen Mittel aus den Inhalten $AB$ und $Ab$ der beiden Grundflächen jenes Pontons sind, und dessen Höhe gleich der Höhe $H$ des Pontons ist, so hat dasselbe mit jenem Ponton gleiches Volumen.

**Erkl. 643.** Sind in einem Ponton die Grundflächen Quadrate, wird also in der Figur 211 $A = B$ und $a = b$ und setzt man dementsprechend in den in der Erkl. 640 aufgestellten Formeln $A = B$ und $a = b$, so erhält man die Formel:

$$1) \ldots V = \frac{H}{3}(A^2 + Aa + a^2)$$

In ähnlicher Weise erhält man aus der in der Erkl. 641 aufgestellten Formel die weitere Formel:

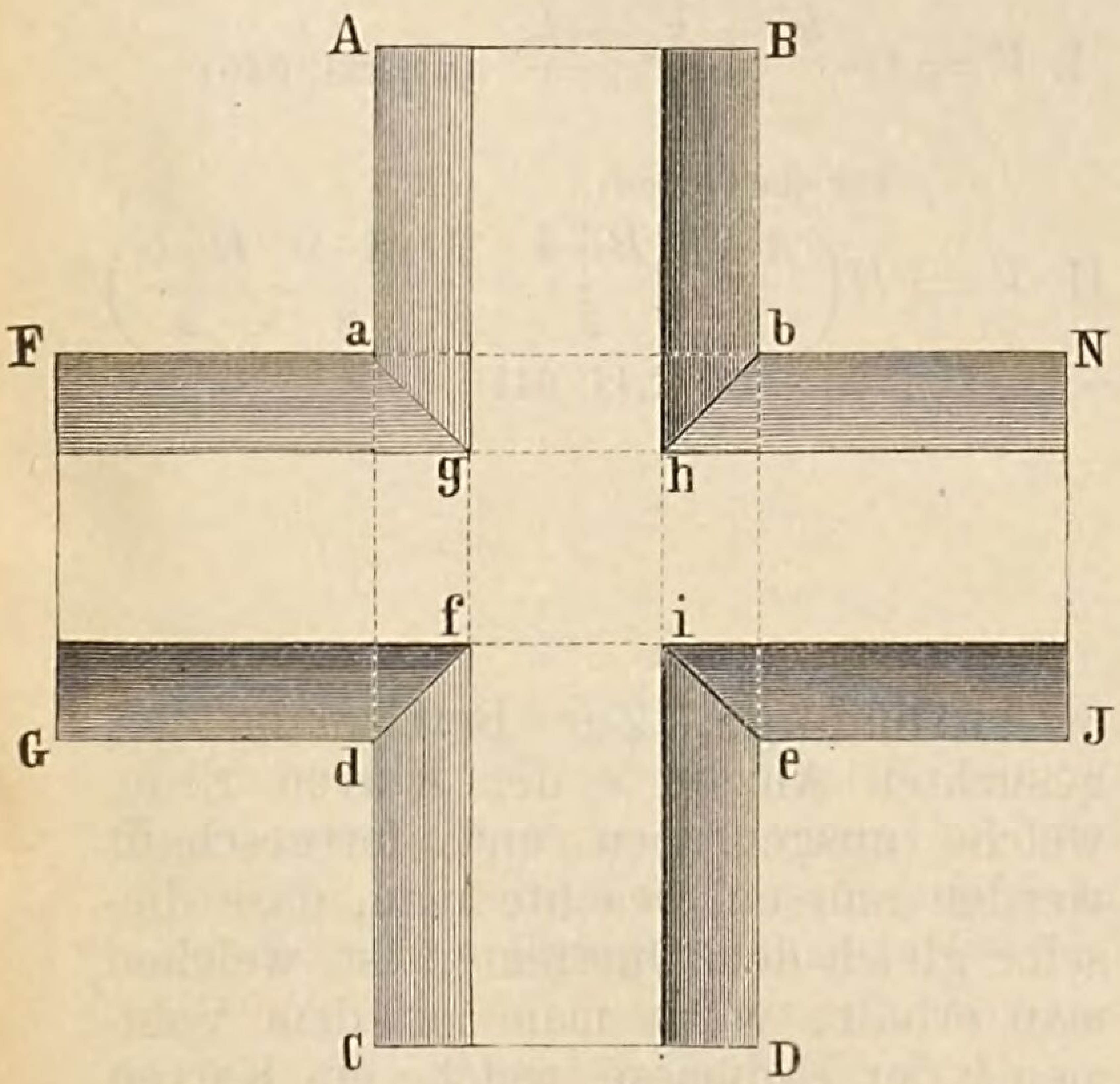
$$2) \ldots V = H\left[\left(\frac{A+a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{A-a}{2}\right)^2\right]$$

Man vergleiche hiermit die Formeln in der Erkl. 624.

---

**Aufgabe 704.** Zwei kongruente, gerade, sechsseitige Prismen mit regulären Grundflächen durchdringen sich so, dass sich ihre Achsen rechtwinklig schneiden und dass zwei parallele Seitenflächen des einen mit zwei parallelen Seitenflächen des andern, beziehungsw. in ein und dieselbe Ebene fallen. Wie gross ist das Volumen des beiden Prismen gemeinschaftlichen Körpers, wenn die Grundkanten beider Prismen $= m$ sind?

Figur 212.




**Formel:**

Für ein Ponton mit quadratischen Grundflächen:

$$V = \frac{H}{3}(A^2 + Aa + a^2) \text{ (s. Erkl. 643).}$$

**Auflösung.** Durchdringen sich zwei kongruente, gerade, sechsseitige Prismen mit regulären Grundflächen so, wie in der Aufgabe gesagt und wie in der Figur 212 in orthogonaler Projektionsart gezeigt ist, so kann man sich den Körper, welchen beide Prismen gemeinsam haben, aus zwei kongruenten Ponton zusammengesetzt denken, deren Grundflächen Quadrate und deren Seitenflächen kongruente Antiparallelogramme sind, und die mit ihren grösseren Grundflächen aufeinander stehen. In der Figur 212 sieht man eines dieser Ponton, nämlich das Ponton $abcdfghi$, das andre wird von diesem vollständig gedeckt und ist in der Figur nicht ersichtlich.

Zur Berechnung des Volumens des Pontons $abcdfghi$ dient vorstehende Formel:

$$V = \frac{H}{3}(A^2 + Aa + a^2)$$

Setzt man in derselben:

$A = \overline{ab} = \overline{AB} = 2m$, nämlich gleich dem Durchmesser des der regulären, sechsseitigen Grundfläche $AB$ mit der Seite $m$ umbeschriebenen Kreises;

$a = \overline{gh} = \overline{KL} = m$, nämlich gleich der Seite $m$ der regulären, sechsseitigen Grundfläche $AB$;

$H = \frac{m}{2}\sqrt{3}$, nämlich gleich dem Radius des der regulären, sechsseitigen Grundfläche $FG$ einbeschriebenen Kreises, indem derselbe gleich dem senkrechten Abstand der durch den Mittelpunkt dieser Grundfläche gehenden Ebene $FGJN$ und der Ebene $gfih$ ist,

so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Doppelpontons, aus welchem der den beiden Prismen gemeinsame Körper besteht:

$$x = 2 \cdot \frac{\frac{m}{2}\sqrt{3}}{3}\left[(2m)^2 + 2m \cdot m + m^2\right]$$

oder

$$x = \frac{m\sqrt{3}}{3}(4m^2 + 2m^2 + m^2)$$

$$x = \frac{m\sqrt{3}}{3} \cdot 7m^2$$

oder

$$\text{A)} \ldots x = \frac{7}{3} m^3 \sqrt{3}$$

---

**Aufgabe 705.** Ein unebenes Terrain habe in seiner Horizontalprojektion die Gestalt eines Vierecks von der durch die Fig. 213 dargestellten Form. Dieses Terrain soll geebnet und die Anzahl der Karren Erde bestimmt werden, welche ausgegraben und fortgeschafft werden müssen. Zu diesem Zwecke wurde, wie die Fig. 213 zeigt, das Terrain in vier Dreiecke zerlegt, die Seiten derselben gemessen und die Inhalte dieser Dreiecke berechnet. Für die Inhalte dieser Dreiecke fand man:

Inhalt des Dreiecks $abm = 20$ qm
„ „ „ $bcm = 22$ „
„ „ „ $cdm = 18$ „
„ „ „ $dam = 15$ „

Ferner wurde durch Nivellement bestimmt, dass bei den Punkten $a$, $b$, $c$, $d$ und $m$, bezw. bis auf eine Tiefe von 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $1\frac{3}{4}$ und 3 m ausgegraben werden muss.

Der zum Wegfahren der Erde zu benützende Karren hat die Form eines Pontons von 0,8 m Tiefe, 1,2 m obere Breite; 2,5 m obere Länge; von 0,7 m untere Breite und 1,8 m untere Länge.

**Formeln:**

Für ein gerades, dreiseitiges, schief abgeschnittenes Prisma:

$$\text{I. } V = G \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad \text{(s. Erkl. 546)}$$

Für ein Ponton:

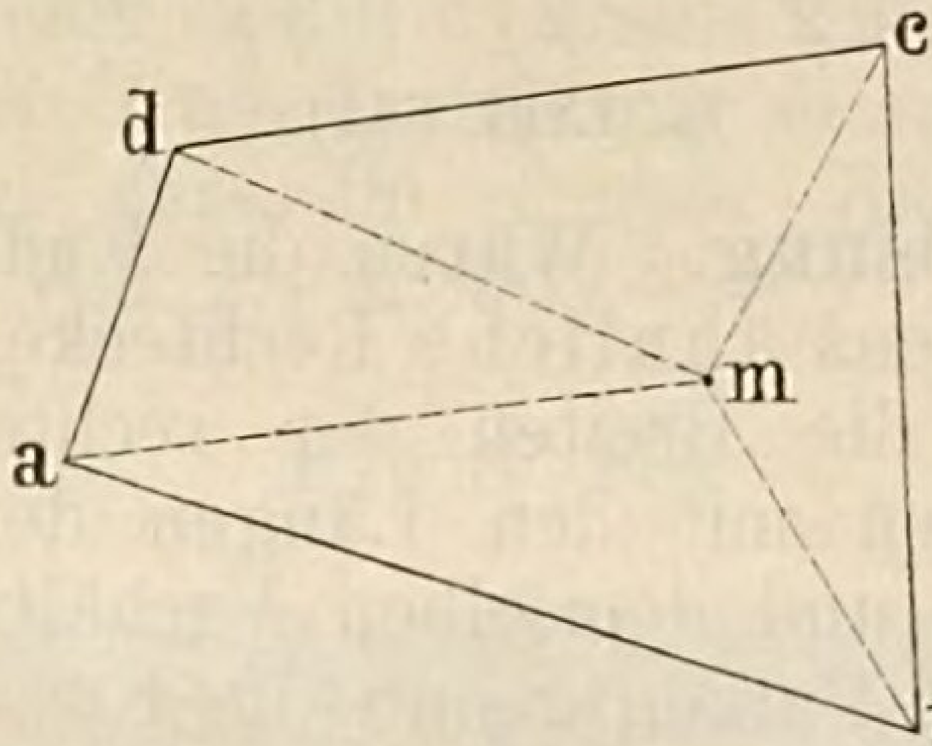
$$\text{II. } V = H\left(\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}\right)$$

(s. Erkl. 641).

**Auflösung.** Zur Berechnung der gesuchten Anzahl $x$ der Karren Erde, welche ausgegraben und fortgeschafft werden müssen, beachte man, dass dieselbe gleich dem Quotienten ist, welchen man erhält, wenn man mit dem Volumen $k$ der Erdmasse, welche ein Karren fasst, in das Volumen der Erdmasse $E$, welche ausgegraben werden muss, dividiert. Man hat also die Gleichung:

$$1) \ldots x = \frac{E}{k}$$

Figur 213.




Zur Bestimmung der ganzen Erdmasse $E$, welche ausgegraben werden muss, beachte man, dass dieselbe gleich der Summe der Volumen von vier geraden, dreiseitigen und je einerseits schief abgeschnittenen Prismen ist, deren Grundflächen die horizontal gemessenen vier Dreiecke in der Fig. 213 sind und deren Seitenkanten gleich den Tiefen sind, bis zu welchen an den Eckpunkten dieser Dreiecke die Erde ausgegraben werden soll.

Mit Benutzung der vorstehenden Formel 1) und der in der Aufgabe gegebenen Werte, erhält man für das Volumen $E$ der auszugrabenden Erdmasse:

$$E = 20 \cdot \frac{1 + 1\frac{1}{2} + 3}{3} + 22 \cdot \frac{1\frac{1}{2} + 2 + 3}{3} + 18 \cdot \frac{2 + 1\frac{3}{4} + 3}{3} + 15 \cdot \frac{1\frac{3}{4} + 1 + 3}{3}$$

oder

$$E = 20 \cdot \frac{11}{6} + 22 \cdot \frac{13}{6} + 18 \cdot \frac{27}{12} + 15 \cdot \frac{23}{12}$$

$$E = \frac{1}{6}(220 + 286 + 243 + 172{,}5)$$

$$E = \frac{1}{6} \cdot 921{,}5$$

mithin

$$2) \ldots E = 153{,}58 \text{ cbm}$$

Zur Berechnung des Volumens $k$ der Erdmasse, welche ein Karren fasst, beachte man, dass derselbe die Form eines Pontons hat, und dass somit zur Berechnung von dessen Volumen $k$ vorstehende Formel 2) benutzt werden kann; setzt man in derselben:

$H = 0{,}8$ m, nämlich gleich der Tiefe des Karrens
$A = 1{,}2$ m, „ „ „ oberen Breite
$a = 0{,}7$ m, „ „ „ unteren „
$B = 2{,}5$ m, „ „ „ oberen Länge
und
$b = 1{,}8$ m, „ „ „ unteren Länge

des Karrens, so erhält man für das Volumen $k$ des Karrens:

$$k = 0{,}8 \cdot \left[\frac{1{,}2 + 0{,}7}{2} \cdot \frac{2{,}5 + 1{,}8}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}2 - 0{,}7}{2} \cdot \frac{2{,}5 - 1{,}8}{2}\right]$$

oder

$$k = 0{,}8\left[\frac{1{,}9}{2} \cdot \frac{4{,}3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0{,}5}{2} \cdot \frac{0{,}7}{2}\right]$$

$$k = \frac{0{,}8}{4}\left[8{,}17 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}35\right]$$

$$k = 0{,}2\,[8{,}17 + 0{,}1166]; \; k = 0{,}2 \cdot 8{,}2866$$

$$k = 1{,}65732 \text{ oder abgerundet}$$

$$3) \ldots k = 1{,}66 \text{ cbm}$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man schliesslich für die gesuchte Anzahl $x$ der Karren Erde, welche ausgegraben und fortgeschafft werden müssen:

$$x = \frac{153,58}{1,66}$$

oder

$$\text{A)} \; . \; . \; . \; x = 92,5$$

Hiernach sind $92^1/_2$ Karren Erde auszugraben und fortzuschaffen.

---

**Aufgabe 706.** Welches Volumen hat ein 6 m langer Balken, welcher am dickeren, am sogenannten Stammende 28 cm und 40 cm hoch, am dünneren, am sogenannten Zopfende 24 cm breit und 35 cm hoch ist?

**Formel:**

Für ein Ponton:

$$V = H\left(\frac{A+a}{2}\cdot\frac{B+b}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{A-a}{2}\cdot\frac{B-b}{2}\right)$$

(s. Erkl. 641).

**Auflösung.** Wären die Endflächen des Balkens ähnliche Rechtecke, bezw. stünden die Breiten der rechteckigen Endflächen mit den Längen derselben in einem und demselben Verhältnis, so hätte der Balken genau die Form einer abgestumpften, vierseitigen Pyramide und man könnte das Volumen desselben nach der Kubikinhaltsformel für einen Pyramidenstumpf berechnen. Da dies aber nicht der Fall (indem 28 : 24 nicht = 40 : 35 ist), so muss man den Balken als ein Ponton betrachten und das Volumen desselben nach vorstehender Formel berechnen.

Setzt man in vorstehender Formel:

$H = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$, nämlich gleich der Länge des Balkens

$A = 28 \text{ cm}$, nämlich gleich der Breite des Querschnitts am Stammende

$a = 24 \text{ cm}$, nämlich gleich der Breite des Querschnitts am Zopfende

$B = 40 \text{ cm}$, nämlich gleich der Länge des Querschnitts am Stammende

und

$b = 35 \text{ cm}$, nämlich gleich der Länge des Querschnitts am Zopfende,

so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Balkens:

$$x = 600\left(\frac{28+24}{2}\cdot\frac{40+35}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{28-24}{2}\cdot\frac{40-35}{2}\right)$$

oder

$$x = 600\left(\frac{52}{2}\cdot\frac{75}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)$$

$$x = \frac{600}{4}\left(52 \cdot 75 + \frac{4 \cdot 5}{3}\right)$$

$$x = 150\left(3900 + \frac{20}{3}\right); \quad x = 150 \cdot \frac{11700 + 20}{3}$$

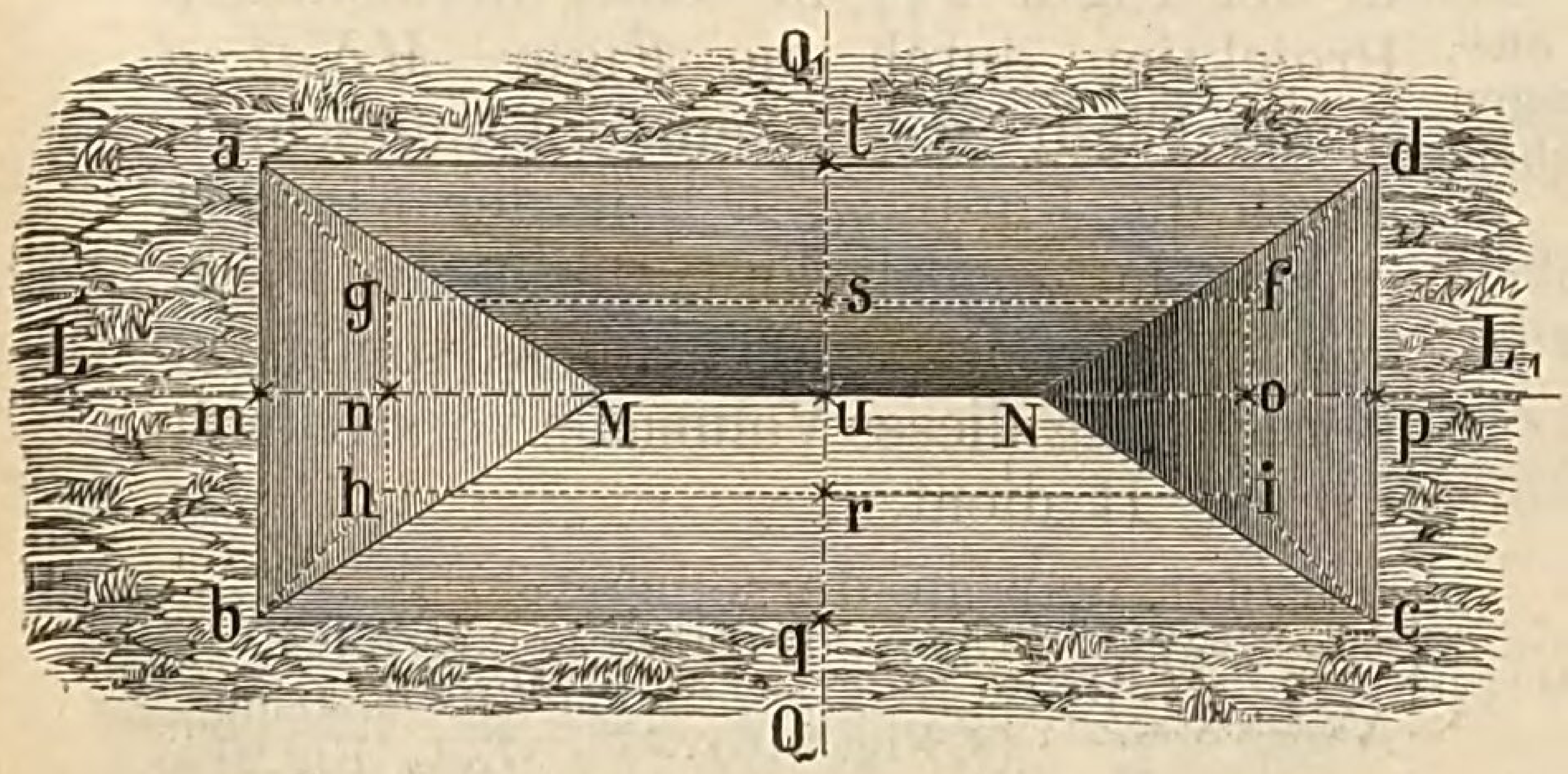
$$x = 50 \cdot 11720; \qquad x = 586000$$

Der Balken enthält also 586000 ccm oder 586 cdm.

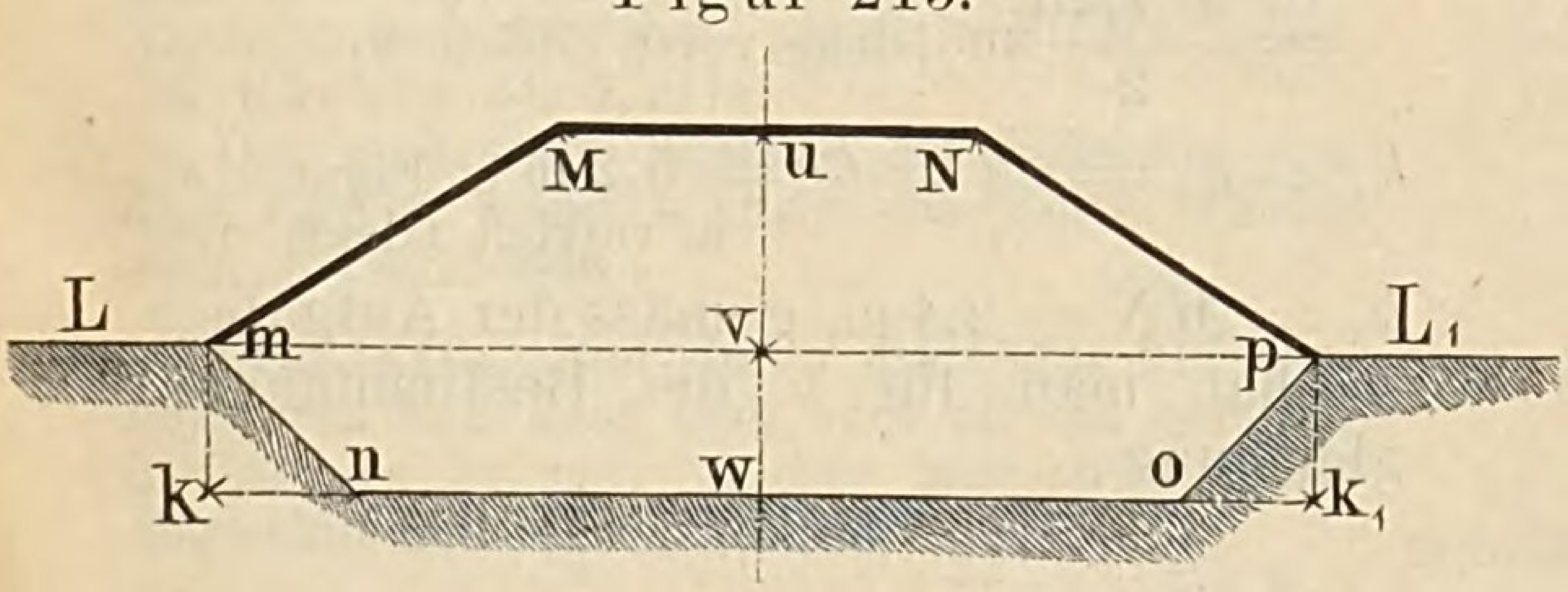
---

**Aufgabe 707.** Zum Aufbewahren von Kartoffeln wird eine Grube mit ganzer Anlage (ganzer Dossierung) ringsum gegraben. Wie viel cbm Kartoffeln können in dieser Grube aufbewahrt werden, wenn die Grube 0,8 m tief ist, die Sohle derselben 1,4 breit und 3,6 m lang ist, und wenn die Kartoffeln 1,25 m hoch über der Grube dachförmig so aufgehäuft werden, dass die oberste Kante eine Länge von 2,4 m hat?

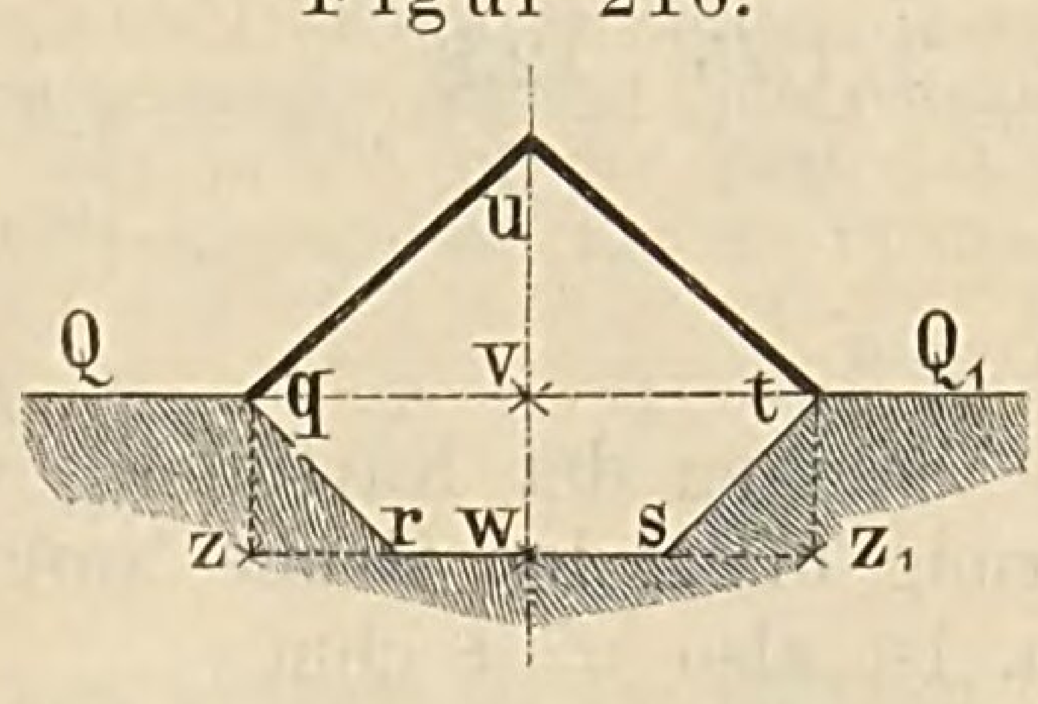
Figur 214.




Figur 215.




Figur 216.




**Formeln:**

Für ein Ponton:

$$\text{I. } V = H\left(\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}\right)$$

(s. Erkl. 641)

Für ein gerades, beiderseits schief abgeschnittenes Prisma:

$$\text{II. } V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad \text{(s. Erkl. 546)}$$

**Auflösung.** Der Raum der Grube, welche in der Fig. 214 durch *abcdfghi* in horizontaler Projektion, in Fig. 215 durch *mnop* im Längsdurchschnitt $LL_1$ und in der Figur 216 durch *qrst* im Querdurchschnitt $QQ_1$ dargestellt ist, hat die Form eines Pontons. Zur Berechnung des Volumens $x$ desselben dient daher vorstehende Formel I.

Setzt man in derselben:

a) $H = \overline{vw} = 0{,}8$ m, nämlich gleich der Tiefe der Grube, siehe die Figuren 215 und 216

b) $A = \overline{ab} = \overline{tq} = \overline{zz_1} = \overline{sr} + \overline{rz} + \overline{sz_1}$ (siehe die Figuren 214 u. 216)
$= (1{,}4 + 0{,}8 + 0{,}8)$ m
$= 3{,}0$ m, nämlich gleich der oberen Breite $\overline{ab} = \overline{tq}$ der Grube, welche gleich der Sohlbreite $sr$ plus den gleichen horizontalen Projektionen $\overline{rz}$ und $\overline{sz_1}$ der Böschungslinien $\overline{ts}$ und $\overline{rq}$ ist, siehe die Figuren 214 und 216 und die Erkl. 644.

c) $a = \overline{gh} = \overline{sr} = 1{,}4$ m, nämlich gleich der unteren Breite, der Sohlbreite der Grube

d) $B = \overline{bc} = \overline{mp} = \overline{kk_1} = \overline{no} + \overline{kn} + \overline{ok_1}$ (siehe die Figuren 214 und 215)
$= (3{,}6 + 0{,}8 + 0{,}8)$ m
$= 5{,}2$ m, nämlich gleich der oberen Länge $\overline{bc} = \overline{mp}$ der Grube, welche gleich der Sohllänge $no$ plus den gleichen horizontalen Projektionen $\overline{kn}$ und $\overline{ok_1}$ der Böschungslinien $mn$ und $po$ ist, siehe dis Figuren 214 und 215 und die Erkl. 644

und

f) $b = \overline{hi} = \overline{no} = 3{,}6$ m, nämlich gleich der unteren Länge, der Sohllänge der Grube

so erhält man für das Volumen $x$ der Grube:

$$x = 0{,}8\left[\frac{3+1{,}4}{2}\cdot\frac{5{,}2+3{,}6}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3-1{,}4}{2}\cdot\frac{5{,}2-3{,}6}{2}\right]$$

oder

$$x = 0{,}8\left[\frac{4{,}4}{2}\cdot\frac{8{,}8}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1{,}6}{2}\cdot\frac{1{,}6}{2}\right]$$

$$x = 0{,}8\left(2{,}2\cdot4{,}4+\frac{1}{3}\cdot0{,}8\cdot0{,}8\right)$$

$$x = 0{,}8\,(9{,}68+0{,}213)\,;\quad x = 0{,}8\cdot9{,}893$$

oder

1) . . . $x = 7{,}91$

Die Grube selbst enthält also 7,91 cbm Kartoffeln.

Zur Berechnung des Volumens $y$ der Kartoffeln, welche über die Grube dachförmig aufgehäuft werden, beachte man, dass diese dachförmige Aufhäufung die Form eines geraden, beiderseits schief abgeschnittenen Prismas hat, welches in der Figur 214 in seiner horizontalen Projektion durch die Figur $MNabcd$ in der Figur 215 in seinem Längsschnitt durch die Figur $mpNM$ in der Fig. 216 in seinem Normalschnitt durch die Figur $qtu$ dargestellt ist, und dass somit zur Berechnung dieses Volumens vorstehende Formel II dient.

Setzt man in derselben:

$$N = \frac{\overline{qt}\cdot\overline{vu}}{2} \text{ (s. Fig. 216) } = \frac{\overline{ab}\cdot\overline{vu}}{2} \text{ (siehe Fig. 214)}$$

$$= \frac{3\cdot1{,}25}{2}\text{ m [siehe vorst. Gleich. b)]}$$

$k_1 = k_2 = \overline{ad} = \overline{bc} = 5{,}2$ m [s. Figur 214 u. vorsteh. Gleich. d)]

$k_3 = \overline{MN} = 2{,}4$ m, gemäss der Aufgabe, so hat man für $y$ die Bestimmungsgleichung:

$$y = \frac{3\cdot1{,}25}{2}\cdot\frac{5{,}2+5{,}2+2{,}4}{3}$$

oder

$$y = \frac{3\cdot1{,}25}{2}\cdot\frac{12{,}8}{3}\,;\quad y = 1{,}25\cdot6{,}4$$

mithin

2) . . $y = 8$

Das Volumen der Kartoffeln, welche dachförmig über der Grube aufgehäuft werden, ist also = 8 cbm

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt

**Erkl. 644.** Hat eine Grube ganze Anlage, wie die in vorstehender Aufgabe erwähnte und durch die Figuren 214, 215 u. 216 dargestellte, so heisst dies nichts anderes, als die Böschungsgrundlinie $\overline{rz}$, siehe Figur 216, ist gleich der Höhe $\overline{qz}$ des Böschungsdreiecks $qzr$, bezw. gleich der Tiefe $vw$ der Grube. In analoger Weise ist in der Figur 215 $\overline{kn} = \overline{km} = \overline{vw}$.

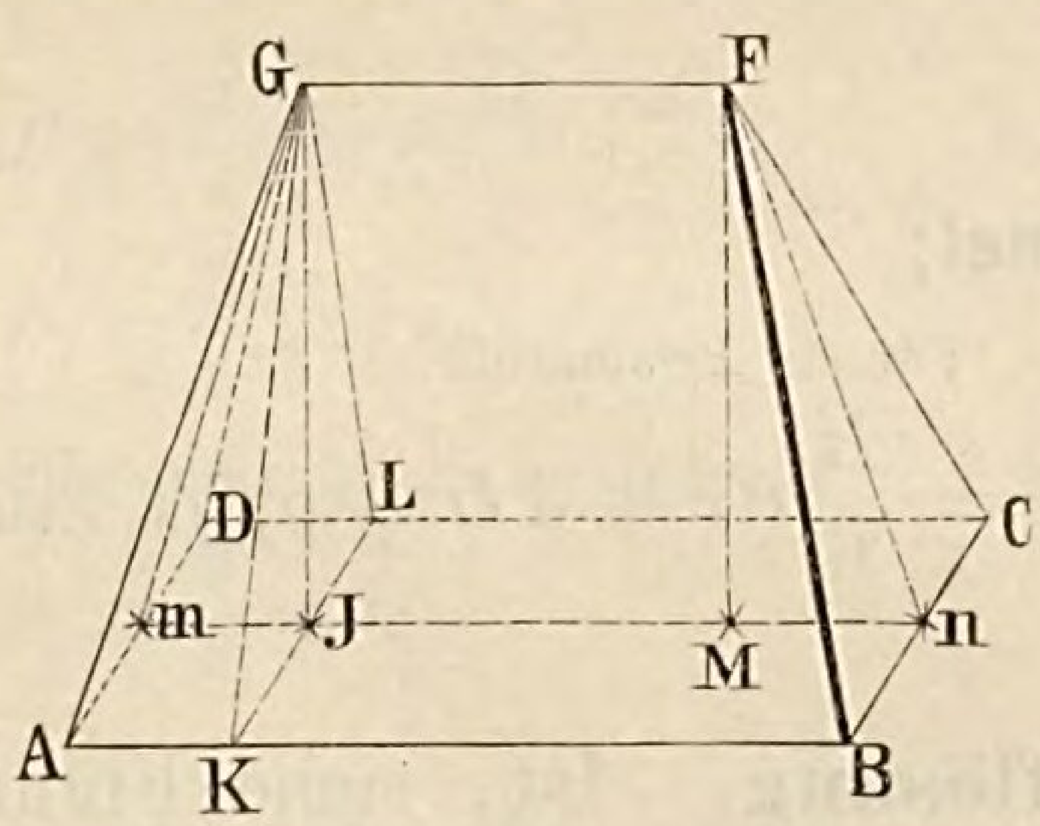
Die früheren Erkl. 13 bis 18 geben ausführliche Auskunft über die Böschungsanlagen oder die sogenannten Dossierungen von Gruben.

sich, dass wenn die Grube mit Kartoffeln gefüllt und letztere dachförmig, wie angegeben, aufgehäuft werden, hierzu 7,91 + 8 oder 15,91 cbm Kartoffeln erforderlich sind.

---

**Aufgabe 708.** Der Rücken eines Keils (siehe Erkl. 645) sei ein Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$ ($a > b$) die zwei den kleineren Seiten dieses Rechtecks anliegenden Seitenflächen seien kongruente, gleichschenklige Dreiecke, die zwei den grösseren Seiten jenes Rechtecks anliegenden Seitenflächen seien kongruente Paralleltrapeze mit der Höhe $c$. Wie gross ist das Volumen dieses Keils, wenn die Schneide desselben $= s$ ist?

Figur 217.




**Erkl. 645.** Unter einem „Keil" versteht man im allgemeinen ein Prismatoid, beziehgsw. einen Obelisken oder ein Ponton, dessen eine Grundfläche auf eine Linie, die sogenannte Schärfe oder Schneide des Keils, reduziert ist. Die der Schneide eines Keils gegenüberliegende und derselben parallele Fläche heisst der Rücken des Keils.

Der senkrechte Abstand der Schneide von dem Rücken heisst Länge des Keils. (Siehe auch die Erkl. 646.)

**Erkl. 646.** Den durch die Figur 217 dargestellten Keil kann man auch als ein gerades, dreiseitiges Prisma, welches beiderseits schief abgeschnitten ist, betrachten.

**Erkl. 647.** Einen Keil, wie er durch die Figur 217 dargestellt ist, kann man nach der Erkl. 645 als ein Ponton betrachten, in welchem die obere Grundfläche auf eine Linie reduziert ist.

Setzt man in die in der Erkl. 641 aufgestellte Kubikinhaltsformel für ein Ponton:

$$V = H\left(\frac{A+a}{2}\cdot\frac{B+b}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{A-a}{2}\cdot\frac{B-b}{2}\right)$$

$B = s$

und

$b = o$

so erhält man hiernach für das Volumen $V$ jenes Keils:

**Auflösung.** Betrachtet man den in der Aufgabe gegebenen, durch die Figur 217 dargestellten Keil nach der Erkl. 645 als ein Ponton, in welchem die obere Fläche auf eine Linie reduziert ist, so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ desselben nach der in der Erkl. 647 aufgestellten Formel 2):

$$1) \;\ldots\; x = \frac{\overline{JG}\cdot\overline{GF}}{6}(2\cdot\overline{AB}+\overline{BC})$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass sich aus dem bei $J$ rechtwinkligen Dreieck $GJK$ für die Länge $JG$ des Keils die Relation ergibt:

$$2) \;\ldots\; \overline{JG} = \sqrt{\overline{GK}^2 - \overline{JK}^2}$$

und dass

$$\overline{GK} = c$$

$$\overline{BC} = b$$

$$\overline{JK} = \frac{\overline{LK}}{2} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\overline{GF} = s$$

und

$$\overline{AB} = a$$

gemäss der Aufgabe gesetzt werden kann, so erhält man aus den Gleichungen 1) und 2):

$$x = \frac{\sqrt{c^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}{6}\cdot s(2\cdot a+b)$$

oder

$$\text{A)}\; x = \frac{s}{6}(2a+b)\cdot\sqrt{\left(c+\frac{b}{2}\right)\left(c-\frac{b}{2}\right)}$$

$$V = H\left(\frac{A+a}{2}\cdot\frac{s+o}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{A-a}{2}\cdot\frac{s-o}{2}\right)$$

oder

$$V = H\left(\frac{A+a}{2}\cdot\frac{s}{2}+\frac{1}{3}\frac{A-a}{2}\cdot\frac{s}{2}\right)$$

1) $V = \frac{Hs}{2}\left(\frac{A+a}{2}+\frac{1}{3}\frac{A-a}{2}\right)$

in welcher Formel $H$ die sogenannte Länge, $A$ und $a$ die Seiten des rechteckigen Rückens und $s$ die Länge der Schneide des Keils bedeutet.

Vorstehende Formel 1) kann man auch noch wie folgt reduzieren:

$$V = \frac{Hs}{2}\left(\frac{3A+3a}{6}+\frac{A-a}{6}\right)$$

$$V = \frac{Hs}{2}\cdot\frac{4A+2a}{6}; \quad V = \frac{Hs}{2}\cdot\frac{2A+a}{3}$$

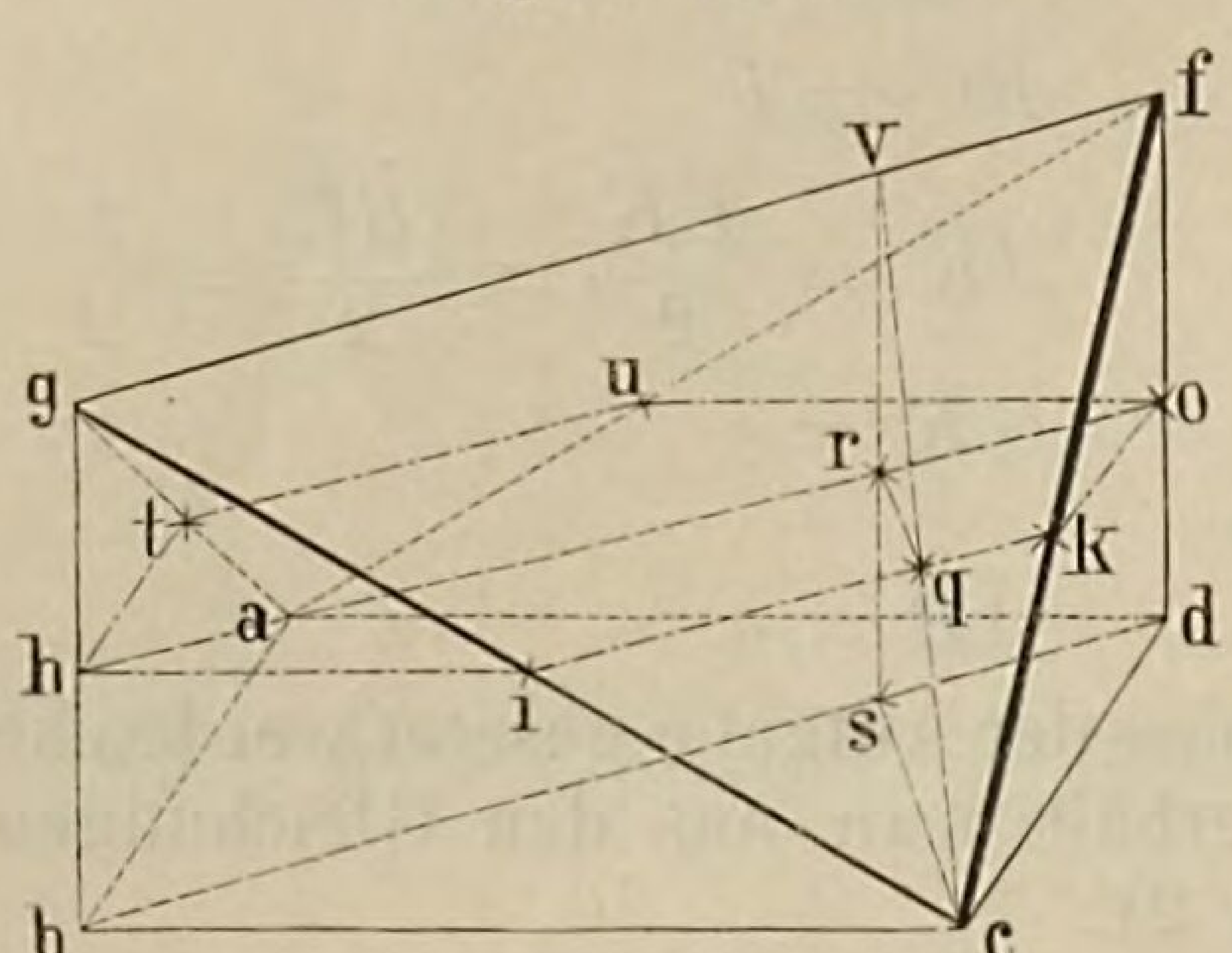
und man erhält die einfachere Formel:

2) . $V = \frac{Hs}{6}(2A+a)$

---

**Aufgabe 709.** Auf der Ebene eines Rechtecks, dessen Seiten $m$ und $n$ gegeben sind, seien in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten senkreckte Gerade von gleicher Länge $p$ errichtet und die Endpunkte dieser Geraden seien miteinander und mit den beiden andern Eckpunkten des Rechtecks verbunden. Man berechne das Volumen des Keils, dessen Kanten diese Verbindungslinien und die Seiten des Rechtecks sind.

Figur 218.




**Erkl. 648.** Ein Keil oder ein Prismatoid von der durch die Figur 218 dargestellten Form führt den Namen „Sphenisk“.

**Erkl. 649.** Zur Bestimmung des Inhalts $D$ der mittleren Durchschnittsfigur des Keils $fgbcd$ in Figur 218 denke man sich durch die Mitte der Höhe $bg$ (oder $df$) eine Ebene

**Formel:**

Für ein Prismatoid:

$$V = \frac{H}{6}(G+4D+g) \text{ (s. Erkl. 594).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 218, $abcd$ das Rechteck, dessen Seiten mit $m$ und $n$ gegeben sind und man errichtet in $b$ und $d$ die Senkrechten $bg$ und $df$, macht dieselben $= p$, verbindet dann $g$ mit $a$ und $c$, und $f$ mit $a$ und $c$, so erhält man das Kantennetz des Keils oder des Spheniskes $fgabcd$ (s. Erkl. 645 und 648), dessen Schneide die Linie $gf$ ist.

Zur Bestimmung des gesuchten Volumens $x$ dieses Keils denke man sich durch die parallelen Senkrechten $bg$ und $df$ eine Ebene $fgbd$ gelegt, wodurch der Keil in die zwei, an Inhalt gleichen Keile $fgbcd$ und $fgbad$ zerlegt wird. Jeden dieser Keile kann man nach der Erkl. 645 als ein Prismatoid betrachten, in welchem die obere Grundfläche auf die Linie $fg$ reduziert ist; zur Berechnung eines jeden dieser Keile, z. B. des Keils $fgbcd$, dient daher vorstehende Formel:

$$V = \frac{H}{6}(G+4D+g)$$

parallel zu $bcda$ gelegt. Diese Ebene schneidet den Keil in dem || tr. $hiko$. In demselben ist:

$$ho \# fg \# bd$$

und $ik \# \frac{1}{2} fg$, also auch $= \frac{1}{2} \overline{bd}$

Ferner ist die Höhe $\overline{rq}$ dieses Paralleltrapezes $\# \frac{1}{2} sc$, also nach der Erkl. 650 auch

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{bc}}{\overline{bd}} \cdot \overline{cd}$$

wenn $\overline{sc}$ die von $c$ auf $\overline{bd}$ gefällte Senkrechte ist.

Für den Inhalt $D$ des || trs. $hiko$ hat man somit:

$$D = \frac{\overline{ho} + \overline{ik}}{2} \cdot \overline{rq}$$

oder

$$D = \frac{\overline{bd} + \frac{1}{2}\overline{bd}}{2} \cdot \frac{\overline{bc} \cdot \overline{cd}}{2 \cdot \overline{bd}}$$

oder

$$D = \frac{3}{4} \overline{bd} \cdot \frac{\overline{bc} \cdot \overline{cd}}{2 \cdot \overline{bd}}$$

$$D = \frac{3}{8} \overline{bc} \cdot \overline{cd}$$

oder wenn man $\overline{bc} = m$ und $\overline{cd} = n$ setzt:

$$D = \frac{3}{8} m \cdot n$$

**Erkl. 650.** Für den Inhalt $J$ des Rechtecks $bcda$ in Figur 218 hat man einmal:

$$\text{a)} \ldots J = \overline{bc} \cdot \overline{cd}$$

ferner hat man aber auch, wenn $cs$ die Höhe des bei $c$ rechtwinkligen Dreiecks $bcd$ darstellt für diesen Inhalt $J$:

$$\text{b)} \ldots J = 2 \cdot \frac{\overline{bd} \cdot \overline{sc}}{2}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$2 \cdot \frac{\overline{bd} \cdot \overline{sc}}{2} = \overline{bc} \cdot \overline{cd}$$

oder

$$1) \ldots sc = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{cd}}{\overline{bd}}$$

**Erkl. 651.** Bezeichnet man die Seiten der rechteckigen Grundfläche eines durch die Fig. 218 dargestellten Spheniskes (s. Erkl. 648), bezw. mit $a$ und $b$, die Höhe dieses Körpers mit $H$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$V = \frac{2}{3} a \cdot b \cdot H$$

Setzt man in derselben:

$$H = \overline{bg} = \overline{df} = p$$

$$G = \triangle\, bcd = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{cd}}{2} = \frac{m \cdot n}{2}$$

$g =$ der Linie $fg = 0$

und

$$D = \text{J. des} \parallel \text{trs.}\, hiko = \frac{3}{8} m \cdot n \quad \text{(siehe Erkl. 649)}$$

so erhält man hiernach für das gesuchte Volumen $x$ des ganzen durch die Fig. 218 dargestellten Keils:

$$x = 2 \cdot \frac{p}{6}\left(\frac{m \cdot n}{2} + 4 \cdot \frac{3}{8} m \cdot n + 0\right)$$

oder

$$x = \frac{p}{3}\left(\frac{m \cdot n}{2} + \frac{3m \cdot n}{2}\right)$$

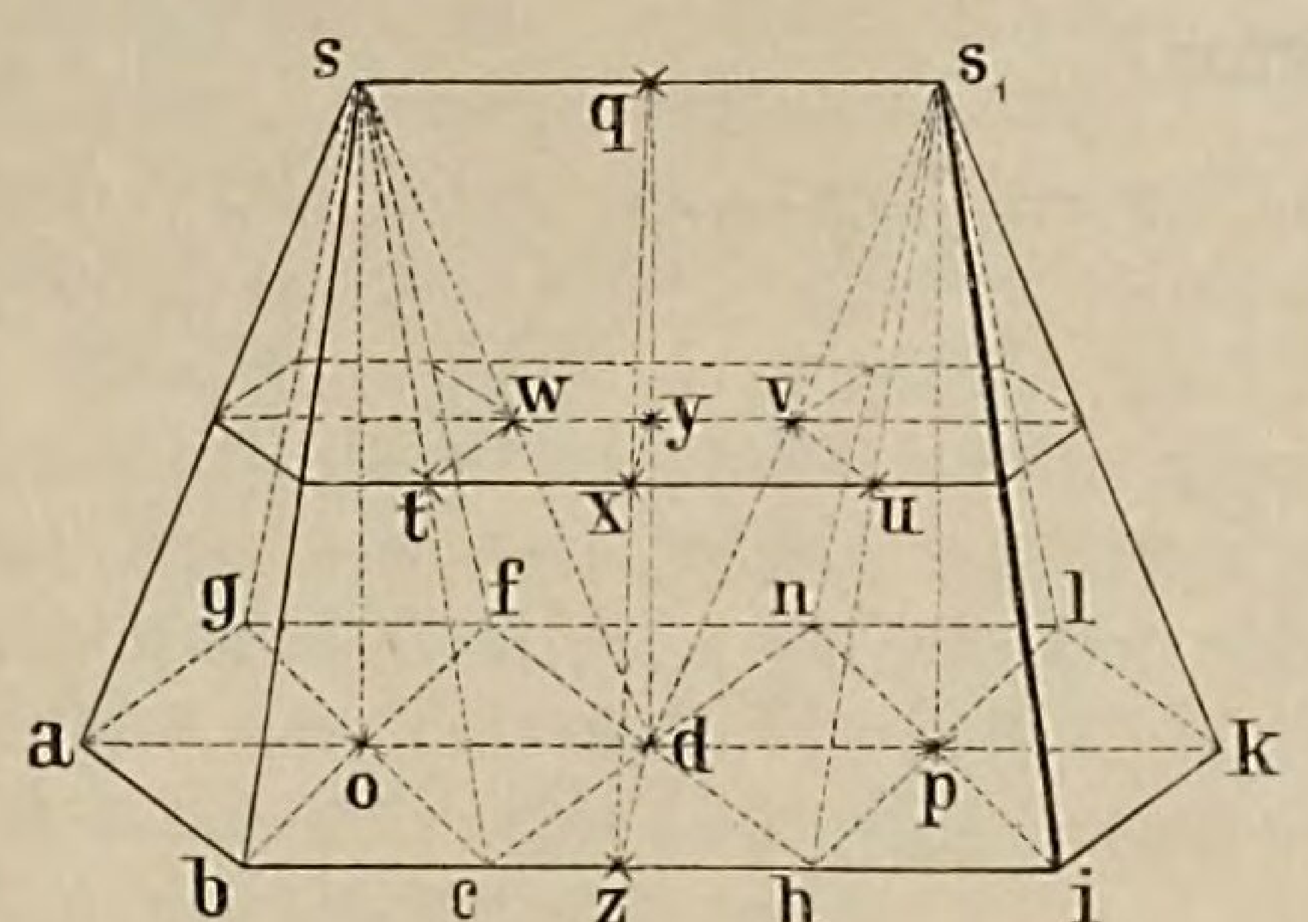
$$x = \frac{p}{3} \cdot 2 \cdot m \cdot n$$

mithin

$$\text{A)} \;.\; x = \frac{2}{3} \cdot p \cdot m \cdot n$$

**Aufgabe 710.** Zwei gerade, regelmässige, sechsseitige Pyramiden mit gleichen Höhen und gleichen Grundflächen stehen so auf derselben Ebene, dass ihre Grundflächen mit einem Eckpunkt aneinander stossen und zwei parallele Seiten der einen in den Verlängerungen entsprechender Seiten der andern liegen. Durch jede dieser Seiten und die beiden Spitzen der Pyramiden lässt sich eine Ebene legen, und diese Ebenen schliessen mit je zwei äusseren Seitenflächen der beiden Pyramiden und der Ebene der Grundflächen einen Körper ein, dessen Volumen aus der Grundkante $m$ und der Höhe $H$ einer jener Pyramiden berechnet werden soll.

Figur 219.




**Erkl. 652.** In der Figur 219 ist das Dreieck $cdh$ ein gleichseitiges, wie leicht einzusehen ist, indem:

$$\overline{dc} = \overline{dh} = \overline{ch} = m \text{ ist.}$$

Für den Inhalt $J$ desselben hat man somit:

$$J = \frac{m^2}{4}\sqrt{3}$$

**Erkl. 653.** Zur Bestimmung des Inhalts $D$ der mittleren Durchschnittsfigur $tuvw$ des Keils $ss_1dch$ in der Figur 219 beachte man, dass deren Ebene die Höhe $dq$ halbiert und dass dieselbe ein || tr. ist, in welchem

a) $\overline{vw} \# \frac{1}{2}\overline{ss_1} \# \frac{1}{2}\overline{op} \# \overline{od}$ (oder $\# \overline{dp}$)

also auch $= m$ ist

in welchem ferner:

b) $\overline{tu} = \frac{\overline{ss_1} + \overline{ch}}{2}$ als Mittellinie der Paralleltrapeze $ss_1hc$

$$= \frac{\overline{op} + \overline{ch}}{2} = \frac{2 \cdot \overline{dp} + \overline{dp}}{2} = \frac{3 \cdot \overline{dp}}{2} = \frac{3}{2}m$$

**Formel:**

Für ein Prismatoid:

$$V = \frac{H}{6}(G + HD + g)$$

(s. Erkl. 594).

**Auflösung.** Sind, siehe Figur 219, $sabcdfg$ und $s_1dhikln$ die zwei gegebenen, kongruenten, geraden, sechsseitigen Pyramiden, und liegen deren Grundflächen $abcdfg$ und $dhikln$ so in einer Ebene, dass sie den Eckpunkt $d$ gemeinsam haben und dass die parallelen Seiten $bc$ und $gf$ je mit einer der parallelen Seiten $hi$ und $nl$ in einer Geraden liegen, dann ist die Verbindungslinie $ss_1$ der beiden Pyramidenspitzen parallel und gleich der Centrallinie $op$ und auch parallel den durch $bc$ und $hi$, bezw. durch $gf$ und $nl$ gehenden Geraden. Denkt man sich nunmehr durch die Parallelen $ss_1$ und $bi$, ebenso durch die Parallelen $ss_1$ und $gl$ je eine Ebene gelegt, so schliessen diese Ebenen mit den Seitenflächen $sag$, $sab$, $s_1ik$ und $s_1kl$ der Pyramiden und der Figur $abiklg$ einen Körper ein, den man als ein Prismatoid betrachten kann, dessen obere Grundfläche auf die Linie $ss_1$ reduziert ist.

Will man das gesuchte Volumen $x$ des Prismatoids $ss_1lgabik$ berechnen, so könnte man direkt vorstehende Formel benutzen, man kann sich aber auch in bequemerer Weise dieses Prismatoid zusammengesetzt denken aus den Pyramiden $sabcdfg$ und $s_1dhikln$ und aus den beiden kongruenten Keilen $ss_1dch$ und $ss_1dnf$.

Da man nun für das Volumen $V$ eine Pyramide, deren Grundfläche ein reguläres Sechseck mit der Seite $m$ und deren Höhe $= H$ ist, wie schon in früheren Aufgaben gezeigt wurde:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{m^2}{4}\sqrt{3} \cdot H$$

ist und in welchem

c) $\overline{xy} = \frac{1}{2}\overline{dz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \sqrt{3} = \frac{m}{4} \sqrt{3}$ ist,

indem $\overline{dz}$ als Höhe des gleichseitigen Dreiecks $dch$ mit der Seite $m = \frac{m}{2} \sqrt{3}$ ist (s.Erkl.25).

Für den Inhalt $D$ des Paralleltrapezes $tuvw$ besteht somit die Relation:

$$D = \frac{\overline{vw} + \overline{tu}}{2} \cdot xy$$

oder

$$D = \frac{m + \frac{3}{2} m}{2} \cdot \frac{m}{4} \sqrt{3}$$

mithin

$$1) \ldots D = \frac{5m^2}{16} \sqrt{3}$$

oder

$$V = \frac{m^2}{2} \cdot H \cdot \sqrt{3}$$

erhält und da sich ferner für das Volumen $V_1$ eines jener Keile, z. B. des Keils $ss_1dch$ nach vorstehender Formel, wenn man in derselben

$$H = \overline{dq} = \overline{os} = H$$

$$G = \triangle\, dch = \frac{m^2}{4} \sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 652)}$$

$$g = \text{der Linie } ss_1 = 0 \text{ (als Fläche)}$$

und

$$D = \frac{5}{16} m^2 \sqrt{3} \quad \text{(s. Erkl. 653)}$$ setzt

$$V_1 = \frac{H}{6}\left(\frac{m^2}{4} \sqrt{3} + 4 \cdot \frac{5}{16} m^2 \sqrt{3} + 0\right)$$

oder

$$V_1 = \frac{1}{4} \cdot H \cdot m^2 \cdot \sqrt{3}$$

ergibt, so erhält man für das gesuchte Volumen des durch die Figur 219 dargestellten prismatoidischen Körpers $ss_1 lgabik$:

$$x = 2 \cdot \frac{m^2}{2} \cdot H \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot m^2 \cdot H \cdot \sqrt{3}$$

oder

$$\text{A)}\; x = \frac{3}{2} \cdot m^2 \cdot H \cdot \sqrt{3}$$

---

**Aufgabe 711.** Denkt man sich durch eine Diagonale der oberen Grundfläche eines geraden, quadratischen Prismas zwei Ebenen gelegt, welche zwei gegenüberliegende Seitenkanten in gleicher Höhe über der Grundfläche schneiden, so entsteht ein Körper, welchen man a). als Differenz des Prismas und zweier von dem Prisma abgeschnittenen, dreiseitigen Pyramiden oder b). als Summe zweier dreiseitiger Prismenstumpfe oder c). als Summe eines quadratischen Prismas und eines Keils betrachten kann. Welchen Ausdruck erhält man für das Volumen dieses Körpers, wenn die Grundkante des Prismas $= m$, die Höhe $= H$ ist und jene Schnittebenen die zwei betreffenden Seitenkanten im Abstande $p$ über der Grundfläche durchschneiden?

**Formeln:**

Für ein Prisma:

$$\text{I.} \ldots V = G \cdot H \quad \text{(s. Erkl. 541)}$$

Für eine Pyramide:

$$\text{II.} \ldots V = \frac{G \cdot H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 532)}$$

Für ein gerades, dreiseitiges, schief abgeschnittenes Prisma:

$$\text{III.} \ldots V = G \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad \text{s.Erkl.547).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 220, $abcdfghi$ das gegebene, gerade, quadratische Prisma und sind $acn$ und $ack$ die Schnittfiguren, welche man erhält, wenn man durch die Diagonale $ac$ zwei Ebe-

nen gelegt denkt, welche die gegenüberliegenden Seitenkanten $bh$ und $df$ in den gleichen Entfernungen $nh$ und $kf$ über der Grundfläche $fghi$ schneiden, so erhält man den Körper $acghif$, dessen Volumen $x$ man gemäss der Aufgabe auf folgende drei Arten berechnen kann:

1). Das Volumen $x$ des Körpers $acghif$ ist gleich dem Volumen des Prismas $abcdfghi$ weniger der Summe der Volumen der beiden kongruenten, dreiseitigen Pyramiden $dakc$ und $banc$.

Da nun der Inhalt der Grundfläche $fghi$, welche ein Quadrat mit der Seite $m$ ist $= m^2$ und die Höhe $bh$ des Prismas $= H$ ist, so hat man für das Volumen $V$ des Prismas:

a) . . . $V = m^2 \cdot H$

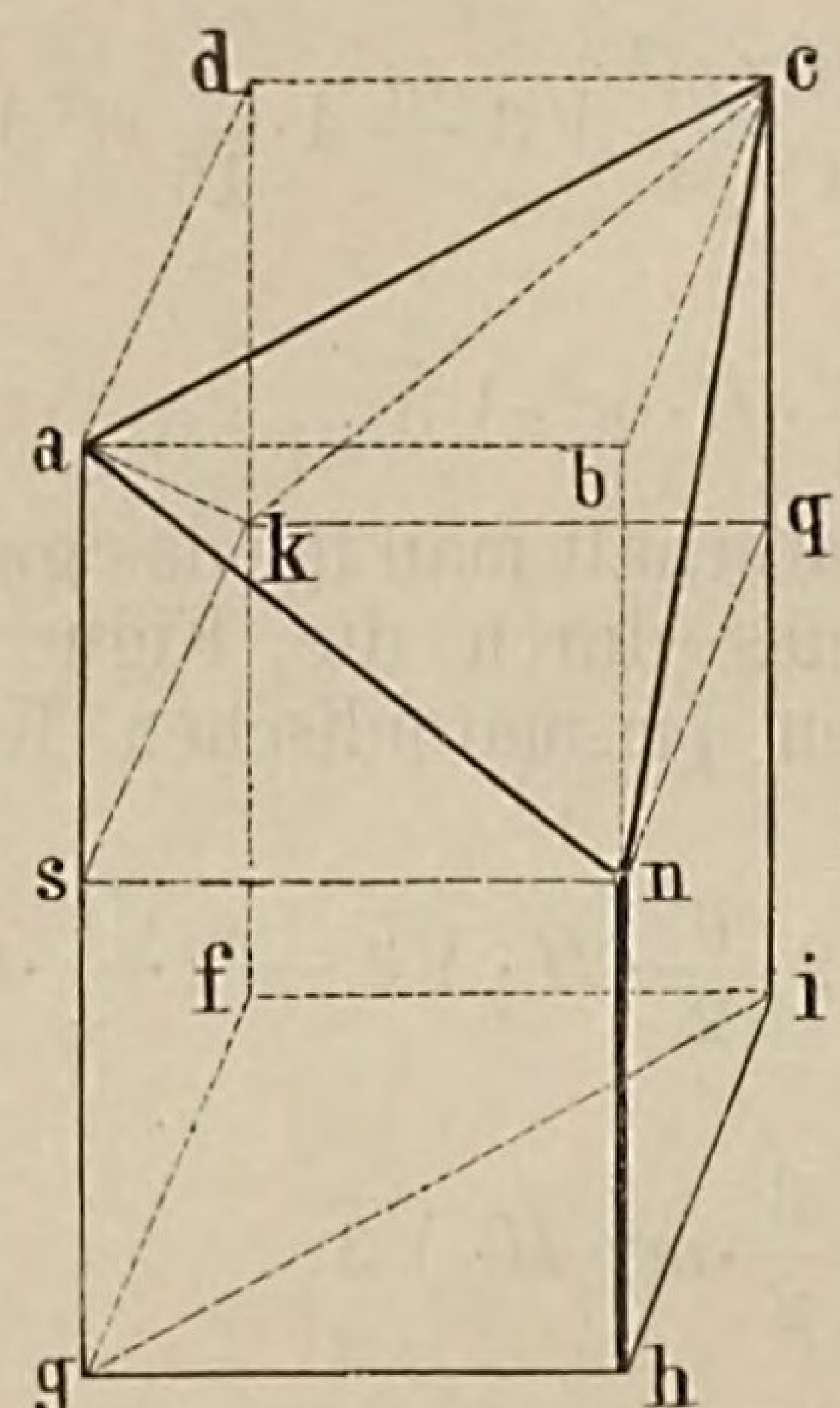
Betrachtet man ferner $bnc$ als Grundfläche und $a$ als die Spitze der dreiseitigen Pyramide $abnc$ und berücksichtigt man, dass der Inhalt der Grundfläche $bnc = \frac{\overline{bn} \cdot \overline{bc}}{2} = \frac{(H - p) \cdot m}{2}$ (indem $\overline{nh} = p$, $\overline{bh} = H$ und $\overline{bc} = m$ ist) und dass die Höhe $\overline{ab}$ der Pyramide $= m$ ist, so erhält man für das Volumen $V_1$ der Pyramide $banc$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(H - p)\, m^2}{2} \cdot m$$

oder

b) . . . $V_1 = \frac{(H - p)\, m^2}{6}$

Figur 220.




Für das gesuchte Volumen $x$ des Körpers $acifgh$ hat man also:

$$x = m^2 \cdot H - 2 \cdot \frac{(H - p)\, m^2}{6}$$

oder

$$x = m^2 \left( H - \frac{H - p}{3} \right)$$

mithin

A) . . . $x = \frac{1}{3}\, m^2 (2H + p)$

2). Denkt man sich durch die Seitenkanten $ag$ und $ci$ eine Ebene gelegt, so wird der Körper $acifgh$ in die beiden kongruenten, dreiseitigen, geraden und schief abgeschnittenen Prismen $ancigh$ und $akcifg$ zerlegt.

Zur Berechnung des Volumens eines solchen dient vorstehende Formel III, setzt man in derselben:

$$G = \triangle ghi = \frac{m^2}{2}$$

$$k_1 = \overline{ag} = H$$

$$k_2 = \overline{nh} = p$$

und

$$k_3 = \overline{ci} = H$$

so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Körpers $acifgh$:

$$x = 2 \cdot \frac{m^2}{2} \cdot \frac{H + p + H}{3}$$

oder

B) . . . $x = \frac{1}{3} m^2 (2H + p)$

nämlich dasselbe Resultat wie unter A).

3). Denkt man sich durch $k$ und $n$ eine zu der Grundfläche des Prismas parallele Ebene gelegt, so wird der Körper $acifgh$ in das gerade Prisma $snqkfghi$ und in den Keil (Sphenisk, siehe Erkl. 648) $acqksn$ zerlegt.

Da man nun für das Volumen $V_1$ des Prismas $snqkfghi$ nach vorstehender Formel I, wenn man für den Inhalt der Grundfläche $ghif = m^2$ und für die Höhe $\overline{hn} = p$ setzt:

c) . . . $V_1 = m^2 \cdot p$

hat und da man ferner für das Volumen $V_2$ des Keils, Spheniskes $acqksn$ nach der in der Erkl. 651 aufgestellten Formel, wenn man in derselben:

$$a = b = m$$

und

$$H = (H - p)$$

setzt:

d) . . . $V_2 = \frac{2}{3} \cdot (H - p) \cdot m^2$ hat,

so erhält man für das gesuchte Volumen $x$ des Körpers $acifgh$:

$$x = m^2 \cdot p + \frac{2}{3}(H - p) m^2$$

oder

$$x = m^2 \left(p + \frac{2}{3} H - \frac{2}{3} p\right)$$

mithin

C) . $x = \frac{1}{3} m^2 (2H + p)$

nämlich dasselbe Resultat wie unter A) und B).

---

## b). Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 712.** Man berechne nach der Kubikinhaltsformel für ein Prismatoid das Volumen eines regulären Oktaeders mit der Kante $k$, unter Berücksichtigung, dass man jedes reguläre Oktaeder als ein Prismatoid betrachten kann, dessen Grundflächen und Seitenflächen sämtlich kongruente, gleichseitige Dreiecke sind.

**Andeutung.** Die Aufgaben 712 bis 727 sind analog den gelösten Aufgaben 693 bis 711 zu lösen.

---

**Aufgabe 713.** Von einem geraden, sechsseitigen, regulären Prisma kennt man die Grund-

kante $m$ und die Höhe $H$. Denkt man sich durch die Diagonalen der oberen Grundfläche Schnittebenen so gelegt, dass jede derselben eine Seitenkante des Prismas in gleicher Höhe von der Grundfläche durchschneidet, so entsteht ein prismatischer Körper mit pyramidalischer Zuspitzung; wie gross ist das Volumen dieses Körpers?

---

**Aufgabe 714.** Zwei kongruente Quadrate, deren Ebenen parallel sind, haben zu einander eine solche symmetrische Lage, dass die Ecken derselben in ihren Horizontalprojektionen ein reguläres Achteck bilden. Jeder Eckpunkt des einen Quadrats ist mit den Endpunkten derjenigen Seite des andern Quadrats, welche jener Ecke zunächst liegt, verbunden und hierdurch ist das Kantennetz eines zehnflächigen Körpers, eines sogenannten, vierseitigen Antiprismas mit quadratischen Grundflächen gebildet. Man berechne aus der Seite $m$ jener Quadrate und dem senkrechten Abstand $H$ derselben das Volumen dieses Antiprismas.

---

**Aufgabe 715.** Zwei kongruente Rechtecke, deren Ebenen parallel sind, haben zu einander eine solche Lage, dass eine Seite des einen einer Diagonale des andern parallel ist. Jeder Eckpunkt des einen Rechtecks ist mit den Endpunkten derjenigen Seite des andern Rechtecks, welche jener Ecke zunächst liegt, verbunden und hierdurch ist das Kantennetz eines zehnflächigen Körpers, eines vierseitigen Antiprismas mit rechteckigen Grundflächen gebildet. Man berechne aus den Seiten $m$ und $n$ jener Rechtecke und dem senkrechten Abstand $H$ derselben das Volumen dieses Antiprismas.

---

**Aufgabe 716.** Schneidet man mittels zweier parallelen Ebenen zwei diametral gegenüberliegende Ecken eines Würfels so ab, dass die Schnittfläche gleichseitige Dreiecke sind, und denkt man sich jeden Eckpunkt der einen dieser Schnittflächen mit zweien entsprechende Eckpunkten der andern dieser Schnittflächen verbunden, so bilden diese Verbindungslinien mit jenen Schnittflächen das Kantennetz eines dreiseitigen Prismatoids. Denkt man sich nun von dem übrig gebliebenen Teil des Würfels dieses Prismatoid herausgenommen, so bleibt ein ausgehöhlter Körper übrig, dessen Volumen berechnet werden soll und zwar aus der Kante $k$ des Würfels.

---

**Aufgabe 717.** Denkt man sich die Mitten der Seiten der oberen Grundfläche eines geraden, dreiseitigen Prismas verbunden und durch die Ecken der unteren Grundfläche Parallelen zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten gezogen, so erhält man zwei Dreiecke, deren Seiten bezw. parallel sind und welche man als die Grundflächen einer dreiseitigen, abgestumpften Pyramide betrachten kann. Denkt man sich ferner jeden Eckpunkt der oberen Grundfläche dieses

Pyramidenstumpfs mit zwei entsprechenden Eckpunkten der unteren Grundfläche des Prismas verbunden, so bilden diese Verbindungslinien mit diesen beiden Grundflächen das Kantennetz eines dreiseitigen Prismatoids, welches zugleich der dem Prisma und dem *Pyramidenstumpf* gemeinsame Körper ist. In welchem Verhältnis steht nun das Volumen des Körpers, welcher übrig bleibt, wenn man aus dem Pyramidenstumpf jenes Prismatoid herausgenommen denkt, zu dem Volumen des Prismas?

---

**Aufgabe 718.** Aus einer Kugel mit dem Radius $r = 8$ dm sei eine Kugelschicht so herausgeschnitten, dass der Kugelmittelpunkt zwischen den Endflächen derselben liegt und dass seine Entfernungen von denselben bezw. $p = 2^1/_2$ und $q = 3^3/_4$ dm betragen. In jene beiden Endflächen sind Rechtecke konstruiert, deren Seiten sich wie $2:3$ verhalten und welche eine solche Lage zu einander haben, dass die kürzeren Seiten des einen Rechtecks parallel den längeren Seiten des andern Rechtecks sind. Wie gross ist das Volumen desjenigen Obelisken, welchem diese Rechtecke als Grundfläche angehören und dessen Höhe gleich dem senkrechten Abstand derselben ist?

---

**Aufgabe 719.** Jedes dreiseitig schief abgeschnittene Prisma kann man als ein Prismatoid, speziell als einen Obelisken betrachten, dessen untere Grundfläche eine der Seitenflächen des Prismas und dessen obere Grundfläche auf eine Linie reduziert ist. Wie gross ist hiernach das Volumen eines solchen Prismas, wenn die Seitenkanten des Prismas $k_1$, $k_2$, $k_3$ und der Inhalt $N$ des Normalschnitts gegeben sind?

---

**Aufgabe 720.** Schneidet man von einem $\|$ppd. mittels einer zur Grundfläche schiefen Ebene ein Stück desselben ab, so kann man das übrig gebliebene Stück als einen vierseitigen Obelisken betrachten, dessen Grundflächen die übrig gebliebenen Teile zweier paralleler Seitenflächen des $\|$ppds. sind und dessen Höhe gleich dem senkrechten Abstand desselben ist. Wie gross ist das Volumen dieses übrig gebliebenen Stücks, wenn die Längen der übrig gebliebenen Seitenkanten des $\|$ppds. bezw. $= a$, $b$, $c$ und $d$ sind und der Inhalt des Normalschnitts des $\|$ppds. $= N$ ist?

---

**Aufgabe 721.** Ein Prismatoid, bezw. ein sogenannter Antiobelisk mit der Höhe $H$ haben zur Grundfläche Quadrate. Die Seiten des kleineren dieser Quadrate sind den Diagonalen des grösseren Quadrats, dessen Seite $= m$ ist, parallel und halb so lang als diese. Wie gross ist das Volumen dieses Prismatoids, wenn die sämtlichen Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind, bezw. sämtliche Seitenkanten gleich lang sind.

---

**Aufgabe 722.** Wie gross ist das Volumen eines Prismatoids, bezw. eines Antiobelisken mit der Höhe $H$, wenn die untere Grundfläche desselben ein Quadrat mit der Seite $m$ ist und wenn die Seiten der oberen Grundfläche den Diagonalen der unteren Grundfläche parallel und halb so gross als die Seiten dieser Grundfläche sind? Sämtliche Seitenkanten des Prismas sollen gleich lang sein.

**Aufgabe 723.** Man berechne das Volumen eines Antiobelisken, dessen Grundflächen Quadrate mit den Seiten $m$ und $n$ sind, dessen Höhe $= H$ ist und bei welchem die Seiten der oberen Grundfläche parallel den Diagonalen der unteren Grundfläche und sämtliche Seitenkanten gleich lang sind.

**Aufgabe 724.** Die Höhe $H$ eines Pontons ist 10 dm, die Seiten $A$ und $B$ der unteren Grundfläche sind bezw. = 20 u. 16 dm, die Seiten $a$ und $b$ der oberen Grundfläche bezw. = 8 und 4 dm. Wie gross ist das Volumen desselben?

**Aufgabe 725.** Die Grundfläche eines Keils mit der Höhe $H$ sei eine Raute mit den Diagonalen $a$ und $b$ ($a > b$). Wie gross ist das Volumen desselben, wenn die Schneide parallel der Diagonale $a$ ist und die Länge $s$ hat?

**Aufgabe 726.** Legt man durch eine Körperdiagonale eines regulären Oktaeders mit der Kante $k$ eine Ebene, so wird das Oktaeder in zwei Keile zerlegt, deren Schneiden parallel jener Ebene sind. Wie gross ist das Volumen eines solchen Keils?

**Aufgabe 727.** Errichtet man in den Endpunkten einer Diagonale eines Quadrats mit der Seite $a$ zwei Senkrechte auf die Ebene dieses Quadrats, macht dieselben $= b$ und verbindet die Endpunkte dieser Senkrechten unter sich und mit den übrigen Ecken des Quadrats, so erhält man das Kantennetz eines Keils. Wie gross ist das Volumen dieses Keils?

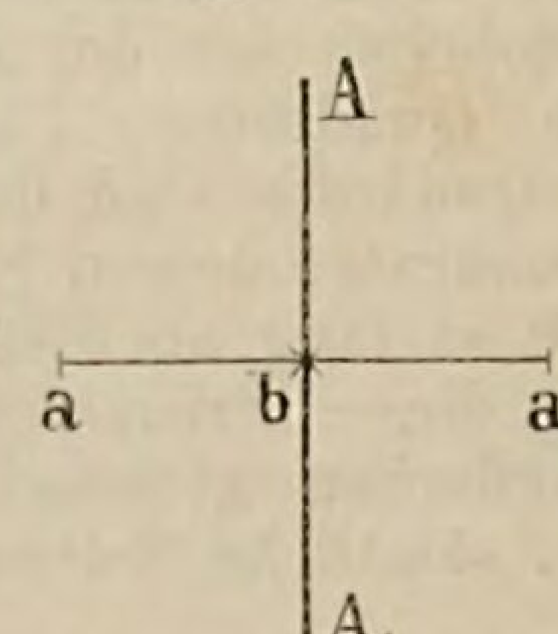
# XII.

# Ueber die Berechnung der Rotationsflächen und Rotationskörper.

## a). Ueber die Rotationsflächen und Rotationskörper im allgemeinen.

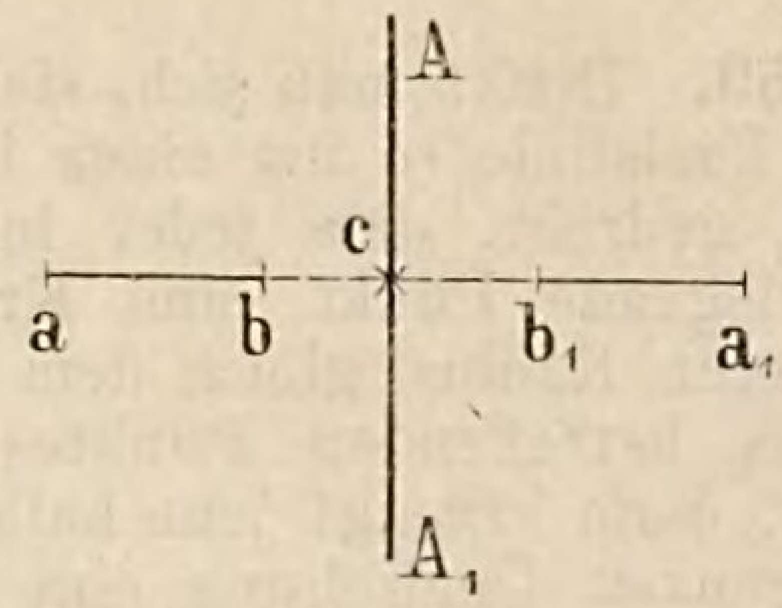
**Erkl. 654.** Denkt man sich, siehe Fig. 221, eine Strecke $ab$ (eine beiderseits begrenzte Gerade), so um eine durch einen ihrer Endpunkte gehende, zu ihr senkrechten und in derselben Ebene liegende Gerade $AA_1$ gedreht, dass jeder in der Strecke $ab$ liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich der senkrechten Entfernung des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugt jene Strecke bei einer ganzen Umdrehung eine Kreisfläche.

Figur 221.



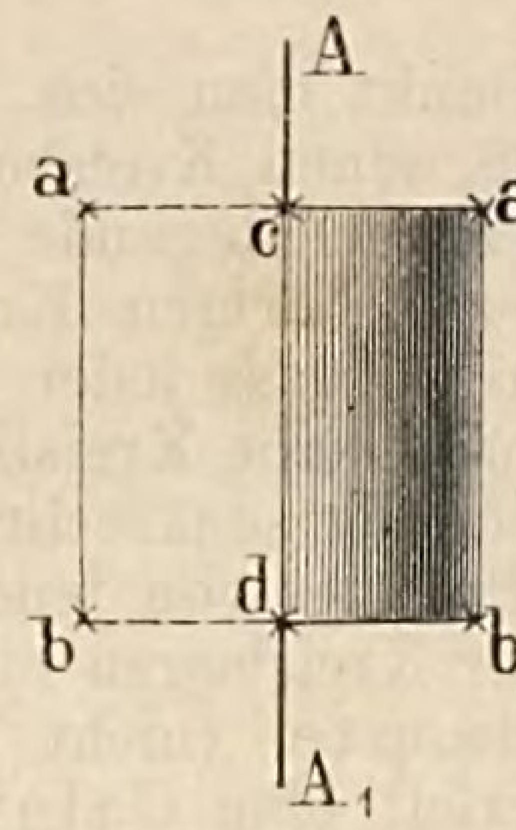
**Erkl. 655.** Denkt man sich, siehe Figur 222, eine Strecke $ab$ so um eine zu ihr senkrechten und in derselben Ebene liegende Gerade $AA_1$ gedreht, dass jeder in der Strecke $ab$ liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich der senkrechten Entfernung des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugte jene Strecke bei einer ganzen Umdrehung eine konzentrische Kreis-Ringfläche.

Figur 222.



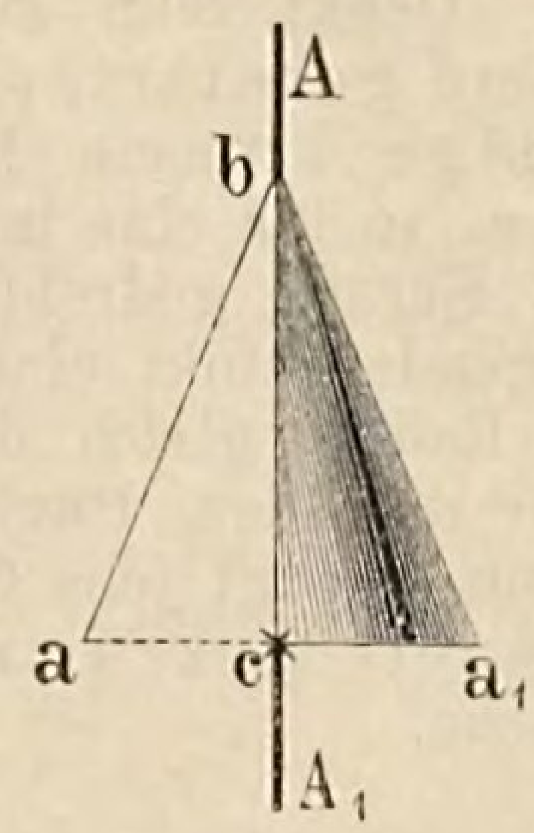

**Erkl. 656.** Denkt man sich, siehe Figur 223, eine Strecke $ab$ so um eine zu ihr parallelen und in derselben Ebene liegende Gerade $AA_1$ gedreht, dass jeder in der Strecke $ab$ liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich dem senkrechten Abstand des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugt jene Strecke bei einer ganzen Umdrehung eine sogenannte einfach gekrümmte (abwickelbare) Fläche, hier speziell Kreis-Cylinderfläche.

Figur 223.



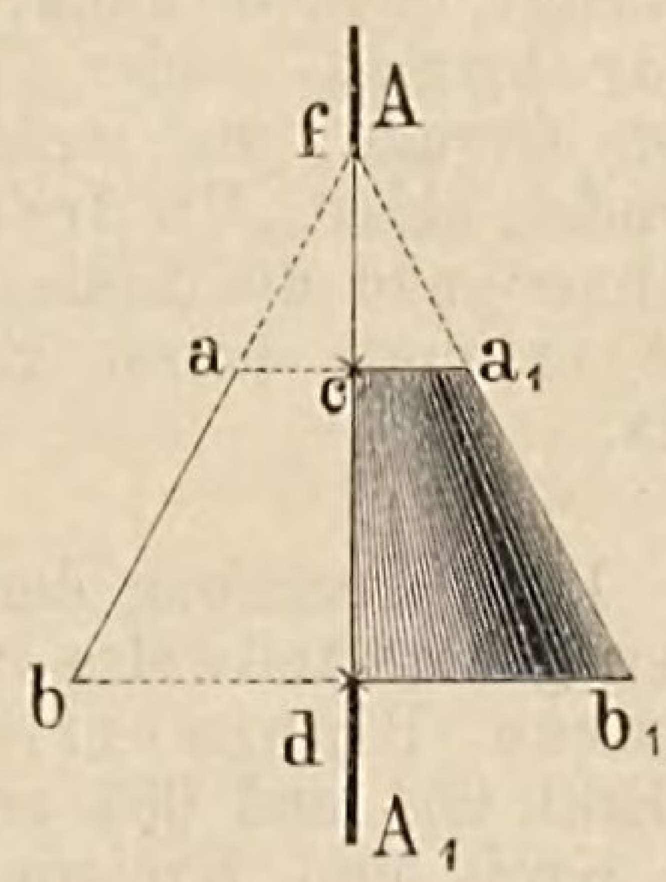

**Erkl. 657.** Denkt man sich, siehe Figur 224, eine Strecke $ab$ so um eine durch einen ihrer Endpunkte gehende, zu ihr schiefen und in derselben Ebene liegende Gerade $AA_1$ gedreht, dass jeder in der Strecke $ab$ liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich dem senkrechten Abstand des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugt jene Strecke bei einer ganzen Umdrehung eine sogenannte einfach gekrümmte (abwickelbare) Fläche, hier speziell eine sogenannte Kreis-Kegelfläche.

Figur 224.



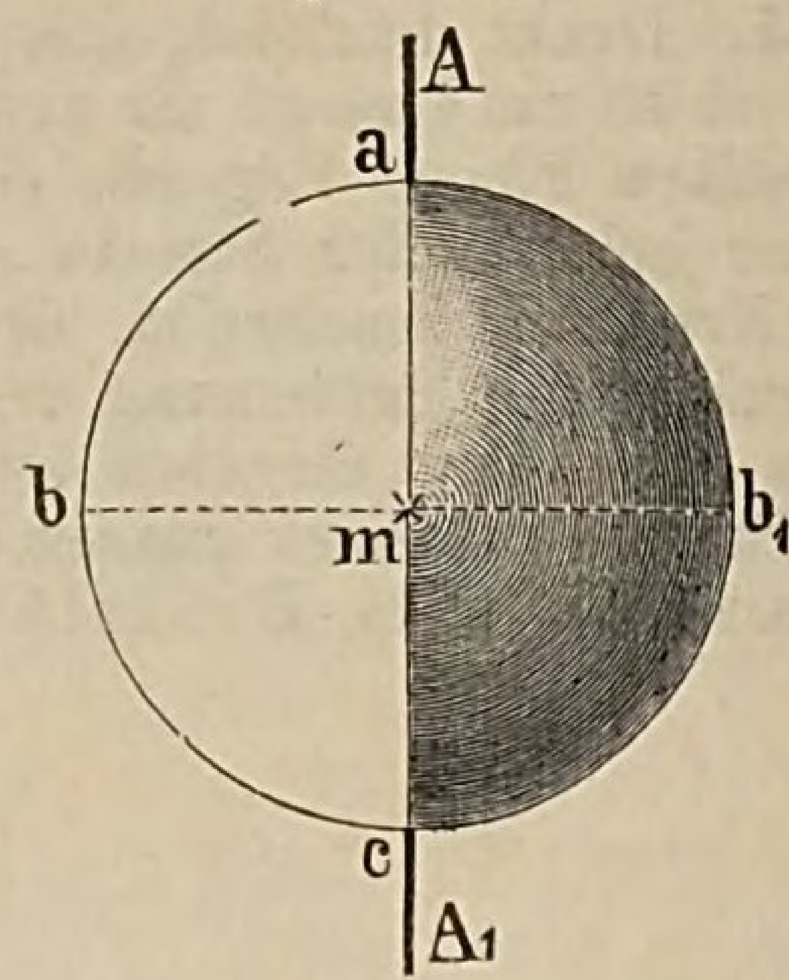

**Erkl. 658.** Denkt man sich, siehe Figur 225, eine Strecke $ab$ so um eine zu ihr schiefen und in derselben Ebene liegende Gerade $AA_1$ gedreht, dass jeder in der Strecke $ab$ liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich dem senkrechten Abstand des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugt jene Strecke bei einer ganzen Umdrehung eine sogenannte einfach gekrümmte (abwickelbare) Fläche, hier speziell eine Kegelstumpffläche.

Figur 225.



**Erkl. 659.** Denkt man sich, siehe Fig. 226, eine halbe Kreislinie so um einen ihrer Durchmesser $AA_1$ gedreht, dass jeder in der halben Kreislinie liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich dem senkrechten Abstand des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugt jene halbe Kreislinie bei einer ganzen Umdrehung eine sogenannte doppelt gekrümmte (nicht abwickelbare) Fläche, hier speziell eine sogenannte Kugelfläche.

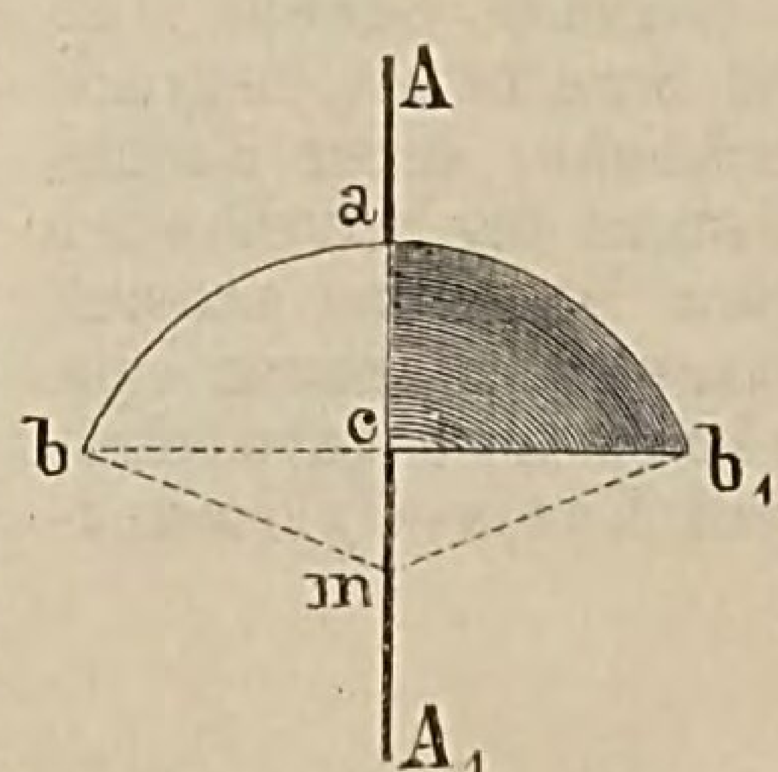
Figur 226.



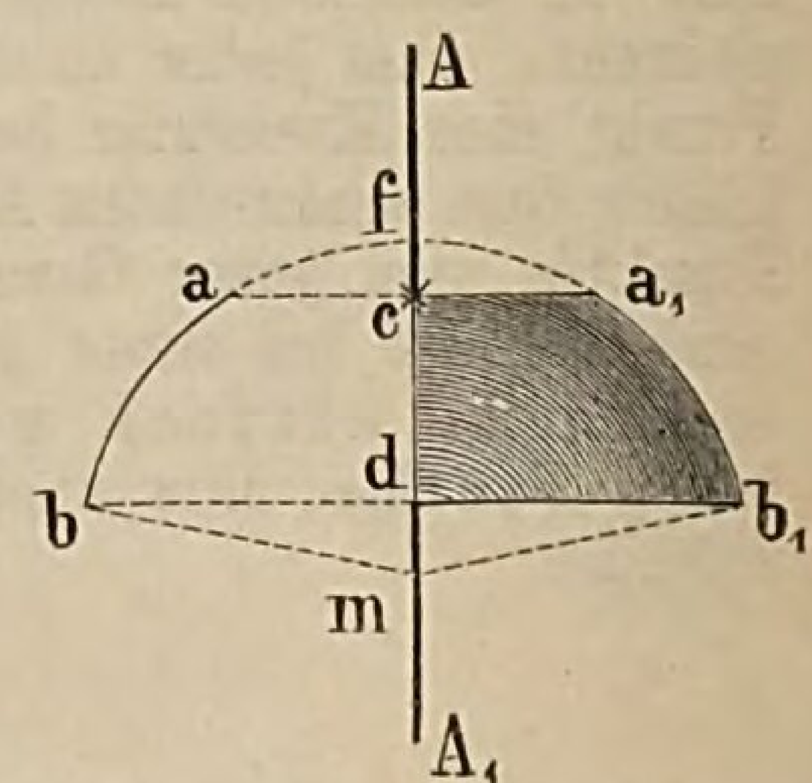

---

**Erkl. 660.** Denkt man sich, siehe die Figuren 227 und 228, einen Kreisbogen $ab$ so um eine in derselben Ebene liegende und durch den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises gehende Gerade $AA_1$ gedreht, dass jeder in dem Kreisbogen liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich der senkrechten Entfernung des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugt jener Kreisbogen eine sogenannte doppelt gekrümmte (nicht abwickelbare) Fläche, hier speziell eine Calotte oder eine Kugelzone, und zwar je nachdem die Gerade $AA_1$ durch einen Endpunkt des Kreisbogens geht, wie in der Fig. 227, oder nicht, wie in der Fig. 228,

Figur 227.




Figur 228.




---

**Erkl. 661.** Denkt man sich allgemein irgend eine andere gesetzmässige oder auch ungesetzmässige krumme Linie, eine sogenannte Curve, so um eine in der Ebene derselben liegende Gerade gedreht, dass jeder in jener Curve liegende Punkt eine Kreislinie beschreibt, deren Radius gleich dem senkrechten Abstand des betreffenden Punktes von jener Geraden ist, dann erzeugt jene Curve stets eine sogenannte doppelt gekrümmte (nicht abwickelbare) Fläche.

---

**Erkl. 662.** Solche Flächen, welche man sich, wie in den vorstehenden Erklärungen 654 bis 661 erwähnt, durch Umdrehung (bezw. Rotation) von geraden oder krummen Linien um in den Ebenen derselben liegenden Geraden als Drehachsen erzeugt denken kann, führen den Namen „Umdrehungs- oder Rotationsflächen“. Die Gerade, um welche die Umdrehung stattfindet, heisst „Umdrehungs- oder Rotationsachse“ und die Linie, welche eine Rotationsfläche erzeugt, heisst Erzeugende oder Generatrix.

---

**Erkl. 663.** Die Berechnung der Inhalte von Rotationsflächen gehört teilweise in das Gebiet der elementaren Planimetrie, wie z. B. die nach den Erkl. 654 und 655 erzeugten Rotationsflächen: Kreis und Kreisring; teilweise in das Gebiet der elementaren Stereometrie, wie z. B. die nach den Erkl. 656 bis 660

erzeugten Rotationsflächen: Cylinderfläche, Kegelfläche (Kegelstumpffläche), Kugelfläche, Zone und Calotte; und teilweise in das Gebiet der analytischen Geometrie des Raumes, bezw. in das Gebiet der Mechanik, wie z. B. die nach der Erkl. 661 erzeugten Rotationsflächen, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, dass nach denselben Regeln, nach welchen die Inhaltsberechnungen der nach der Erkl. 661 erzeugten Rotationsflächen vorgenommen werden, auch die Inhalte sämtlicher übrigen, nach den Erkl. 654 bis 660 erzeugten Rotationsflächen berechnet werden können.

---

**Erkl. 664.** Ist die Lage der Drehachse zu der eine Rotationsfläche erzeugenden Linie eine solche, dass sie diese Erzeugende in zwei gleiche Teile teilt, und dass beide Teile zur Drehachse eine symmetrische Lage haben, dann ist zur Erzeugung jener Rotationsfläche nur eine halbe Umdrehung der Erzeugenden um die Drehachse erforderlich, indem jeder Teil der Erzeugenden gleichzeitig die Hälfte der betreffenden Rotationsfläche erzeugt.

Geht z. B. die Drehachse durch den Mittelpunkt einer ganzen Kreislinie, so teilt dieselbe diese ganze Kreislinie in zwei gleiche und zu jener Drehachse symmetrisch liegende Teile und jeder dieser Teile erzeugt bei einer halben Umdrehung die Hälfte einer Kugelfläche.

---

**Erkl. 665.** Denkt man sich irgend eine ebene, gerad-, krumm- oder gemischtlinige Figur, Erzeugungsfigur oder Rotationsfigur genannt, so um eine in der Ebene derselben, aber ausserhalb der Figur selbst liegende Gerade, Umdrehungs- od. Rotationsachse genannt, gedreht, dass sämtliche in der Ebene jener Figur liegende Punkte parallele Kreislinien beschreiben, deren Radien bezw. gleich den senkrechten Entfernungen dieser Punkte von jener Rotationsachse sind, so beschreibt der Umfang jener Figur irgend eine oder mehrere zusammenhängende Rotationsflächen, durch welche ein Raum vollständig begrenzt wird und einen solchen vollständig begrenzten Raum nennt man einen „Umdrehungs- oder Rotationskörper“.

---

**Erkl. 666.** Je nach der Art der Figur, welche durch Rotation um eine in ihrer Ebene liegende Gerade als Drehachse, einen Rotationskörper erzeugt, kann man in bezug auf die Praxis im allgemeinen folgende fünf Fälle unterscheiden:

1. die Erzeugungsfigur ist eine geradlinige, d. h. sie wird nur von geraden Linien begrenzt;
2. die Erzeugungsfigur ist ein Kreis;
3. die Erzeugungsfigur ist gemischtlinig, wird aber nur von geraden Linien und von Kreisbögen begrenzt, die eine solche Lage zur Drehachse haben, dass

die Mittelpunkte der zugehörigen Kreise in der Drehachse liegen;
4. die Erzeugungsfigur ist krumm- oder gemischtlinig, wird aber nur, ganz oder teilweise, von solchen krummen Linien begrenzt, die zu den gesetzmässigen Curven gehören;
5. die Erzeugungsfigur ist krumm- oder gemischtlinig, wird aber, ganz oder teilweise, von solchen krummen Linien begrenzt, die keine gesetzmässigen, also willkürliche (beliebige) Curven sind.

---

**Erkl. 667.** Ist die Lage der Drehachse zu der einen Rotationskörper erzeugenden Figur eine solche, dass sie dieselbe in zwei kongruente Teile teilt und dass beide Teile zur Drehachse eine symmetrische Lage haben, dann ist zur Erzeugung jenes Rotationskörpers nur eine halbe Umdrehung der Erzeugungsfigur erforderlich, indem jeder der beiden kongruenten und symmetrisch liegenden Teile der Erzeugungsfigur gleichzeitig die Hälfte des Rotationskörpers erzeugt.

Geht z. B. die Drehachse durch die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks oder durch die Mittellinie eines Parallelogramms oder durch den Durchmesser eines Kreises, so teilt diese jede dieser Figuren in zwei kongruente und zu jener Drehachse symmetrisch liegende Teilfiguren und jede dieser Teilfiguren erzeugt bei einer halben Umdrehung die Hälfte des betreffenden Rotationskörpers.

---

**Erkl. 668.** Die Berechnung der Volumen von Rotationskörpern gehört teilweise in das Gebiet der elementaren Körperberechnung, wie z. B. die Berechnung solcher Rotationskörper, welche man sich mittels der in der Erkl. 666 unter 1. bis 3. erwähnten Erzeugungsfiguren erzeugt denken kann, indem man die Berechnung solcher Körper, wie in den nachfolgenden Aufgaben 728 bis 735 gezeigt wird, auf die der einfachen geometrischen Körper zurückführen kann; und teilweise in das Gebiet der analytischen Geometrie des Raumes, bezw. in das Gebiet der Mechanik, wie z. B. die Berechnung solcher Rotationskörper, welche man sich mittels der in der Erkl. 666 unter 4. und 5. erwähnten Erzeugungsfiguren erzeugt denken kann. Hierbei sei nicht unbemerkt, dass nach denselben Regeln, nach welchen die Kubikinhaltsbestimmungen der zuletzt erwähnten Rotationskörper vorgenommen werden, auch die der zuerst erwähnten Rotationskörper vorgenommen werden kann.

---

**Erkl. 669.** Was die Berechnung der Oberflächen und Teile der Oberflächen von Rotationskörpern anbetrifft, so ist zu beachten, dass die Gesamtoberfläche eines Rotationskörpers aus der Summe der Inhalte, der bei der Rotation durch die Begrenzungslinien (Konturen) der Erzeugungsfigur erzeugten Rotationsflächen

besteht und dass in bezug auf die Berechnung der Rotationsflächen das Nähere in der Erkl. 663 ausgesagt ist.

---

**Erkl. 670.** Die Berechnung der Rotationskörper kann im allgemeinen auf drei Arten erfolgen und zwar:

1. durch Zurückführung der betreffenden Rotationskörper auf einfache geometrische Körper, bezw. durch Zerlegung der betreffenden Rotationskörper in einfache geometrische Körper (Schichtenzerlegung, Kegelstumpfe etc.);
2. durch Benutzung der sogen. Guldinschen Regeln (siehe die Erkl. 707) und
3. durch Benutzung der sogen. Simpsonschen Regeln (siehe die Erkl. 738).

Je nach den gegebenen und je nach den gesuchten Stücken eines Rotationskörpers wird man eine oder die andere dieser drei Arten anwenden. Siehe die folgenden drei Abschnitte.

---

## b). Gelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern durch Zurückführung auf die einfachen geometrischen Körper.

**Aufgabe 728.** Ein Rechteck habe die Seiten $a$ und $b$. Wie gross ist

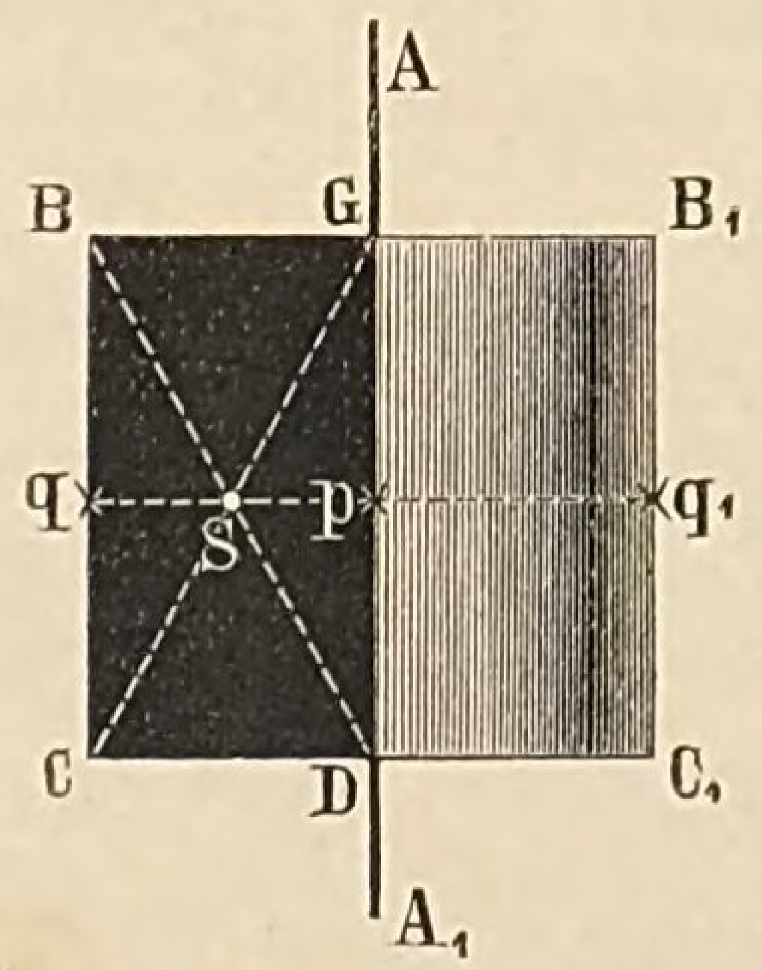
a) das Volumen

und

b) die krumme Begrenzungsfläche

des Rotationskörpers, welcher durch Rotation jenes Rechtecks um seine Seite $b$, als Drehachse, entsteht?

Figur 229.




**Erkl. 671.** Zerlegt man die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung A), wie folgt:

$$1) \ldots V = 2\frac{a}{2}\pi \cdot ab$$

und setzt für

$a \cdot b = \overline{CD} \cdot \overline{DG} = F$, nämlich den Flächeninhalt $F$ des Rechtecks $BCDG$

**Formeln:**

Für einen Cylinder:

I. . . . $V = R^2\pi \cdot H$ (s. Erkl. 33)

II. . . . $M = 2R\pi \cdot H$ (s. Erkl. 47).

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 229, $BCDG$ das gegebene Rechteck, welches um die Seite $GD = b$ rotiert, so erzeugt dasselbe bei einer ganzen Umdrehung einen geraden Kreiscylinder, dessen Höhe $= GD = b$ und dessen Grundflächenradius $= CD = a$ ist. Für das gesuchte Volumen $V$ dieses durch Rotation entstandenen Cylinders hat man somit nach vorstehender Formel I:

A) . . . $V = a^2\pi \cdot b$ (s. Erkl. 671)

Für den Inhalt $M$ der krummen Begrenzungsfläche des nach vorstehendem, durch Rotation entstandenen, geraden Kreiscylinders, hat man ferner nach vorstehender Formel II:

B) . . . $M = 2a\pi \cdot b$ (s. Erkl. 676).

und für

$$\frac{a}{2} = \frac{\overline{CD}}{2} = \overline{qp} = \overline{Sp} = s,$$ nämlich die Entfernung $s$ des Schwerpunkts $S$ des Rechtecks $BCDG$ von der Drehachse $DG$ (siehe Erkl. 672 bis 675)

so geht vorstehende Gleichung 1) über in:

2) . . . $V = 2s\pi \cdot F$

Berücksichtigt man nunmehr, dass $2s\pi$ die Länge (der Umfang) der Kreislinie ist, welche der Schwerpunkt $S$ des Rechtecks $BCDG$, dessen Inhalt $F$ ist, bei der Rotation beschreibt, so kann man sagen:

„Das Volumen des durch Rotation des Rechtecks $BCDG$ in Figur 229 erzeugten Rotationskörpers (geraden Kreiscylinders) ist gleich der Anzahl von Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $S$ des erzeugenden Rechtecks $BCDG$ bei der Rotation zurücklegt mit dem Flächeninhalt $F$ jenes Rechtecks (jener Erzeugungsfigur) multipliziert. (Siehe die Erkl. 678, 683, 700. 703, 707 u. 710)

**Erkl. 672.** Von einem sogen. Schwerpunkt kann man im Grunde genommen nur bei Körpern sprechen (siehe die Erkl. 673), indem man unter dem „Schwerpunkt“ denjenigen Punkt eines Körpers versteht, in welchem man sich das Gewicht der ganzen Masse eines Körpers konzentriert denken kann und der die Eigenschaft hat, dass wenn er unterstützt (oder auf andere Weise befestigt) wird, hierdurch der Schwerkraft der Erde, welche auf die ganze Körpermasse wirkt, das Gleichgewicht gehalten wird.

Siehe Kleyers Lehrbuch der Mechanik.

**Erkl. 673.** Von einem sog. Schwerpunkt bei Flächen (Figuren) und Linien kann man nur in sofern sprechen, als man sich erstere als unendlich dünne homogene, materielle Schichten, letztere als unendlich schmale Teile einer solchen Schicht denkt.

**Erkl. 674.** Unter einer sog. Schwerlinie versteht man eine jede Linie, auf welcher der Schwerpunkt eines Körpers oder einer Fläche (beziehw. einer Figur) liegen muss. Mit dem Durchschnittspunkt zweier Schwerlinien einer Fläche (bezw. einer Figur) ist der Schwerpunkt dieser Fläche bestimmt.

**Erkl. 675.** Da in jedem Parallelogramm die Diagonalen Schwerlinien desselben sind, so ist nach der Erkl. 674 der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen eines jeden Parallelogramms der Schwerpunkt desselben (siehe Kleyers Lehrbuch der Mechanik). Da nun jede Höhe eines Parallelogramms von dem Durchschnittspunkt der Diagonalen desselben halbiert wird, so kann man sagen:

„Die Entfernung des Schwerpunktes eines Parallelogramms von einer Seite desselben ist gleich der halben der zu dieser Seite gehörigen Höhe des Parallelogramms.“

Bezeichnet man allgemein mit $h$ eine der Höhen eines Parallelogramms, mit $s$ die Entfernung des Schwerpunktes von einer der zu dieser Höhe gehörigen Grundlinien des Parallelogramms, so besteht die Relation:

$$1) \ldots s = \frac{1}{2} h$$

**Erkl. 676.** Aus der in umstehender Auflösung entwickelten Gleichung B):

$$1) \ldots M = 2a\pi \cdot b$$

ergibt sich, wenn man die Länge der Strecke $\overline{BC}$ anstatt mit $b$, mit $L$, die Entfernung $\overline{qp}$ ($= \overline{CD} = a$) des Mittelpunkts, beziehungsweise des Schwerpunkts $q$ der Strecke $BC$ (siehe Erkl. 677), von der Drehachse $AA_1$ anstatt mit $a$, mit $s$ bezeichnet, und $M = F$ setzt:

$$F = 2s\pi \cdot L$$

und man kann sagen:

„Der Flächeninhalt der durch Rotation der Strecke $BC$ in Fig. 229 erzeugten Rotationsfläche ist gleich der Anzahl von Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt der erzeugenden Strecke $BC$ bei der Rotation zurücklegt mit der Länge $L$ jener Strecke (jener Erzeugenden) multipliziert (siehe die Erkl. 682, 686, 698, 708 und 710).

**Erkl. 677.** Der Schwerpunkt einer Strecke (einer beiderseits begrenzten Geraden) fällt mit dem Mittelpunkt derselben zusammen.

---

**Aufgabe 729.** Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Katheten $a$ und $b$. Wie gross ist:

a) das Volumen und

b) die krumme Begrenzungsfläche des Rotationskörpers, welcher durch Rotation jenes Dreiecks um seine Kathete $b$, als Drehachse, absteht?

**Formeln:**

Für einen Kegel:

$$\text{I.} \ldots V = \frac{R^2 \pi H}{3} \quad \text{(s. Erkl. 50)}$$

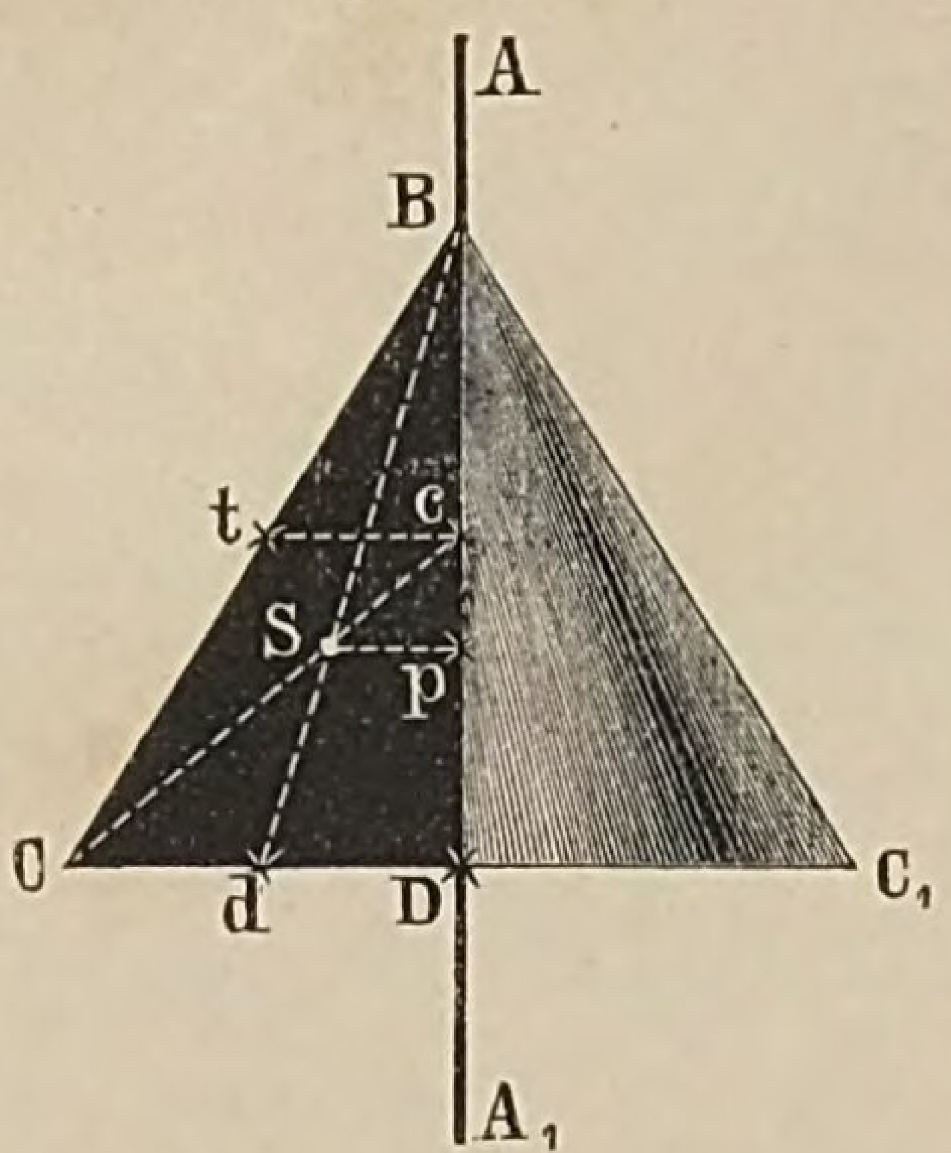
$$\text{II.} \ldots M = \pi \cdot R \cdot s \quad \text{(s. Erkl. 49).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 230, $BCD$ das gegebene, rechtwinklige Dreieck, welches um die Kathete $BD = b$ rotiert, so erzeugt dasselbe bei einer ganzen Umdrehung einen geraden Kreiskegel, dessen Höhe $BD = H$ und dessen Grundflächenradius $CD = a$ ist.

Für das gesuchte Volumen $V$ dieses durch Rotation entstandenen, geraden Kreiskegels hat man somit nach vorstehender Formel I:

$$\text{A)} \ldots V = \frac{a^2 \pi \cdot b}{3} \quad \text{(s. Erkl. 678).}$$

Figur 230.




**Erkl. 678.** Zerlegt man die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung A) wie folgt:

$$1) \ldots V = 2 \cdot \frac{a}{3} \pi \cdot \frac{ab}{2}$$

und setzt für:

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{DB}}{2} = F$$ nämlich den Flächeninhalt des Dreiecks $BCD$ (siehe Figur 230).

und für:

$$\frac{a}{3} = \frac{\overline{CD}}{3} = \overline{Sp} = s,$$ nämlich die Entfernung $s$ des Schwerpunkts $S$ des Dreiecks $BCD$ von der Drehachse $AA_1$ (s. Erkl. 679)

so geht jene Gleichung über in:

$$2) \ldots V = 2 s \pi \cdot F$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass $2s\pi$ die Länge (der Umfang) der Kreislinie ist, welche der Schwerpunkt $S$ des Dreiecks $BCD$, dessen Inhalt $= F$ ist, bei der Rotation beschreibt, so kann man sagen:

„Das Volumen des durch Rotation des Dreiecks $BCD$ in Figur 230 erzeugten Rotationskörpers (geraden Kreiskegels) ist gleich der Anzahl Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $S$ jenes Dreiecks bei der Rotation zurücklegt, mit dem Flächeninhalt $F$ jenes Dreiecks (jener Erzeugungsfigur) multipliziert" (siehe die Erkl. 671, 683, 700, 703, 707 u. 710).

**Erkl. 679.** Verbindet man in der Fig. 230 die Mitten $c$ und $d$ der Dreiecksseiten $BD$ und $CD$ mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks, so ist der Schnittpunkt $S$ dieser beiden Schwerlinien (s. Erkl. 680) der Schwerpunkt des Dreiecks, der die Schwerlinien $Bd$ und $Cc$ im Verhältnis von 1 : 2 teilt, d. h. so teilt, dass:

$$a) \ldots \overline{Sc} = \frac{1}{3} \overline{Cc} \text{ und } \overline{SC} = \frac{2}{3} \overline{Cc}$$

und dass

$$b) \ldots \overline{Sd} = \frac{1}{3} \overline{Bd} \text{ und } \overline{SB} = \frac{2}{3} \overline{Bd} \text{ ist.}$$

Für den Inhalt $M$ der krummen Begrenzungsfläche des nach vorstehendem durch Rotation entstandenen, geraden Kreiskegels hat man nach vorstehender Formel II, wenn man in derselben $R = \overline{CD} = a$ und
$$s = \overline{BC} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
setzt:

$$B) \ldots M = a\pi \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (s. Erkl. 682).}$$

Zieht man ferner $\overline{Sp} \perp AA_1$ bezw. $\parallel \overline{CD}$, so erhält man die ähnlichen Dreiecke $cDC$ und $cpS$ und aus diesen ergibt sich die Proportion:

c) . . . $\overline{Sp} : \overline{CD} = \overline{Sc} : \overline{Cc}$

da nun nach der Gleichung a):

$$\overline{Sc} = \frac{1}{3}\overline{Cc}$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus Gleichung c):

$$\overline{Sp} : \overline{CD} = \frac{1}{3}\overline{Cc} : \overline{Cc}$$

oder

d) . . . $\overline{Sp} : \overline{CD} = \frac{1}{3} : 1$

Setzt man $\overline{CD} = a$, so ergibt sich hiernach für die Entfernung $\overline{Sp} = s$ des Schwerpunktes $S$ von der Drehachse $AA_1$:

1) . . . $\overline{Sp} = s = \frac{1}{3} a$ (s. Erkl. 681).

**Erkl. 680.** Nach einem planimetrischen Satz schneiden sich die Verbindungslinien der Mitten der drei Seiten eines Dreiecks mit den denselben gegenüberliegenden Eckpunkten in einem Punkt und zwar im Verhältnis von 1 : 2, d. h. der gemeinschaftliche Schnittpunkt teilt jede der drei Verbindungslinien in zwei Abschnitte, von welchen der nach der betreffenden Seite zu liegende Abschnitt $= \frac{1}{3}$, der nach der betreffenden Ecke zu liegende Abschnitt $= \frac{2}{3}$ der betreffenden Verbindungslinie ist.

Diese Verbindungslinien sind die Schwerlinien des Dreiecks, und der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser Schwerlinien ist der Schwerpunkt des Dreiecks. (Siehe Kleyers Lehrbuch der Mechanik.)

**Erkl. 681.** Ist, siehe Figur 231, $ABC$ ein beliebiges Dreieck und sind $Bc$, $Ad$ und $Cf$ die Schwerlinien desselben, also ist $S$ der Schwerpunkt des Dreiecks, und man denkt sich die zu einer Dreiecksseite, z. B. zu $AC$ gehörige Höhe $BD$ gefällt, so ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $cDB$ und $cp$S, analog wie in der Erkl. 679, dass die Entfernung $\overline{Sp} = s$ des Schwerpunkts von der Dreiecksseite $AC$ gleich dem dritten Teil der zu dieser Seite gehörigen Höhe $\overline{BD}$ ist.

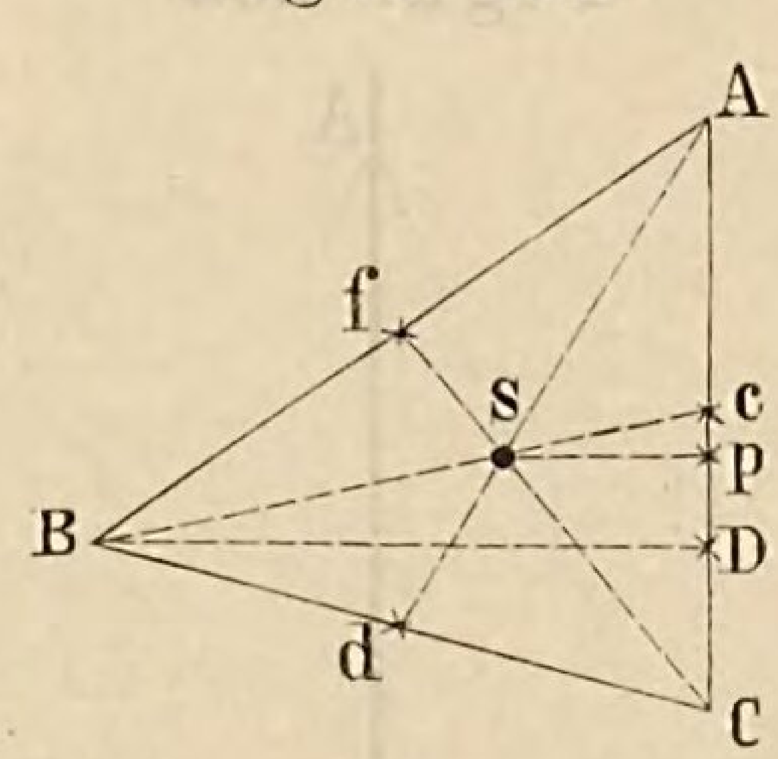
Bezeichnet man daher allgemein mit $h$ eine der Höhen eines Dreiecks, mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts von der zu jener Höhe $h$ gehörigen Grundlinie des Dreiecks, so hat man die Relation:

1) . . . $s = \frac{1}{3} h$

In dem rechtwinkligen Dreieck $BDC$, siehe Figur 230, ist z. B. $\overline{CD}$ ($= a$) die zu $BD$ gehörige Höhe, also ist nach vorstehender Relation:

$$\overline{Sp} = s = \frac{1}{3}\overline{CD} \text{ bezw.} = \frac{1}{3} a \quad \text{(s. Erkl. 679).}$$

Figur 231.



**Erkl. 682.** Aus der in nebenstehender Auflösung der Aufg. 729 entwickelten Gleichung B):

1) . . . $M = a\pi \sqrt{a^2 + b^2}$

ergibt sich, wenn man

$\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{BC}$ (s. Fig. 230)

und für die Länge der Strecke $\overline{BC} = L$ setzt:

2) . . . $M = a \cdot \pi L$

Ist ferner, s. Figur 230, $t$ der Mittelpunkt, bezw. der Schwerpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und ist $tc \parallel CD$, also $= \frac{1}{2}\overline{CD}$, und man setzt hiernach:

$a = \overline{CD} = 2 \cdot \overline{tm} = 2 \cdot s$

so geht, wenn ausserdem $M = F$ gesetzt wird, vorstehende Gleichung 2) über in:

3) . . . $F = 2 \cdot s \cdot \pi \cdot D$

und man kann sagen:

„Der Flächeninhalt der durch Rotation der Strecke $BC$ in Figur 230 erzeugten Rotationsfläche ist gleich der Anzahl von Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $t$ der Strecke $BC$ bei der Rotation zurücklegt, mit der Länge $L$ jener Strecke (der Erzeugenden) multipliziert.“ (Siehe die Erkl. 676, 685, 698, 708 und 710.)

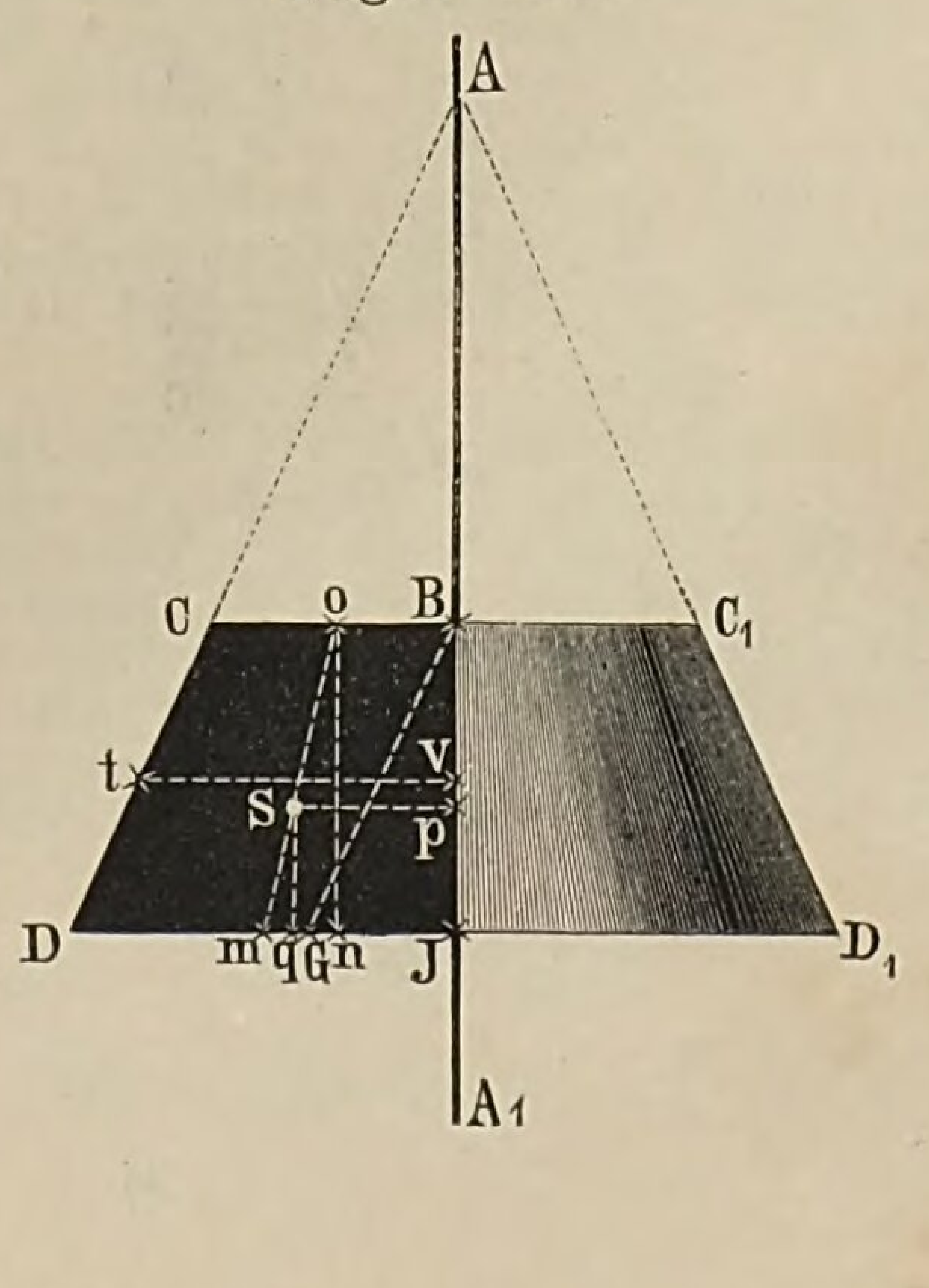
---

**Aufgabe 730.** Die parallelen Seiten eines Paralleltrapezes seien bezw. $= a$ und $b$; von den beiden nicht parallelen Seiten stehe die eine senkrecht zu den parallelen Seiten und habe die Länge $c$. Wie gross ist

a). das Volumen

und b). die krumme Begrenzungsfläche des Rotationskörpers, welcher durch Rotation jener Figur um die Seite $c$ als Drehachse entsteht?

Figur 232.




**Formeln:**

Für einen Kegelstumpf:

I. . . . $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

(siehe Erkl. 53)

II. . . . $M = \pi s (R + r)$

(siehe Erkl. 56).

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 232, $BCDJ$ das gegebene Paralleltrapez, welches um die Seite $BJ = c$ rotiert, so erzeugt dasselbe bei einer ganzen Umdrehung einen geraden Kreiskegelstumpf, dessen Höhe $= \overline{BJ} = c$ und dessen Grundflächenradien bezw. $= \overline{DJ} = a$ und $\overline{CB} = b$ sind.

Für das gesuchte Volumen $V$ dieses durch Rotation entstandenen Kreiskegelstumpfs hat man somit nach vorstehender Formel I:

A) . . . $V = \frac{\pi \cdot c}{3}(a^2 + ab + b^2)$

(siehe Erkl. 683).

Für den Inhalt $M$ der krummen Begrenzungsfläche des nach vorstehendem, durch Rotation entstandenen, geraden Kreiskegelstumpfs hat man nach vorstehender Formel II, wenn man in derselben:

**Erkl. 683.** Zieht man in der Figur 232 $Sq \parallel AA_1$, so ergibt sich aus dieser Figur für den senkrechten Abstand $\overline{Sp}$ des Schwerpunkts $S$ des Paralleltrapezes $BCDJ$ von der Drehachse $AA_1$ die Relation:

1) . . . $\overline{Sp} = \overline{mJ} - \overline{mq}$

oder, wenn man

a) . . . $\overline{mJ} = \frac{\overline{DJ}}{2} = \frac{a}{2}$

und nach der Erkl. 684:

b) . . . $\overline{mq} = \frac{(a-b)(a+2b)}{6(a+b)}$

setzt

$$\overline{Sp} = \frac{a}{2} - \frac{(a-b)(a+2b)}{6(a+b)}$$

oder

$$\overline{Sp} = \frac{3a(a+b)-(a-b)(a+2b)}{6(a+b)}$$

$$= \frac{3a^2+3ab-a^2+ab-2ab+2b^2}{6(a+b)}$$

$$= \frac{2a^2+2ab+2b^2}{6(a+b)}$$

mithin

2) . . . $\overline{Sp} = s = \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$

Formt man nun die in nebenstehender Auflösung ermittelte Gleichung A) wie folgt um:

$$V = \frac{\pi \cdot c}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)} \cdot 3(a+b)$$

oder

3) . . . $V = 2\pi \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot c$

und setzt nach vorstehender Gleichung 2) für $\frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$ den senkrechten Abstand $s$ des Schwerpunkts $S$ von der Drehachse $AA_1$ und für $\frac{a+b}{2} \cdot c$ den Inhalt $F$ des Paralleltrapezes $BCDJ$, so erhält man die Relation:

4) . . . $V = 2\pi s \cdot F$

und man kann sagen:

„Das Volumen des durch Rotation des Paralleltrapezes $BCDJ$ in Figur 232 erzeugten Rotationskörpers (geraden Kreiskegelstumpfs) ist gleich der Anzahl von Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $S$ jenes Paralleltrapezes bei der Rotation zurücklegt, mit dem Flächeninhalt $F$ jenes Paralleltrapezes (jener Erzeugungsfigur) multipliziert.“ (Siehe die Erkl. 671, 678, 700, 703, 707 und 710.)

**Erkl. 684.** Zieht man in der Figur 232 $on \parallel AA_1$, so erhält man die ähnlichen Dreiecke $mqS$ und $mno$. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke ergibt sich die Relation:

$$s = \overline{CD} = \overline{BG} = \sqrt{\overline{BJ}^2 + \overline{GJ}^2}$$

$$= \sqrt{\overline{BJ}^2 + (\overline{DJ} - \overline{DG})^2}$$

$$= \sqrt{\overline{BJ}^2 + (\overline{DJ} - \overline{CB})^2}$$

$$= \sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

$$R = \overline{DJ} = a$$

und $r = \overline{CB} = b$ setzt:

B) . . . $M = \pi \sqrt{h^2 + (a-b)^2} \cdot (a+b)$

(siehe Erkl. 686).

$$\overline{mq} : \overline{mn} = \overline{Sq} : \overline{on}$$

oder, wenn man

$$\overline{mn} = \overline{mJ} - \overline{nJ} = \overline{mJ} - \overline{oB} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

$$\overline{on} = \overline{BJ} = c$$

und nach der Erkl. 685:

$$\overline{Sq} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \text{ bezw. } = \frac{c}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$$

setzt und die so erhaltene Proportion nach $\overline{mq}$ aufgelöst:

$$\overline{mq} = \frac{c}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{a-b}{2c}$$

oder

$$1) \ldots \overline{mq} = \frac{(a-b)(a+2b)}{6(a+b)}$$

**Erkl. 685.** Bezeichnet man die beiden parallelen Seiten eines Paralleltrapezes bezw. mit $a$ und $b$ ($a > b$), die Höhe des Paralleltrapezes, d. i. der senkrechte Abstand jener beiden parallelen Seiten mit $h$ und die Entfernung des Schwerpunkts von der grösseren jener parallelen Seiten mit $s$, so besteht die Relation:

$$s = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der Mechanik.

**Erkl. 686.** Aus der in umstehender Auflösung enwickelten Gleichung B)

$$1) \ldots M = \pi \sqrt{h^2 + (a-b)^2} \cdot (a+b)$$

ergibt sich, wenn man:

$\sqrt{h^2 + (a-b)^2} = \overline{BG} = \overline{CD}$ (s. Figur 232), und für die Länge der Strecke $\overline{CD} = L$ setzt, und wenn man für $\frac{a+b}{2} = tv$ (siehe Fig. 232) $= s$ und für $M = F$ setzt:

$$F = \pi \cdot L \cdot 2 \cdot s$$

oder

$$2) \ldots F = 2s\pi \cdot L$$

und man kann sagen:

„Der Flächeninhalt der durch Rotation der Strecke $\overline{CD}$ in Figur 232 erzeugten Rotationsfläche ist gleich der Anzahl von Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $t$ der Strecke $\overline{CD}$ bei der Rotation zurücklegt, mit der Länge $L$ jener Strecke (der Erzeugenden) multipliziert. (Siehe die Erkl. 676, 682, 698, 708 und 710.)

---

**Aufgabe 731.** Wie gross ist die Oberfläche eines Rotationskörpers, der entsteht, wenn ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl um einen seiner grössten Durchmesser als Drehachse rotiert und wenn die Radien $R$ und $r$

**Formeln:**

Für einen Kegel:

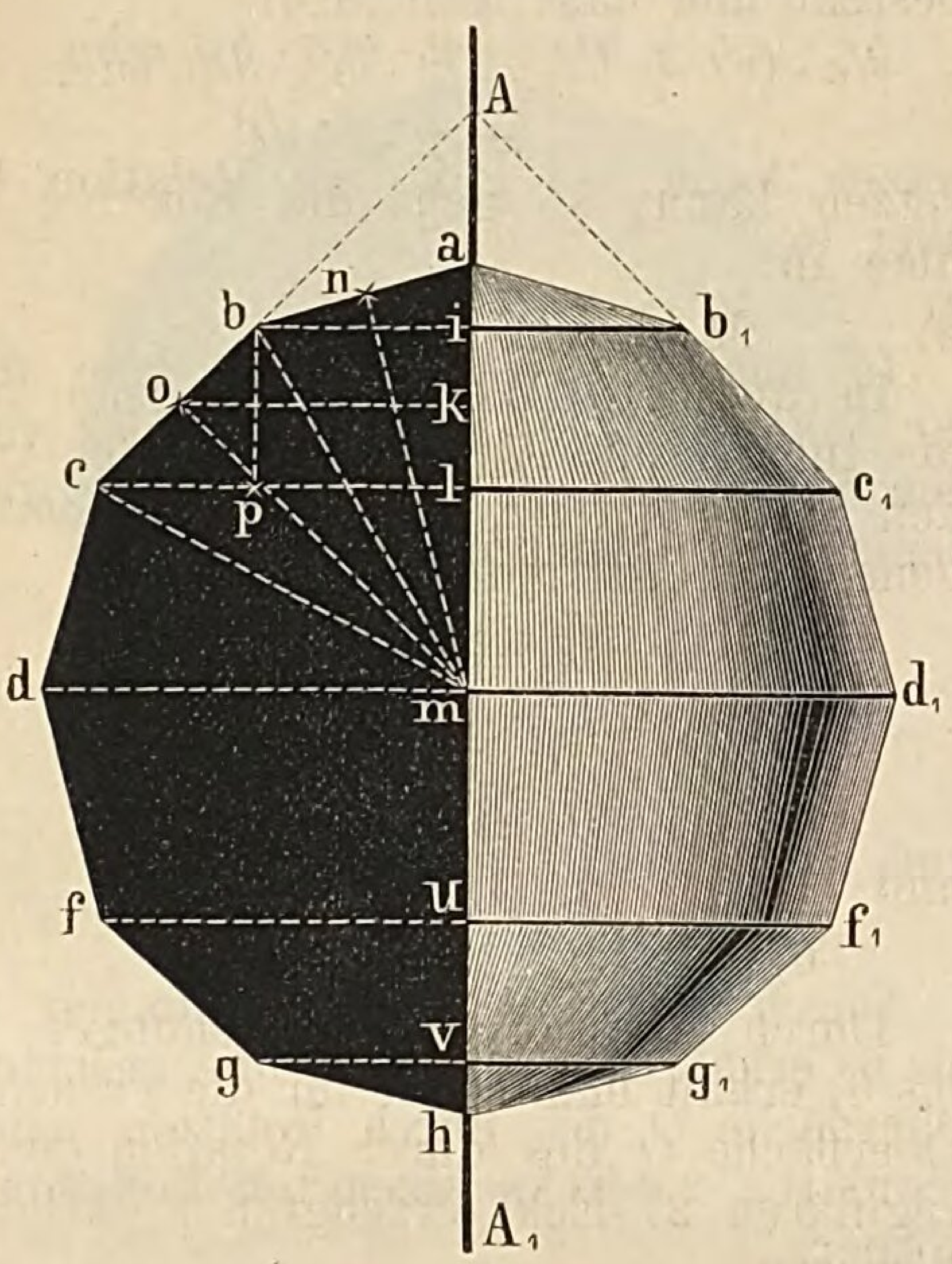
I. . . . $M = \pi r s$ (s. Erkl. 49)

Für einen Kegelstumpf:

II. . . . $M = \pi s (R + r)$ (s. Erkl. 56).

der dem regulären Polygon um- und einbeschriebenen Kreise gegeben sind?

Figur 233.




**Erkl. 687.** Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn ein spitzer Winkel in dem einen gleich einem spitzen Winkel in dem andern Dreieck ist.“

Da z. B. in der Figur 233:

$$ba \perp mn$$
$$bi \perp am$$

ist, so ist nach der Erkl. 334:

$$\sphericalangle abi = \sphericalangle nma$$

mithin ist nach vorstehendem Lehrsatz:

$$\triangle aib \sim \triangle mna$$

**Erkl. 688.** Bezeichnet man den Radius des einem regulären $2n$-Ecks umbeschriebenen Kreises mit $R$, den Radius des demselben einbeschriebenen Kreises mit $r$, die Oberfläche des durch Rotation dieses regulären $2n$-Ecks um einen seiner grössten Durchmesser entstandenen Körpers mit $O$, so bestehen nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) und B) die Formeln:

1) . . . $O = 4\pi r \cdot R$

oder

2) . . . $O = 2\pi r \cdot 2R$

d. h. die Oberfläche eines Körpers, der durch Rotation eines regulären $2n$-Ecks um einen seiner grössten Durchmesser entstanden ist, ist gleich dem Produkt

**Auflösung.** Bei der Rotation des durch die Figur 233 dargestellten regulären $2n$-seitigen Polygons $abcd\cdots$ um den Durchmesser $ah$, erzeugen die Seiten $ab$ und $hg$, welche an den Durchmesser $ah$ anstossen, zwei Kegelmäntel, während die übrigen Seiten $bc$, $cd\cdots$ die Mäntel von abgestumpften Kegeln erzeugen. Fällt man in der Figur 233 die Perpendikel $bi$, $cl$, $dm$, so hat man nach vorstehender Formel I z. B. für den Inhalt $M_1$ des von $ab$ beschriebenen Kegelmantels:

a) . . . $M_1 = \pi \cdot \overline{bi} \cdot \overline{ba}$

Zieht man nun $mn \perp ba$ und berücksichtigt man, dass die rechtwinkligen Dreiecke $aib$ und $mna$ ähnlich sind (siehe Erkl. 687), dass hiernach die Proportion:

$$\overline{bi} : \overline{mn} = \overline{ai} : \overline{na}$$

oder, wenn man:

$$\overline{na} = \frac{\overline{ba}}{2} \text{ setzt}$$

die Proportion:

$$\overline{bi} : \overline{mn} = \overline{ai} : \frac{\overline{ba}}{2}$$

besteht, und dass man also:

$$\overline{bi} \cdot \overline{ba} = 2\,\overline{mn} \cdot \overline{ai} \text{ oder } = 2 \cdot r \cdot \overline{ai}$$

setzen kann, so geht die Relation a) über in:

1) . . . $M_1 = 2\pi \cdot r \cdot \overline{ai}$

Ferner erhält man nach vorstehender Formel II für den Inhalt $M_2$ des von $bc$ beschriebenen Kegelstumpfmantels:

b) . . . $M_2 = \pi \cdot \overline{bc} \cdot (\overline{cl} + \overline{bi})$

Zieht man wiederum $\overline{mo} \perp \overline{bc}$ und ebenso $\overline{bp} \perp \overline{cl}$ und $\overline{ok} \perp \overline{ma}$ und berücksichtigt man, dass die rechtwinkligen Dreiecke $bpc$ und $mok$ ähnlich sind (siehe Erkl. 687), dass hiernach die Proportion:

$$\overline{bc} : \overline{mo} = \overline{bp} : \overline{ok}$$

oder, wenn man $\overline{ok}$ als Mittellinie des Paralleltrapezes $clib$

$$= \frac{\overline{cl} + \overline{bi}}{2}$$

bestehend aus jenem Durchmesser $2R$ und der Peripherie $2\pi r$ des dem regulären Polygon einbeschriebenen Kreises.

setzt, die Proportion:

$$\overline{bc}:\overline{mo} = \overline{bp}:\frac{\overline{cl}+\overline{bi}}{2}$$

besteht und dass man also:

$$\overline{bc}\cdot(\overline{cl}+\overline{bi}) = 2\cdot\overline{mo}\cdot\overline{bp} \text{ oder}$$
$$= 2\cdot r\cdot\overline{il}$$

setzen kann, so geht die Relation b) über in:

2) . . . $M_2 = 2\pi\cdot r\cdot\overline{il}$

In analoger Weise erhält man für die Inhalte $M_3$, $M_4$, $M_5$ und $M_6$ der von den Seiten $cd$, $df$, $fg$ und $gh$ beschriebenen Kegelstumpfmäntel, bezw.:

3) . . . $M_3 = 2\pi\cdot r\cdot\overline{lm}$

4) . . . $M_4 = 2\pi\cdot r\cdot\overline{mu}$

5) . . . $M_5 = 2\pi\cdot r\cdot\overline{uv}$

und

6) . . . $M_6 = 2\pi\cdot r\cdot\overline{vh}$

Durch Addition der Gleichungen 1) bis 6) erhält man somit für die gesuchte Oberfläche $O$ des durch Rotation jenes regulären $2n$-Ecks erzeugten Rotationskörpers:

$$O = 2\pi r\cdot\overline{ai} + 2\pi r\cdot\overline{il} + 2\pi r\cdot\overline{lm} + 2\pi r\cdot\overline{mu} + 2\pi r\cdot\overline{uv} + 2\pi r\cdot\overline{vh}$$

oder

$$O = 2\pi r(\overline{ai}+\overline{il}+\overline{lm}+\overline{mu}+\overline{uv}+\overline{vh})$$

mithin

A) . . . $O = 2\pi r\cdot 2R$ (s. Erkl. 688 bis 690)

oder

B) . . . $O = 4\pi r\cdot R$

**Erkl. 689.** Zur Auflösung der vorstehenden Aufgabe wurde in der Figur ein reguläres Sechseck angenommen; es braucht wohl nicht erwähnt zu werden, dass nebenstehende Auflösung dieselbe bleibt, ob das Polygon ein 6-, 8-, 10- oder allgemein ein $2n$-Eck ist.

**Erkl. 690.** Aus der in der Erkl. 688 aufgestellten Formel kann man die Oberflächeninhaltsformel für eine Kugel auf einfache Weise ableiten, wenn man sich die Kugel durch Rotation eines Kreises um einen seiner Durchmesser als Drehachse entstanden denkt und diesen Kreis als ein Polygon mit unzählig vielen, bezw. mit unendlich kleinen Seiten betrachtet. Für diesen Fall wird in der Formel:

$O = 2\pi r\cdot 2R$ (siehe Erkl. 688)

$r = R$

und man erhält:

$O = 4\pi r^2$, nämlich die bereits in dem 1. Buch entwickelte Oberflächeninhaltsformel für eine Kugel (s. Erkl. 62).

---

**Aufgabe 732.** Wie gross ist das Volumen eines Rotationskörpers, der entsteht, wenn ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl um einen seiner grössten Durchmesser als Drehachse rotiert und wenn die Radien $R$ und $r$ der dem regulären Polygon um- und einbeschriebenen Kreise gegeben sind?

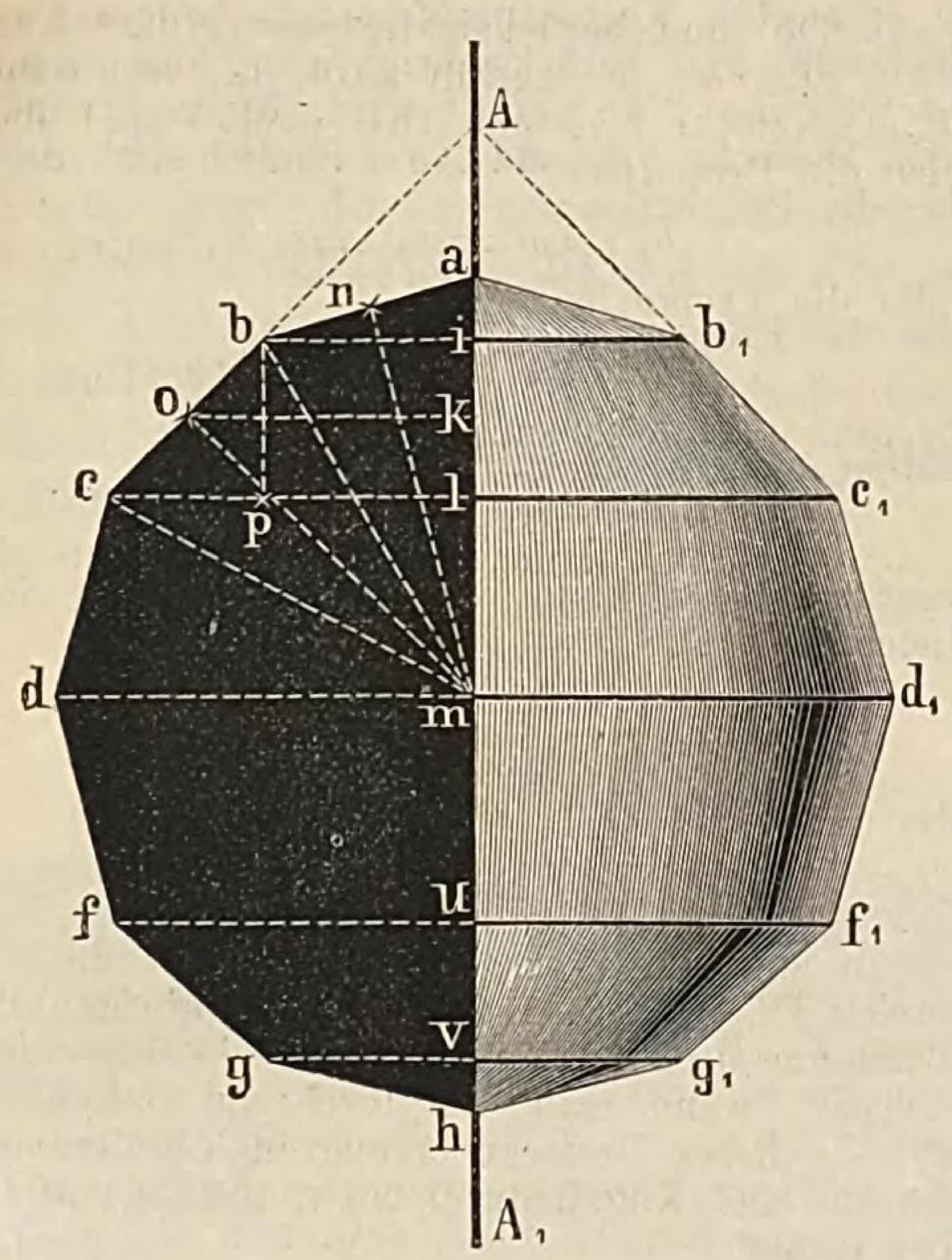
**Formel:**

Für einen Doppelkegel:

$$V = \frac{R^2\pi\cdot A}{3} \quad \text{(s. Erkl. 691).}$$

**Auflösung.** Denkt man sich, siehe Figur 234, die Eckpunkte des regulären $2n$-Ecks $abcdfgh\cdots$ mit dem Mittelpunkt $m$ verbunden, so wird dadurch das Polygon in seine Bestimmungsdreiecke wie $amb$, $bmc$, $cmd\cdots$ zerlegt und diese Bestimmungsdreiecke beschreiben, wenn man von jenen Eckpunkten die Perpendikel $bi$, $cl$, $dm\cdots$ auf die

Figur 234.




**Erkl. 691.** Bezeichnet man mit $R$ den Radius der gemeinschaftlichen Grundfläche zweier Kegel, welche zusammen einen Doppelkegel bilden, mit $A$ die Achse, bezw. die Verbindungslinie der beiden Spitzen eines Doppelkegels, mit $V$ dessen Volumen, so ist:

$$V = \frac{R^2 \pi \cdot A}{3}$$

**Erkl. 692.** Für den Inhalt $M_1$ des Kegelmantels, welcher in der Figur 234 die Seite $ab$ erzeugt, hat man nach der Formel:

$$M = \pi \cdot r \cdot s \text{ (siehe Erkl. 49)}$$

die Relation:

$$\text{a)} \ldots M = \pi \cdot \overline{bi} \cdot \overline{ab}$$

und hieraus ergibt sich, dass

$$\text{b)} \ldots \pi \cdot \overline{bi} = \frac{M}{\overline{ab}}$$

gesetzt werden kann.

**Erkl. 693.** Für den Inhalt $M_2$ des Kegelstumpfmantels, welchen in der Figur 234 die Seite $\overline{bc}$ erzeugt, hat man nach der Formel:

$$M = \pi s (R + r)$$

die Relation:

$$\text{a)} \ldots M_2 = \pi \cdot \overline{bc} \cdot (\overline{cl} + \overline{bi})$$

und hieraus ergibt sich, dass:

$$\text{b)} \ldots \pi \cdot (\overline{cl} + \overline{bi}) = \frac{M_2}{\overline{bc}}$$

gesetzt werden kann.

Drehachse $ah$ fällt, bei der Rotation Doppelkegel und solche Körper, die man, wie in nachstehendem gezeigt wird, als Differenzen von Doppelkegeln betrachten kann. Die Summe der Volumen dieser durch jene Bestimmungsdreiecke erzeugten Körper ist gleich dem gesuchten Volumen $V$ des ganzen Rotationskörpers.

Nach vorstehender Formel hat man für das Volumen $V_1$ des durch Rotation des Bestimmungsdreiecks $amb$ erzeugten Doppelkegels die Relation:

$$\text{a)} \ldots V_1 = \frac{\overline{bi}^2 \cdot \pi \cdot \overline{am}}{3}$$

oder, wenn man $mn \perp ab$ fällt und berücksichtigt, dass sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $aib$ und $anm$ die Proportion:

$$\overline{bi} : \overline{mn} = \overline{ab} : \overline{am}$$

ergibt, dass man also:

$$\overline{bi} \cdot \overline{am} = \overline{mn} \cdot \overline{ab}$$

setzen kann, die Relation:

$$\text{b)} \ldots V_1 = \frac{1}{3} \overline{bi} \cdot \overline{\pi \cdot mn} \cdot \overline{ab}$$

Setzt man in diese Gleichung noch:

$$\overline{mn} = r$$

und nach der Erkl. 692:

$$\overline{bi} \cdot \pi = \frac{M_1}{\overline{ab}}$$

worin $M_1$ den Inhalt des von $ab$ erzeugten Kegelmantels bedeutet, so erhält man:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_1}{\overline{ab}} \cdot r \cdot \overline{ab}$$

oder

$$1) \ldots V_1 = \frac{M_1 \cdot r}{3}$$

Zur Bestimmung des Volums $V_2$, des Körpers, welchen das zweite Bestimmungsdreieck $bmc$ erzeugt, verlängere man $bc$ und $am$ bis zu ihrem Durchschnitt $A$. Da man alsdann den durch das Dreieck $bmc$ erzeugten Körper, als die Differenz der durch die Dreiecke $Amc$ und $Amb$ erzeugten Doppelkegel betrachten kann, so hat man nach vorstehender Formel 1):

$$V_2 = \frac{\overline{cl}^2 \cdot \pi \cdot \overline{Am}}{3} - \frac{\overline{bi}^2 \cdot \pi \cdot \overline{Am}}{3}$$

oder

$$V_2 = \frac{\pi \cdot \overline{Am}}{3} (\overline{cl}^2 - \overline{bi}^2)$$

oder

$$\text{c)} \ldots V_2 = \frac{\pi \cdot \overline{Am}}{3} (\overline{cl} + \overline{bi}) \cdot (\overline{cl} - \overline{bi})$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$\pi(\overline{cl} + \overline{bi}) = \frac{M_2}{\overline{bc}},$$

in welcher Relation $M_2$ den Inhalt des durch $\overline{bc}$ erzeugten Kegelstumpfmantels bedeutet (s. Erkl. 693) und berücksichtigt man, dass wenn $bp \perp cl$, $mo \perp bc$ gefällt wird, die rechtwinkligen Dreiecke $bpc$ und $Aom$ ähnlich sind, dass also die Proportion:

$$\overline{bc} : \overline{Am} = \overline{cp} : \overline{mo}$$

oder die Proportion:

$$\overline{bc} : \overline{Am} = (\overline{cl} - \overline{bi}) : r$$

besteht, nach welcher:

$$\overline{Am} \cdot (\overline{cl} - \overline{bi}) \cdot = \overline{bc} \cdot r$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus der Gleichung c):

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_2}{\overline{bc}} \cdot \overline{bc} \cdot r$$

oder

$$2) \ldots V_2 = \frac{M_2 \cdot r}{3}$$

In analoger Weise erhält man für die Volumen $V_3$, $V_4$, $V_5 \cdots$ der von den übrigen Bestimmungsdreiecken $cmd$, $dmf \cdots$ erzeugten Körper, wenn man die durch die Seiten $cd$, $df \cdots$ dieser Dreiecke erzeugten Kegelstumpfmäntel und Kegelmäntel bezw. mit $M_3$, $M_4 \cdots$ bezeichnet:

$$3) \ldots V_3 = \frac{M_3 \cdot r}{3}$$

$$4) \ldots V_4 = \frac{M_4 \cdot r}{3} \text{ u. s. f., u. s. f.}$$

Durch Addition der Gleichungen 1), 2), 3), 4)$\cdots$ erhält man somit für das gesuchte Volumen $V$ des durch Rotation jenes regulären $2n$-Ecks erzeugten Rotationskörpers:

$$V = \frac{M_1 \cdot r}{3} + \frac{M_2 \cdot r}{3} + \frac{M_3 \cdot r}{3} + \cdots$$

oder

$$V = \frac{r}{3}(M_1 + M_2 + M_3 + \cdots)$$

und wenn man für die Summe der Kegel- und Kegelstumpfmäntel $M_1$, $M_2$, $M_3 \cdots$ die Oberfläche $O$ des erzeugten Rotationskörpers setzt:

$$A) \ldots V = \frac{O \cdot r}{3}$$

Substituiert man hierin noch den mittels der Formel 1) (siehe Erkl 688) gefundenen Wert für $O$, so erhält man:

$$B) \ldots V = \frac{4\pi r^2 \cdot R}{3}$$

---

**Erkl. 694.** Bezeichnet man die Oberfläche des durch Rotation eines regulären $2n$-Ecks um einen seiner grössten Durchmesser als Drehachse entstandenen Körpers mit $O$, den Radius des jenem Polygon einbeschriebenen Kreises mit $r$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung unter A) entwickelten Gleichung die Formel:

$$1) \ldots V = \frac{O \cdot r}{3}$$

Bezeichnet man ferner den Radius des jenem regulären Polygon umbeschriebenen Kreises mit $R$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung unter B) entwickelten Gleichung die weitere Formel:

$$2) \ldots V = \frac{4\pi r^2 \cdot R}{3}$$

**Erkl. 695.** Aus den in der Erkl. 694 aufgestellten Formeln kann man die Kubikinhaltsformel für eine Kugel auf einfache Weise ableiten, wenn man sich die Kugel durch Rotation eines Kreises um einen seiner Durchmesser als Drehachse entstanden denkt und diesen Kreis als ein Polygon mit unzählig vielen, bezw. mit unendlich kleinen Seiten betrachtet. Für diesen Fall wird in der Formel:

$$V = \frac{4\pi r^2 \cdot R}{3} \text{ (s. Erkl. 694)}$$

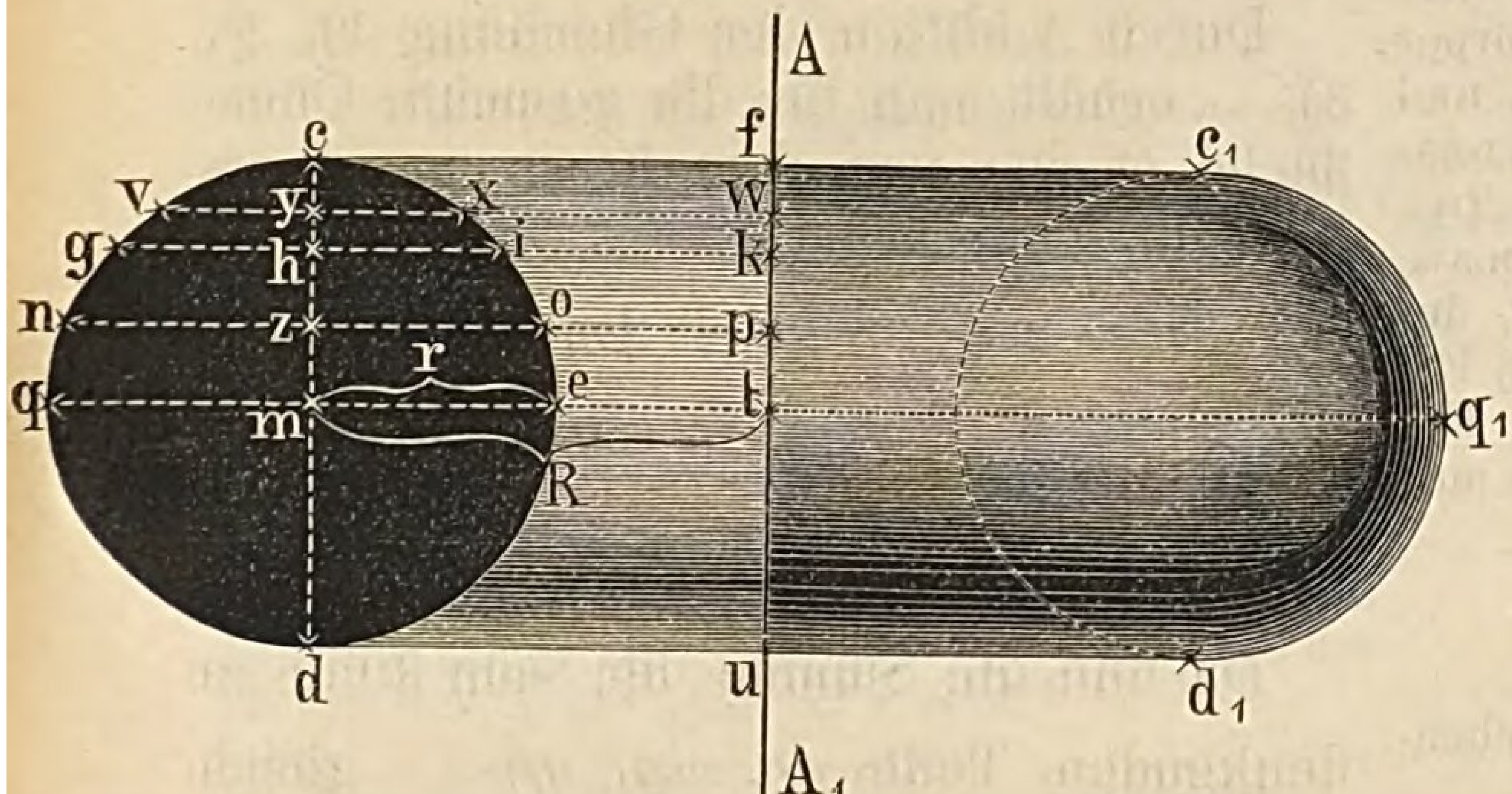
$$r = R$$

und man erhält:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3},$$ nämlich die bereits in dem 1. Buch der Körperberechnungen entwickelte Kubikinhaltsformel für eine Kugel (s. Erkl. 67).

**Aufgabe 733.** Wie gross ist die Oberfläche eines ringförmigen Körpers, welcher entsteht, wenn sich ein Kreis mit dem Radius $r$ um eine in derselben Ebene liegende Gerade als Drehachse, welche von dem Mittelpunkt jenes Kreises den Abstand $R$ hat, so bewegt, dass jeder Punkt der Peripherie jenes Kreises einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zu jener Drehachse ist?

Figur 235.




**Erkl. 696.** Unter einem ringförmigen Körper versteht man im allgemeinen einen solchen, welchen man sich dadurch entstanden denken kann, dass sich eine ebene, geschlossene Figur so um eine ausserhalb dieser Figur aber in derselben Ebene liegende Linie als Umdrehungs- oder Rotationsachse bewegt, dass Figur und Achse stets in einerlei Ebene bleiben und dass jeder Punkt der bewegten Figur eine Kreislinie beschreibt, deren Ebene zur Achse senkrecht ist. Die Fläche, welche bei vollständiger Umdrehung von der Peripherie jener Figur erzeugt wird, begrenzt einen Raum vollständig, welchen man einen ringförmigen Körper nennt.

**Erkl. 697.** Die besondere Form eines ringförmigen Körpers ist abhängig von der Gestalt der erzeugenden, geschlossenen Figur. Die einfachsten Formen ringförmiger Körper sind solche, bei welchen die erzeugende Figur eine solche Gestalt und eine solche Lage zur Umdrehungsachse hat, dass sie in allen ihren Teilen symmetrisch zur Umdrehungsachse angeordnet ist.

**Erkl. 698.** Aus der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A):

$$O = 2\pi r \cdot 2\pi R$$

ergibt sich, wenn man $2\pi r$, d. i., s. Figur 235, der Umfang des Kreises um $m$, bezw. die Länge der Kreislinie um $m$, welche um die Achse $AA_1$ rotiert $= L$ und wenn man für $R$, d. i. die Ent-

**Formel:**

Für einen geraden Kegelstumpf:

$$M = \pi s (R + r) \text{ (s. Erkl. 56).}$$

**Auflösung.** In Figur 235 stelle der Kreis um $m$ den erzeugenden Kreis und $AA_1$ die Umdrehungsachse dar.

Zieht man in Fig. 235 $\| cd \| AA_1$ und denkt man sich die Peripherie des Kreises von $c$ aus in eine unendliche Anzahl kleiner aber gleicher Teile, wie $cg$, $gn$, $nq$ geteilt und von diesen Teilpunkten die Perpendikel $cf$, $gk$, $np$, $qt \cdots$ auf die Gerade $AA_1$ gefällt, so kann man, da die gleichen Teile $cg$, $gn$, $nq$, $ci$, $io$, $oe \cdots$ der Peripherie sehr klein zu denken sind, folglich als gerade Stückchen betrachtet werden können, die Figuren $cgkf$ $cikf$, $gnpk$, $iopk$, $nqtp$, $oetp \cdots$ als Paralleltrapeze betrachten, die bei der Umdrehung um die Gerade $AA_1$ abgestumpfte Kegel erzeugen, deren Mantelflächen zusammen die Oberfläche des in der Aufgabe erwähnten, ringförmigen Körpers ausmachen.

Für den Mantel $M$ des von dem || tr. $cgkf$ erzeugten Kegelstumpfs hat man nach vorstehender Formel:

$$M = \pi \cdot \overline{gc} \cdot (\overline{gk} + \overline{cf})$$

oder, wenn man für:

$$\frac{\overline{gk} + \overline{cf}}{2} \text{ den Radius } vw \text{ des Mittelkreises dieses Kegelstumpfs setzt:}$$

$$\text{a)} \ldots M = \pi \cdot \overline{gc} \cdot 2 \cdot \overline{vw}$$

Für den Mantel $M_1$ der von dem || tr. $cikf$ hat man nach vorstehender Formel:

$$M_1 = \pi \cdot \overline{ci} \cdot (\overline{ik} + \overline{cf})$$

oder, wenn man für:

$$\frac{\overline{ik} + \overline{cf}}{2} \text{ den Radius } xw \text{ des Mittelkreises dieses Kegelstumpfs setzt:}$$

$$\text{b)} \ldots M_1 = \pi \cdot \overline{ci} \cdot 2 \cdot \overline{xw}$$

Da nun: $\overline{cg} = \overline{ci} = \delta$

und $\overline{vw} = \overline{vy} + \overline{yw} = \overline{vy} + \overline{mt} = \overline{vy} + R$

und $\overline{xw} = \overline{yw} - \overline{yx} = \overline{mt} - \overline{vy} = R - \overline{vy}$

fernung des Schwerpunkts der Kreislinie um $m$ von der Achse $AA_1 = s$ und $O = F$ setzt:

$$F = 2s\pi \cdot L$$

d. h. der Inhalt $F$ der Rotationsfläche, welche entsteht, wenn die Kreislinie um $m$, siehe Figur 235, um die Achse $AA_1$ eine ganze Umdrehung macht, ist gleich der Anzahl von Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $m$ dieser Kreislinie bei jener Rotation zurücklegt, mit der Länge $L$ jener Kreislinie multipliziert. (S. Erkl. 676, 682, 686, 708 und 710.)

**Erkl. 699.** Denkt man sich den nach vorstehender Aufgabe erzeugten Rotationskörper nach einer Erzeugungsfigur aufgeschnitten und gestreckt, so erhält man einen geraden Kreiscylinder, dessen Grundfläche der Umfang $2\pi r$ jener Erzeugungsfigur und dessen Länge, bezw. dessen Höhe gleich dem Umfang $2\pi R$ des Kreises ist, welchen der Mittelpunkt jener Erzeugungsfigur bei der Rotation beschreibt. Für den Mantel dieses gedachten Cylinders hat man hiernach und nach der Formel:

$$M = 2\pi R \cdot H \text{ (siehe Erkl. 47)}$$

die Relation:

$$M = 2\pi r \cdot 2\pi R,$$ vergleiche hiermit nebenstehende Gleichung A)

gesetzt werden kann, und da die Summe der Mäntel $M$ und $M_1$ die Oberfläche des von dem Bogen $vcx$ erzeugten Ringes ist, so erhält man durch Addition der Gleichungen a) u. b) für die Oberfläche $O_1$ dieses von $vcx$ erzeugten Ringes

$$O_1 = \pi \cdot \overline{gc} \cdot 2 \cdot (\overline{vy} + R) + \pi \cdot \overline{gc} \cdot 2 \cdot (R - \overline{vy})$$

oder

$$1) \ldots O_1 = 2 \cdot \pi \cdot \overline{gc} \cdot 2R$$

In analoger Weise erhält man für die krummen Oberflächen $O_2$, $O_3 \cdots$ der von den folgenden Stücken $noig$, $qeon \cdots$ des Kreises um $m$ erzeugten, ringförmigen Körper:

$$2) \ldots O_2 = 2\pi \cdot \overline{ng} \cdot 2R$$

$$3) \ldots O_3 = 2\pi \cdot \overline{qn} \cdot 2R \text{ u. s. f., u. s. f.}$$

Durch Addition der Gleichung 1), 2), 3)$\cdots$ erhält man für die gesuchte Oberfläche $O$ des von dem Kreis um $m$ erzeugten Ringkörpers:

$$O = 2\pi \cdot \overline{gc} \cdot 2R + 2\pi \cdot \overline{ng} \cdot 2R + 2\pi \cdot \overline{qn} \cdot 2R + \cdots$$

oder

$$O = 2\pi \cdot 2R(\overline{gc} + \overline{ng} + \overline{qn} + \cdots)$$

Da nun die Summe der sehr klein zu denkenden Teile $\overline{gc}$, $\overline{ng}$, $\overline{qn} \cdots$ gleich der halben Peripherie des Kreises um $m$, nämlich $= \frac{2r\pi}{2}$ oder $= r\pi$ ist, so erhält man hiernach:

$$O = 2\pi \cdot 2R \cdot r\pi$$

oder

$$A) \ldots O = 2\pi r \cdot 2\pi R \text{ (s. d. Erkl. 698 u. 699).}$$

---

**Aufgabe 734.** Wie gross ist das Volumen eines ringförmigen Körpers, welcher entsteht, wenn sich ein Kreis mit dem Radius $r$ um eine in derselben Ebene liegende Gerade als Drehachse, welche von dem Mittelpunkt jenes Kreises den Abstand $R$ hat, so bewegt, dass jeder Punkt der Peripherie jenes Kreises einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zu jener Drehachse ist?

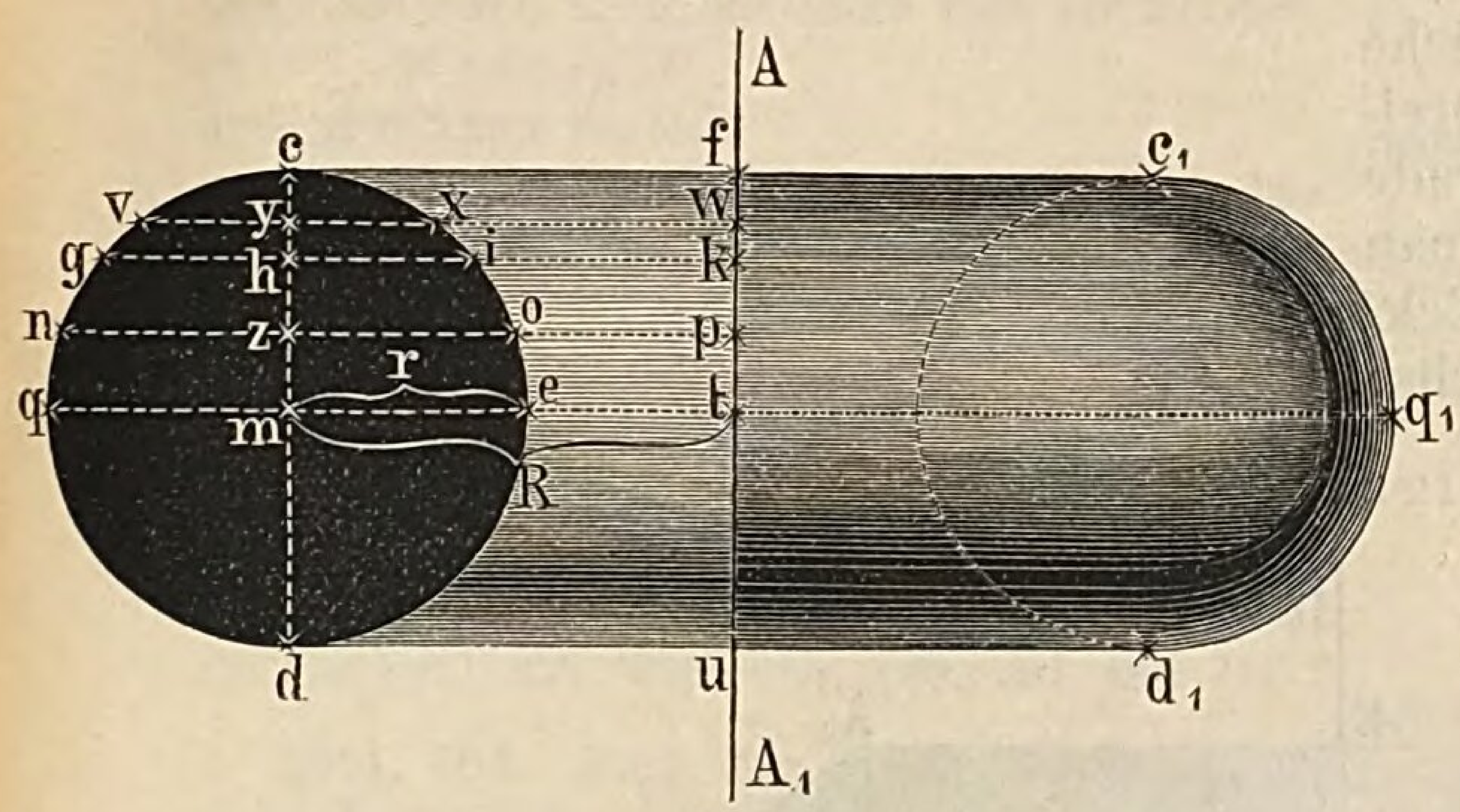
**Formel:**

Für einen Kegelstumpf:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \text{ (s. Erkl. 53).}$$

**Auflösung.** Analog wie in vorstehender Auflösung denke man sich, siehe Fig. 236, den zu $AA_1$ parallelen Durchmesser $cd$ des Kreises in eine unendliche Anzahl sehr kleiner, aber gleicher Teile, wie $ch$, $hz$, $zm \cdots$ geteilt und durch die Teilpunkte $c$, $h$, $z \cdots$ Perpendikel zur Geraden $AA_1$ gezogen, wodurch die Paralleltrapeze $cgkf$, $cikf$, $gnph$, $iopk \cdots$ entstehen.

Figur 236.




**Erkl. 700.** Aus der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A):

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2$$

ergibt sich, wenn man

$\pi r^2$, d. i., siehe Figur 236, der Inhalt des Kreises um $m$, welcher um die Achse $AA_1$ rotiert $= F$ und wenn man für $R$, d. i. die Entfernung des Schwerpunkts $m$ des Kreises um $m$ von der Achse $AA_1 = s$ setzt:

$$V = 2 s\pi \cdot F$$

d. h. das Volumen des Rotationskörpers, welcher entsteht, wenn, siehe Fig. 236, der Kreis um $m$ um die Achse $AA_1$ eine ganze Umdrehung macht, ist gleich der Anzahl von Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $m$ dieser Kreislinie bei jener Rotation zurücklegt, mit dem Flächeninhalt $F$ jener Rotationsfigur multipliziert. (Siehe die Erkl. 671, 678, 683, 703, 707 und 710.)

**Erkl. 701.** Denkt man sich den nach vorstehender Aufgabe durch Rotation erzeugten Rotationskörper, nach einer Erzeugungsfigur aufgeschnitten und wie bereits in der Erkl. 699 erwähnt, gestreckt, so erhält man einen geraden Kreiscylinder, dessen Grundfläche der Inhalt $r^2\pi$ jener Erzeugungsfigur und dessen Länge, bezw. dessen Höhe gleich dem Umfang $2R\pi$ des Kreises ist, welchen der Mittelpunkt jener Erzeugungsfigur bei der Rotation beschrieb. Für das Volumen $V$ dieses gedachten Cylinders hat man hiernach und nach der Formel:

$$V = R^2\pi \cdot H \text{ (s. Erkl. 33)}$$

die Relation:

$$V = r^2\pi \cdot 2\pi R$$

vergleiche hiermit nebenstehende Gleichung A).

Für das Volumen $V_1$ des von dem Teil $gic$ des Kreises um $m$ erzeugten, ringförmigen Körpers hat man mittels Benutzung vorstehender Formel und analog der Auflösung der vorigen Aufgabe:

$$V_1 = \frac{\pi\cdot\overline{kf}}{3}\left(\overline{gk}^2 + \overline{gk}\cdot\overline{cf} + \overline{cf}^2\right) - \frac{\pi\cdot\overline{kf}}{2}\left(\overline{ik}^2 + \overline{ik}\cdot\overline{cf} + \overline{cf}^2\right)$$

oder nach gehöriger Reduktion und in Rücksicht, dass:

$$\overline{kf} = \overline{hc}$$
$$\overline{gk} = \overline{gh} + \overline{hk} = \overline{gh} + \overline{mt} = \overline{gh} + R$$
$$\overline{cf} = \overline{mt} = R$$
$$\overline{ik} = \overline{hk} - \overline{hi} = \overline{mt} - \overline{gh} = R - \overline{gh}$$

gesetzt werden kann.

$$V_1 = \frac{\pi\cdot\overline{hc}}{3}\left[(\overline{gh} + R)^2 + (\overline{gh} + R)\cdot R + R^2 - (R - \overline{gh})^2 + (R - \overline{gh})\cdot R + R^2\right]$$

$$V_1 = \frac{\pi\cdot\overline{hc}}{3}\left[4R\cdot\overline{gh} + 2R\cdot\overline{gh}\right]$$

$$V_1 = \frac{\pi\cdot\overline{hc}}{3}\cdot 6R\cdot\overline{gh}$$

Da nun $\frac{\overline{gi}\cdot\overline{hc}}{2}$ oder $\frac{\overline{gi}}{2}\cdot\overline{hc}$ oder $\overline{gh}\cdot\overline{hc}$ gleich dem Inhalt $f_1$ des Flächenstücks $gci$ (welcher in dem gedachten Fall als Dreieck zu betrachten ist, indem $ch$, also auch $cg$ und $ci$ unendlich klein angenommen wurden) gesetzt werden kann, so erhält man hiernach:

$$1) \ldots V_1 = 2\pi R\cdot f_1$$

In analoger Weise erhält man für die Volumen $V_2$, $V_3$ der ringförmigen Körper, welche durch die folgenden Flächenstücke $noig$, $qeon\cdots$ des Kreises um $m$ erzeugt werden, wenn man die Inhalte dieser Flächenstücke, bezw. mit $f_2, f_3\cdots$ bezeichnet:

$$2) \ldots V_2 = 2\pi R\cdot f_2$$

$$3) \ldots V_3 = 2\pi R\cdot f_3 \text{ u. s. f., u. s. f.}$$

Durch Addition der Gleichungen 1), 2), 3)$\cdots$ erhält man für das gesuchte Volumen $V$ des von dem Kreise um $m$ erzeugten Ringkörpers:

$$V = 2\pi R\cdot f_1 + 2\pi R\cdot f_2 + 2\pi R\cdot f_3 + \cdots$$

oder

$$V = 2\pi R\cdot(f_1 + f_2 + f_3 + \cdots)$$

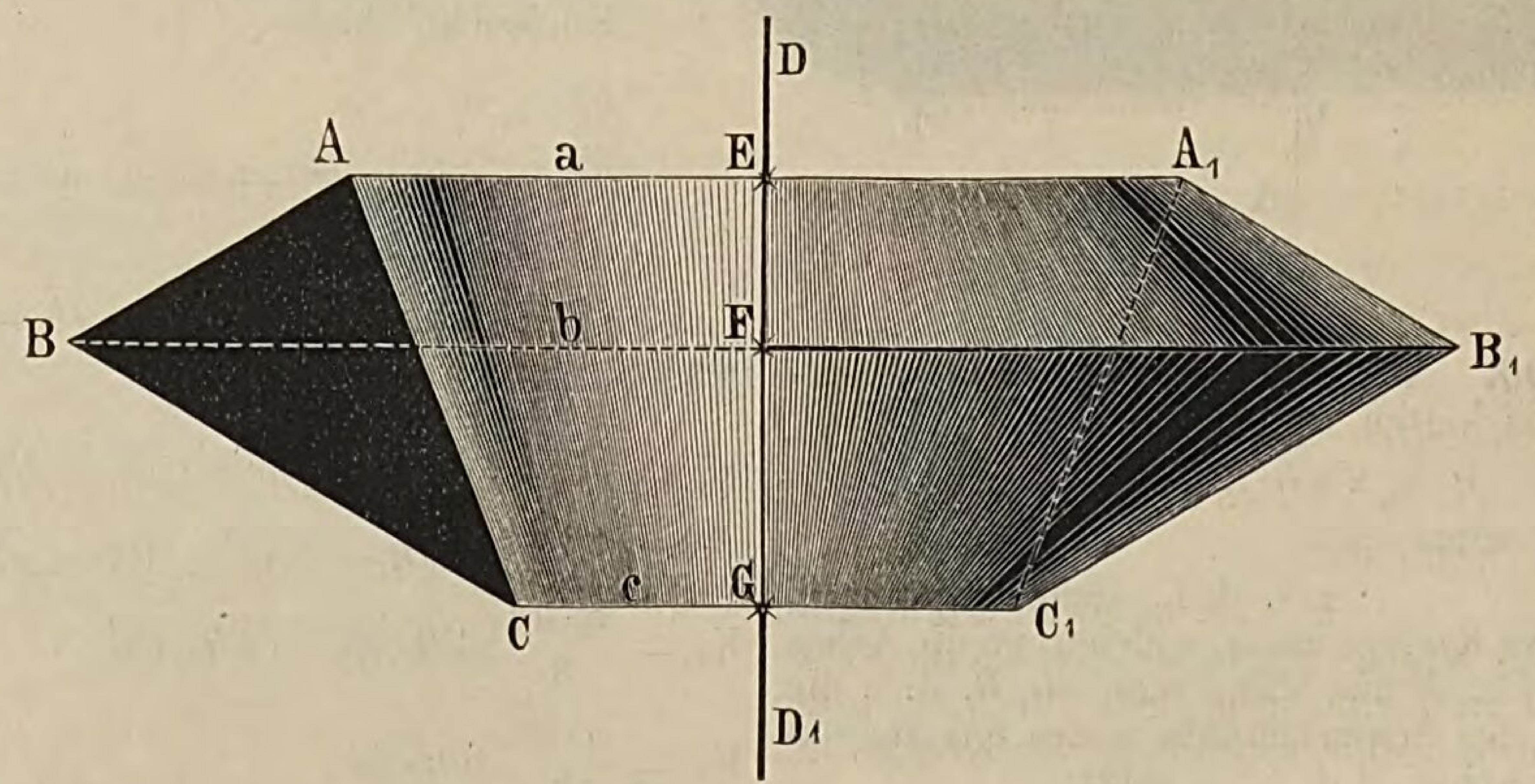
Da nun die Summe der Inhalte $f_1$, $f_2$, $f_3\cdots$ der sehr klein zu denkenden Flächenstücke $gic$, $noig$, $qeon\cdots$ gleich dem Inhalt des Kreises um $m$, nämlich $= r^2\pi$ ist, so erhält man hiernach:

$$\text{A)} \ldots V = 2\pi R\cdot\pi r^2$$

(siehe die Erkl. 700 und 701).

**Aufgabe 735.** Wie gross ist das Volumen des Körpers, der durch Rotation des ebenen Dreiecks $ABC$, siehe Figur 237, um die ausserhalb des Dreiecks in dessen Ebene liegende Gerade $DD_1$ als Drehachse entsteht, wenn man die Entfernungen $a$, $b$ und $c$ der Eckpunkte $A$, $B$ und $C$ von der Drehachse $DD_1$ kennt?

Figur 237.




**Erkl. 702.** Da der Inhalt des Dreiecks $ABC$ in Figur 237 gleich dem Inhalt $\frac{a+b}{2} \cdot \overline{FE}$ des Paralleltrapezes $ABFE$ plus dem Inhalt $\frac{b+c}{2} \cdot \overline{GF}$ des Paralleltrapezes $BCGF$ weniger dem Inhalt $\frac{a+c}{2} \cdot (\overline{FE} + \overline{GF})$ des Paralleltrapezes $ACGG$ ist, so hat man die Relation:

$$\triangle ABC = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{FE} + \frac{b+c}{2} \cdot \overline{GF} - \frac{a+c}{2}(\overline{FE} + \overline{GF})$$

oder

$$\triangle ABC = \frac{\overline{FE}}{2}(a+b-a-c) + \frac{\overline{GF}}{2}(b+c-a-c)$$

mithin ist:

$$\text{a)} \ldots \triangle ABC = \frac{\overline{FE}}{2}(b-c) + \frac{\overline{GF}}{2}(b-a)$$

hieraus ergibt sich ferner:

$$\text{b)} \ldots 2 \cdot \triangle ABC = \overline{FE}\,(b-c) + \overline{GF}\,(b-a)$$

**Erkl. 703.** Setzt man in der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A):

$$V = \frac{2}{3}(a+b+c)\pi \cdot \triangle ABC$$

nach der Erkl. 704 $\frac{a+b+c}{3} = s$, nämlich, s. Figur 238, gleich der Entfernung $(\overline{SK} = s)$

**Auflösung.** Das gesuchte Volumen $V$ des durch Rotation des Dreiecks $ABC$ um die Drehachse $DD_1$, siehe Fig. 237, entstandenen, ringförmigen Körpers kann man wie folgt berechnen:

Das gesuchte Volumen $V$ des durch Rotation des Dreiecks $ABC$ um die Drehachse $DD_1$, siehe Figur 237, entstandenen, ringförmigen Körpers ist gleich dem Volumen $v_1$ des durch Rotation des Paralleltrapezes $ABFE$ entstandenen Rotationskörpers plus dem Volumen $v_2$ des durch Rotation des Paralleltrapezes $BCGF$ entstandenen Rotationskörpers weniger dem Volumen $v_3$ des durch Rotation des Paralleltrapezes $ACGE$ entstandenen Rotationskörpers.

Nach der in der Auflösung der Aufgabe 730 aufgestellten Gleichung A) hat man für jene Volumen $v_1$, $v_2$ und $v_3$, bezw.:

$$\text{a)} \ldots v_1 = \frac{\pi \cdot \overline{FE}}{3}(b^2 + b \cdot a + a^2)$$

$$\text{b)} \ldots v_2 = \frac{\pi \cdot \overline{GF}}{3}(c^2 + c \cdot b + b^2)$$

des Schwerpunkts $S$ des Dreiecks $ABC$ von der Drehachse $DD_1$ und den Inhalt $\triangle ABC$ des Dreiecks $ABC = F$, so erhält man die Formel:

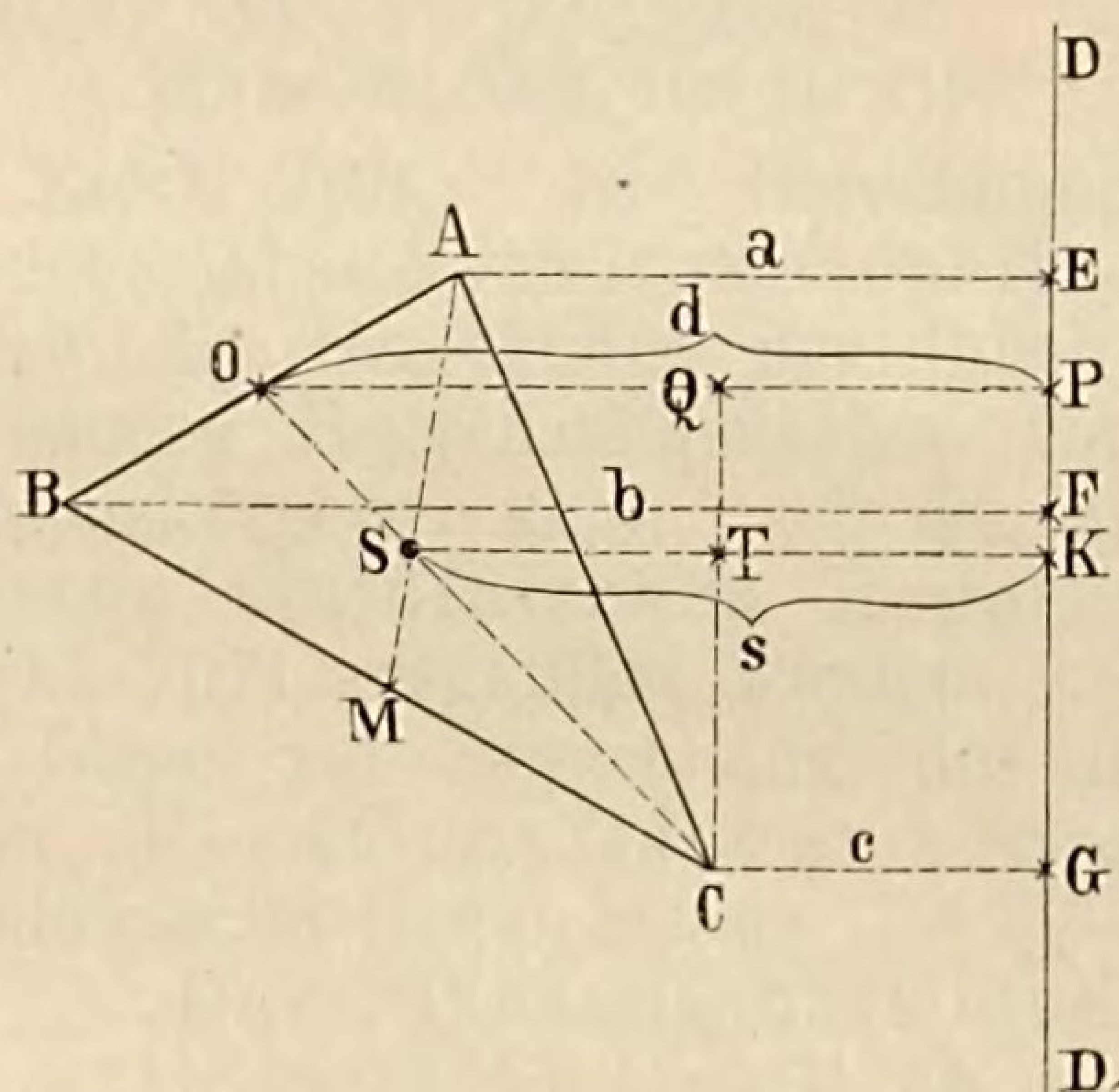
1) . . . $V = 2s\pi \cdot F$

und man kann sagen:

„Das Volumen des durch Rotation des Dreiecks $ABC$, in Figur 237, erzeugten, ringförmigen Rotationskörpers ist gleich der Anzahl von Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2s\pi$, welchen der Schwerpunkt $S$ jenes Dreiecks bei der Rotation zurücklegt, mit dem Flächeninhalt $F$ jenes Dreiecks (der Erzeugungsfigur) multipliziert. (S. die Erkl. 671, 678, 683, 700, 707 und 710.)

**Erkl. 704.** Nach den Erkl. 679—681 liegt, siehe Figur 238, der Schwerpunkt $S$ des Dreiecks $ABC$ in dem Durchschnittspunkt der von den Ecken nach den Mitten der Seiten gezogenen Linien. Sind in Figur 238 $AM$ und $CO$ zwei solcher Schwerlinien und man fällt den

Figur 238.




Perpendikel $\overline{OP}$ ($= d$) und zieht $CQ \parallel DD_1$, so besteht, da nach der Erkl. 679 z. B.

$$\overline{SO} = \frac{1}{3}\overline{OC} \text{ und } \overline{SC} = \frac{2}{3}\overline{OC} \text{ ist}$$

die Proportion:

$$\overline{OQ} : \overline{ST} = \overline{OC} : \overline{SC}$$

oder

$$\overline{OQ} : \overline{ST} = \overline{OC} : \frac{2}{3}\overline{OC}$$

$$= 1 : \frac{2}{3}$$

und hieraus erhält man:

a) . . . $\overline{OQ} = \frac{3}{2}\overline{ST}$

da nun $\overline{OQ} = \overline{OP} - \overline{QP} = \overline{OP} - \overline{CG} = d - c$

und $\overline{ST} = \overline{SK} - \overline{TK} = \overline{SK} - \overline{CG} = s - c$

ist, so geht die Gleichung a) über in:

$$d - c = \frac{3}{2}(s - c)$$

und

c) . . . $v_3 = \frac{\pi \cdot \overline{GE}}{3}(c^2 + c \cdot a + a^2)$

mithin für das gesuchte Volumen $V$:

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{FE}}{3}(b^2 + b \cdot a + a^2) + $$
$$+ \frac{\pi \cdot \overline{GF}}{3}(c^2 + c \cdot b + b^2)$$
$$- \frac{\pi \cdot (\overline{FE} + \overline{GF})}{3}(c^2 + c \cdot a + a^2)$$

oder

$$V = \frac{\pi \overline{FE}}{3}(b^2 + ba + a^2 - c^2 - ca - a^2) +$$
$$\frac{\pi \cdot \overline{GF}}{3}(c^2 + c \cdot b + b^2 - c^2 - ca - a^2)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\overline{FE}(b^2 + ba - ca - c^2) +$$
$$\frac{\pi \cdot \overline{GF}}{3}(cb + b^2 - ca - a^2)$$

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{FE}}{3}[(b^2 - c^2) + a(b - c)] +$$
$$\frac{\pi \cdot \overline{GF}}{3}[(b^2 - a^2) + c(b - a)]$$

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{FE}}{3}(b - c)(b + c + a) +$$
$$\frac{\pi \cdot \overline{GF}}{3}(b - a)(b + a + c)$$

oder

d) $V = \frac{\pi(a + b + c)}{3} \cdot [\overline{FE}(b - c) + \overline{GF}(b - a)]$

Berücksichtigt man nun, dass nach der Erkl. 702 für:

$$\overline{FE}(b - c) + \overline{GF}(b - a) = 2 \cdot \triangle ABC$$

gesetzt werden kann, so geht vorstehende Gleichung d) über in:

$$V = \frac{\pi(a + b + c)}{3} \cdot 2 \cdot \triangle ABC$$

oder

A) . . . $V = \frac{2}{3}(a + b + c)\pi \cdot \triangle ABC$

(siehe die Erkl. 703 bis 706).

und hieraus erhält man:

$$2d - 2c = 3s - 3c$$

oder

$$\text{b)} \ldots s = \frac{2d + c}{3}$$

Da ferner $\overline{OP} = d = \frac{a+b}{2}$ als Mittellinie des Paralleltrapezes $ABFE$ ist, so erhält man schliesslich aus Gleichung b):

$$\text{c)} \ldots s = \frac{a + b + c}{3}$$

**Erkl. 705.** Die in der Erkl. 703 aufgestellte Formel kann man auch herleiten, wenn man, siehe Figur 238, die drei ringförmigen Rotationskörper addiert, welche durch Rotation der drei (inhaltsgleichen) Dreiecke $SAB$, $SBC$ und $SAC$ entstehen und diese erhaltene Summe gleich dem mittels umstehender Auflösung durch Gleichung A) gefundenen Ausdruck setzt.

**Erkl. 706.** Denkt man sich den nach vorstehender Aufgabe erzeugten, ringförmigen Rotationskörper, nach einer Erzeugungsfigur aufgeschnitten und gestreckt, so erhält man ein schief abgeschnittenes, dreiseitiges Prisma, dessen Normalschnitt gleich jener Erzeugungsfigur, bezw. gleich dem Dreieck $ABC$, s. Figur 237 ist, und dessen Seitenkanten gleich den Kreisumfängen $2a\pi$, $2b\pi$ und $2c\pi$ sind, welche die Eckpunkte bei der Rotation beschreiben. Nach der in der Erkl. 546 aufgestellten Formel für ein schiefes und schief abgeschnittenes Prisma:

$$V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$$

erhält man hiernach:

$$V = \triangle \cdot ABC \cdot \frac{2a\pi + 2b\pi + 2c\pi}{3}$$

oder $V = \frac{2}{3}(a+b+c)\,\pi \cdot \triangle\, ABC$

nämlich ebenfalls die in umstehender Auflösung aufgestellte Gleichung A).

---

## c). Erklärungen über die Guldinischen Regeln, und gelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern mittels der Guldinischen Regel.

**Erkl. 707.** Die Berechnung des Volumens eines jeden Rotationskörpers, bezw. eines jeden solchen Körpers, welchen man sich durch Rotation einer ebenen Figur um eine in der Ebene derselben liegende Gerade als Drehachse erzeugt denken kann, kann nach der sogen. Guldinischen Regel oder der sogen. barycentrischen Methode ausgeführt werden.

**Die Guldinische Regel heisst:**

„Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich der Anzahl von Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man den Inhalt $F$ der Erzeugungsfigur mit dem Weg multipliziert, welchen der Schwerpunkt derselben bei der Rotation zurücklegt.“

Bezeichnet man den Inhalt der Erzeugungsfigur eines Rotationskörpers mit $F$, den Abstand des Schwerpunkts derselben von der Drehachse mit $s$, also den Weg, welchen der Schwerpunkt bei einer ganzen Umdrehung jener Erzeugungsfigur zurücklegt mit $2s\pi$ und das Volumen mit $V$, so besteht hiernach die Formel:

1) . . . $V = 2s\pi \cdot F$

(Siehe die Erkl. 708 bis 710).

**Erkl. 708.** Die Berechnung der Flächeninhalte von Rotationsflächen, bezw. die Berechnung der Inhalte der krummen Begrenzungsflächen von Rotationskörpern, kann nach der erweiterten Guldinischen Regel (siehe Erkl. 707) ausgeführt werden.

Diese zur Berechnung des Inhalts von Rotationsflächen erweiterte Guldinische Regel heisst:

„Der Flächeninhalt einer Rotationsfläche ist gleich der Anzahl von Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man die Länge der erzeugenden Linie mit dem Weg multipliziert, welchen der Schwerpunkt derselben bei der Rotation zurücklegt.“

Bezeichnet man die Länge der eine Rotationsfläche erzeugenden Linie mit $L$, den Abstand des Schwerpunkts derselben von der Drehachse mit $s$, also den Weg, welchen der Schwerpunkt bei einer ganzen Umdrehung jener erzeugenden Linie zurücklegt, mit $2s\pi$ und den Inhalt jener Rotationsfläche mit $F$, so besteht hiernach die Formel:

1) . . . $F = 2s\pi \cdot L$

**Erkl. 709.** Die Guldinische Regel wurde von dem griechischen Mathematiker Pappus entdeckt, von dem Jesuiten Guldin, dessen Namen sie trägt, ausgearbeitet und 1635 veröffentlicht.

**Erkl. 710.** Der allgemeine Beweis der Richtigkeit der in den Erklärungen 707 und 708 erwähnten Guldinischen Regeln gehört in das Gebiet der Mechanik (siehe Kleyers Lehrbuch der Mechanik).

In den Erkl. 671, 678, 683, 700, 703 ist die Richtigkeit der in der Erkl. 707 aufgestellten Formel; ferner ist in den Erkl. 676, 682, 686 und 698 die Richtigkeit der in der Erkl. 708 aufgestellten Formel für einige besondere Fälle, welche sich elementar behandeln lassen, dargethan.

**Erkl. 711.** Da es bei der Anwendung der in der Erkl. 707 aufgestellten Guldinischen Regel auf die Entfernung des Schwerpunkts der Erzeugungsfigur von einer bestimmten Geraden ankommt, so sind im nachstehenden die Entfernungen der Schwerpunkte einer der wichtigsten, ebenen Figuren von einer bestimmten Geraden angegeben (siehe die Erkl. 713).

a). Für ein Dreieck. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts eines Dreiecks von einer Seite desselben, mit $h$ die zu dieser Seite gehörige Höhe, so ist:

1) . . . $s = \frac{1}{3} h$ (s. Erkl. 681)

b). Für ein beliebiges Parallelogramm. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts eines beliebigen Parallelogramms von einer Seite desselben, mit $h$ die zu dieser Seite gehörige Höhe, so ist:

2) . . . $s = \frac{1}{2} h$ (s. Erkl. 675)

c). Für ein Paralleltrapez. Bezeichnet man mit $a$ und $b$ ($a > b$) die parallelen Seiten eines Paralleltrapezes, mit $h$ die Höhe desselben, mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts von der grösseren jener parallelen Seiten (von $a$), so ist:

3) . . . $s = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)}$ (s. Erkl. 685)

d). Für einen Halbkreis. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts von dem Mittelpunkt des Halbkreises, mit $r$ den Radius desselben, so ist:

4) . . . $s = \frac{4}{3\pi} r$ oder annähernd

4a) . . $s = \frac{14}{33} r$

e). Für einen Kreisausschnitt oder Kreissektor. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts von dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, mit $r$ den Radius und mit $\alpha$ den zugehörigen Centriewinkel, bezw. den zu dem Centriewinkel $\alpha$ gehörigen Kreisbogen, so ist:

5) . . . $s = \frac{4}{3} r \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$ *)

oder, wenn man mit $F$ den Inhalt des Kreisausschnitts und mit $a$ die Sehne bezeichnet, welche zu dem den Kreissektor begrenzenden Bogen gehört:

5a) . . $s = \frac{a \cdot r^2}{3F}$

f). Für einen Quadranten. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts von dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, mit $r$ den Radius desselben, so ist:

6) . . . $s = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot r$

oder annähernd:

6a) . . $s = 0{,}6002 \cdot r$

g). Für einen Sextanten. Bei denselben Bezeichnungen wie vorhin ist:

7) . . . $s = \frac{2}{\pi} \cdot r$

oder annähernd:

7a) . . $s = 0{,}6366 \cdot r$

h). Für einen Kreisabschnitt oder ein Kreissegment. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts von dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, mit $F$ den Inhalt, mit $a$ die zugehörige Sehne, so ist:

8) . . . $s = \frac{a^3}{12F}$

i). Für ein Kreisringstück. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts von dem Mittelpunkt der zugehörigen konzentrischen Kreise, bezw. mit $R$ und $r$ die Radien derselben, mit $\alpha$ den zugehörigen Centriewinkel, bezw. den zugehörigen Bogen, so ist:

9) . . . $s = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$

oder wenn man den mittleren Halbmesser $\frac{R+r}{2} = \varrho$ und die Breite des Rings, nämlich $R - r = b$ setzt:

9a) . . $s = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\left[2 + \frac{1}{6}\left(\frac{b}{\varrho}\right)^2\right] \cdot r$

*) Stereometrische Aufgaben, welche die Anwendung der Trigonometrie erfordern, sind in dem 3. Buch der Körperberechnungen enthalten.

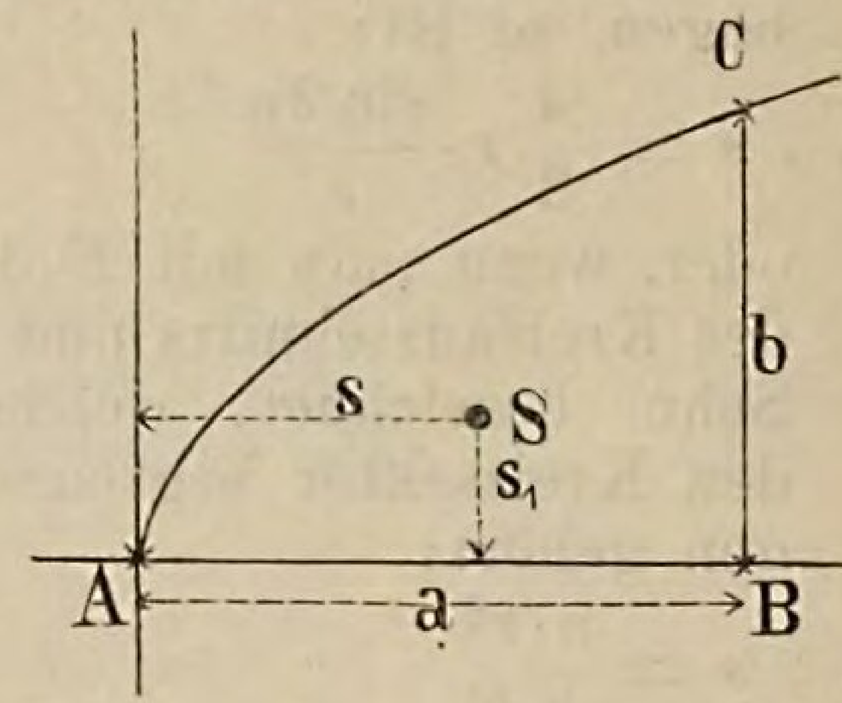
k). Für ein **Parabelsegment** von der durch die Figur 239 dargestellten Form (s. die Erkl. 717 u. 718). Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts $S$ des durch die Figur 239 dargestellten Parabelsegments von der durch ihren Scheitel $A$ gehenden und zur Richtungslinie $AB$ senkrechten Achse, und mit $a$ die Entfernung des Scheitels $A$ von der das Segment begrenzenden, zur Richtungslinie senkrechten Sehne $BC$, so ist:

10) . . . $s = \frac{3}{5} a$

Bezeichnet man ferner mit $s_1$ die Entfernung des Schwerpunkts $S$ von der Richtungslinie $AB$ und mit $b$ die das Segment begrenzende, zur Richtungslinie $AB$ senkrechte Sehne $BC$, so ist:

10a) . . $s_1 = \frac{3}{8} b$

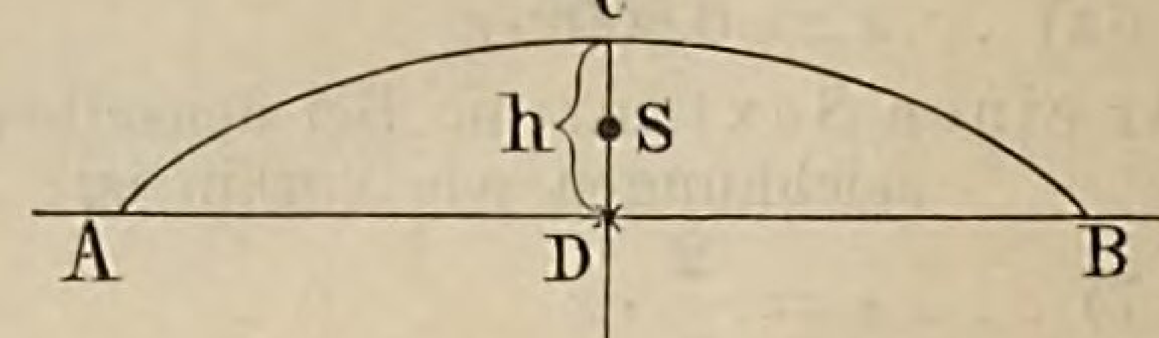
Figur 239.




l). Für ein **Parabelsegment** von der durch die Figur 240 dargestellten Form (s. die Erkl. 717 und 720). Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts $S$ von der Sehne $AB$, siehe Figur 240, mit $h$ die Höhe $cD$ desselben, so ist:

11) . . . $s = \frac{2}{5} \cdot h$

Figur 240.



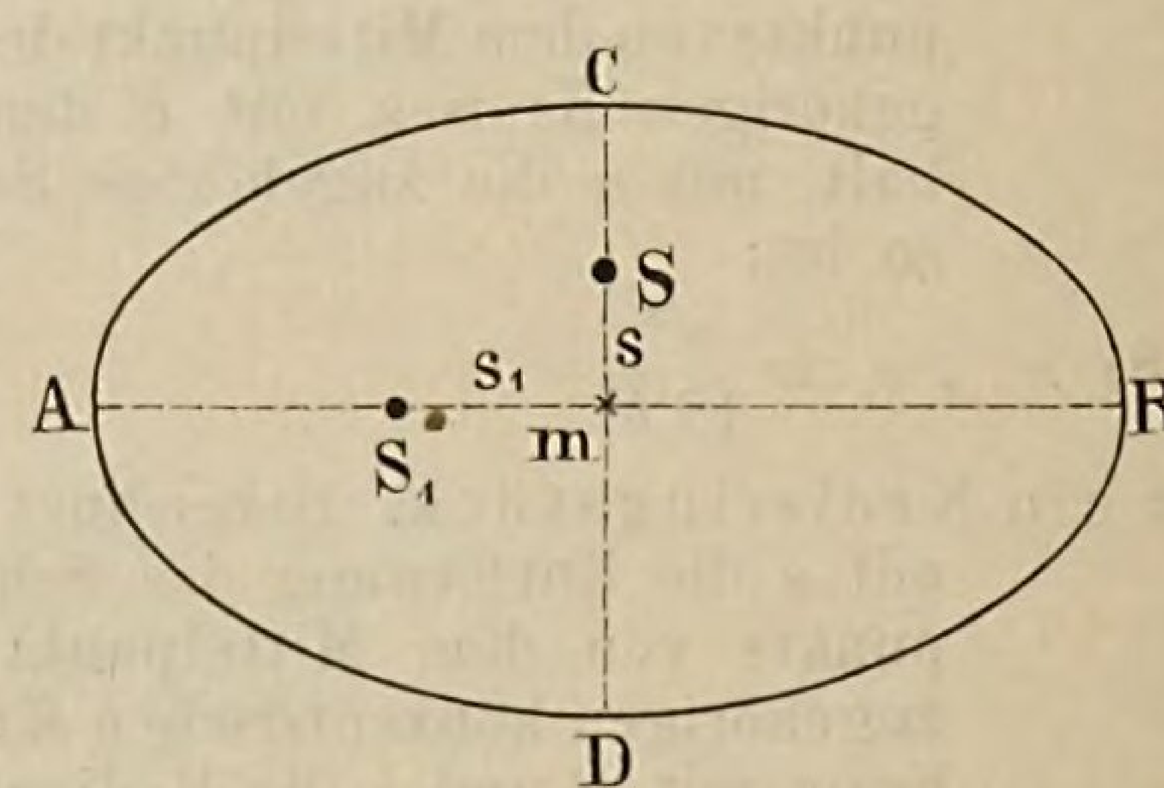

m). Für eine **Ellipse** (siehe die Erkl. 726). Bezeichnet man, siehe Figur 241, mit $s$ die Entfernung $Sm$ des Schwerpunkts $S$ der halben Ellipse $ABC$ von der grossen Achse $AB$, die halbe kleine Achse mit $b$, so ist:

12) . . . $s = \frac{4}{3\pi} \cdot b$

Bezeichnet man ferner mit $s_1$ die Entfernung $S_1 m$ des Schwerpunkts $S_1$ der halben Ellipse $DAC$ von der kleinen Achse $CD$, die halbe grosse Achse mit $a$, so ist:

12a) . . $s_1 = \frac{4}{3\pi} \cdot a$

Figur 241.




Der Schwerpunkt der **ganzen** Ellipse liegt im Schnittpunkt beider Achsen.

**Erkl. 712.** Da es bei der Anwendung der in der Erkl. 708 aufgestellten erweiterten Guldinischen Regel auf die Entfernung des Schwerpunkts der erzeugenden Linie von einer bestimmten Geraden ankommt, so sind nachstehend die Entfernungen des Schwerpunkts einige der wichtigsten Linien von einer Geraden angegeben (siehe die Erkl. 713):

a) Für eine **Strecke**, bezw. für eine **beiderseits begrenzte Gerade**. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung

des Schwerpunkts einer Strecke von einer Geraden, mit $a$ die Entfernung des Mittelpunkts jener Strecke von dieser Geraden, so ist:

1) . . . $s = a$

b). Für einen Kreisbogen. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts eines Kreisbogens von dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, mit $r$ den Radius dieses Kreises, mit $a$ die zugehörige Sehne und mit $b$ die Länge jenes Kreisbogens, so ist:

2) . . . $s = \frac{a \cdot r}{b}$

oder, wenn $\alpha$ den in Grade ausgedrückten Kreisbogen bedeutet:

2a) . . $s = \frac{2r \sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$

c). Für einen halbkreisförmigen Bogen. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts eines halbkreisförmigen Bogens von dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, mit $r$ den Radius desselben, so ist:

3) . . . $s = \frac{2}{\pi} r$

d). Für einen gedrückten, bezw. für einen sehr flachen Kreisbogen. Bezeichnet man mit $s$ die Entfernung des Schwerpunkts eines gedrückten, bezw. eines sehr flachen Kreisbogens von dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, mit $r$ den Radius des letzteren, mit $b$ die Länge des Bogens, so ist:

4) . . . $s = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{8 \cdot r}$

oder wenn $h\left(= \frac{b^2}{8r}\right)$ die Bogenhöhe bedeutet:

4a) . . $s = \frac{1}{3} h$

**Erkl. 713.** Ueber die Bestimmung der Schwerpunkte von Linien, Flächen und Körpern findet man ausführliches in Kleyers Lehrbuch der Mechanik.

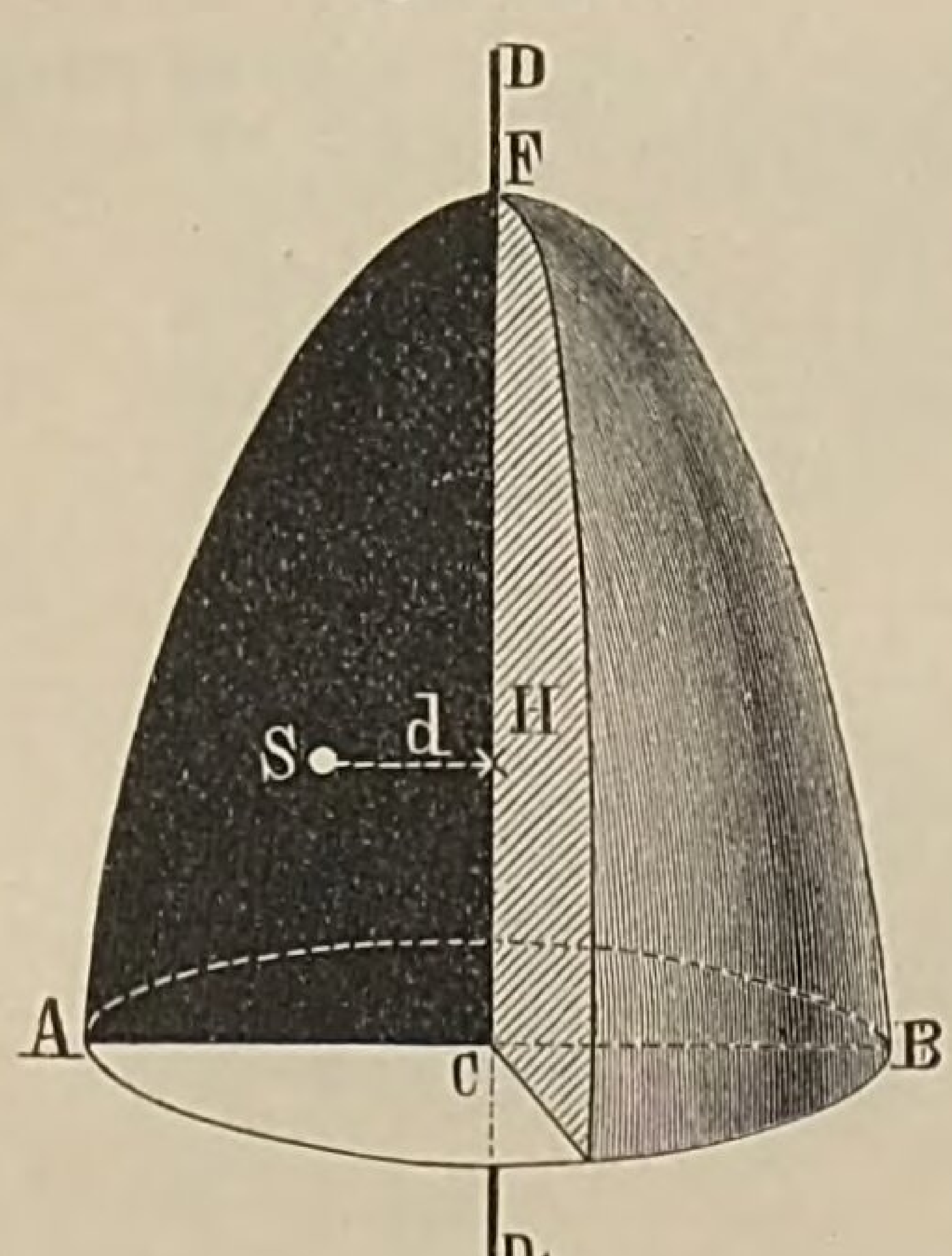
**Erkl. 714.** Wie in den Erkl. 671, 678, 683, 700 und 703 gezeigt ist, kann man aus den früher entwickelten Kubikinhaltsformeln eines Cylinders, eines Kegels, eines Kegelstumpfs, einer Kugel etc., die in der Erkl. 707 aufgestellte Guldinische Formel ableiten; umgekehrt kann man auch aus der in der Erkl. 707 aufgestellten Guldinischen Formel, welche für alle Rotationskörper, also auch für jene Körper Gültigkeit hat, die für diese Körper früher entwickelten Formeln herleiten.

**Erkl. 715.** Wie in den Erkl. 676, 682, 686 und 698 gezeigt ist, kann man aus den früher entwickelten Formeln für den Mantel eines Cylinders, Kegels, Kegelstumpfs etc., die in der Erkl. 708 aufgestellte, erweiterte Guldinische Formel ableiten; umgekehrt kann man auch aus der in der Erkl. 708 aufgestellten Guldinischen Formel, welche für alle Rotationsflächen, also auch für jene Rotationsflächen Gültigkeit hat, die für jene krummen Flächen früher entwickelten Formeln herleiten.

---

**Aufgabe 736.** Wie gross ist das Volumen eines Paraboloids, welches man sich durch Rotation einer Parabelfläche um ihre Achse entstanden denken kann, wenn die Höhe des Paraboloids $= H$ und der Radius des Grundkreises $= R$ gegeben sind?

Figur 242.




**Erkl. 716.** Unter einem Konoid im allgemeinen versteht man jeden kegelförmigen Körper, den man sich durch Rotation einer Kurve erzeugt denken kann. Speziell unter einem parabolischen Konoid oder einem Paraboloid versteht man einen Rotationskörper, der durch Rotation einer gemeinen oder apollonischen Parabel, um ihre Achse entsteht (siehe Erkl. 717).

**Erkl. 717.** Unter einer gemeinen oder apollonischen Parabel, siehe Fig. 243 und Erkl. 718, versteht man eine solche krumme Linie $BAC$, welche die Eigenschaft hat, dass sämtliche in derselben liegende Punkte von einem festen Punkt $F$, dem sogenannten Brennpunkt und von einer nicht durch diesen Punkt gehenden, geraden Linie $GH$, Leitlinie oder Direktrix genannt, gleichweit entfernt ist.

Die Linie $JK$, welche durch den Brennpunkt $F$ geht und senkrecht zur Leitlinie $GH$ steht,

**Formel:**

$$V = 2s\pi \cdot F \text{ (s. Erkl. 707).}$$

**Auflösung.** Ist, siehe Figur 242, $FAB$ das zu berechnende Paraboloid, dessen Höhe $FC = H$ und dessen Grundflächenradius $AC = R$ gegeben sind, und welches auch parabolisches Konoid genannt wird (s. Erkl. 716 bis 720), so kann man sich dasselbe durch Rotation der Parabelfläche $FAC$ um die Linie $FC$ als Drehachse entstanden denken, mithin kann man zur Berechnung des Volumens desselben vorstehende Formel:

$$V = 2s\pi \cdot F$$

benutzen.

Setzt man in derselben:

$$s = \overline{Sd} = \frac{3}{8}\overline{AC} = \frac{3}{8}R,$$ nämlich gleich der Entfernung $Sd$ des Schwerpunkts $S$ von der Achse $FC$ (siehe Gleichung 10a) in der Erkl. 711)

$$F = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}\cdot R\cdot H,$$ nämlich gleich dem Flächeninhalt der Parabelfläche $FAC$, siehe Erkl. 718

so erhält man für das gesuchte Volumen:

$$V = 2\cdot\frac{3}{8}R\cdot\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot R\cdot H$$

oder

$$\text{A)} \;\ldots\; V = \frac{1}{2}R^2\pi\cdot H \quad \text{(s. die Erkl. 721).}$$

heisst Richtungslinie oder Achse. Der auf der Achse $JK$ liegende Punkt $A$ der Parabel heisst Scheitelpunkt.

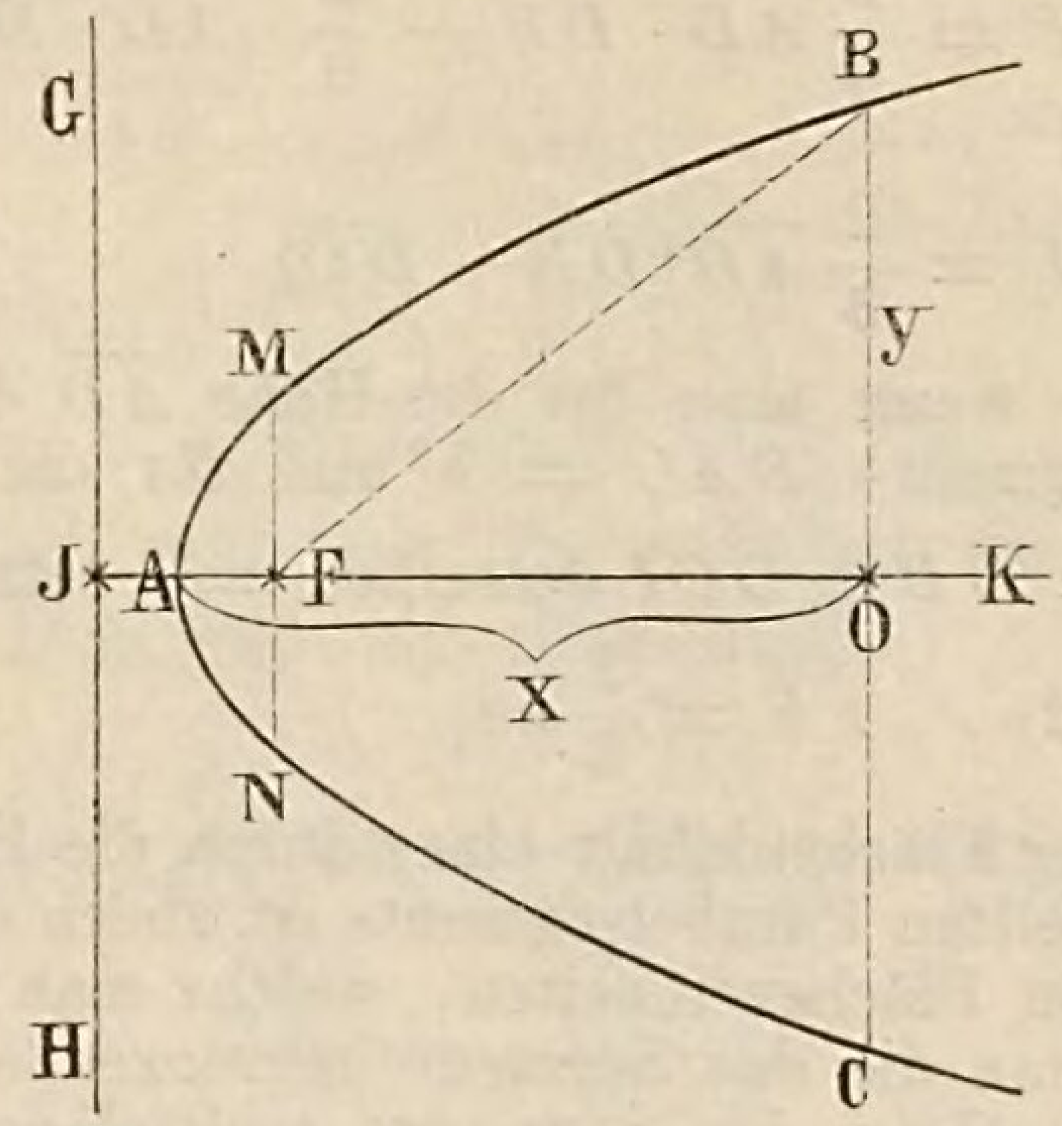
Die Senkrechte $MN$, welche durch den Brennpunkt $F$ geht und senkrecht zur Achse $JK$ ist, heisst Parameter.

Nach der Definition der Parabel ist der Scheitel $A$ gleichweit von dem Brennpunkt $F$ und der Leitlinie $GH$ entfernt, mithin ist das Parameter doppelt so gross als die Entfernung $FJ$ des Brennpunkts $F$ von der Leitlinie $GH$ oder viermal so gross als die Entfernung $AJ$ zwischen dem Scheitel $A$ und dem Brennpunkt $F$.

Jede vom Brennpunkt $F$ nach einem Punkt der Parabel, z. B. nach $B$, gezogene Linie $FB$ heisst Leitstrahl oder radius vector.

Jede der Achse $JK$ parallel gezogene Gerade heisst Durchmesser der Parabel.

Figur 243.




**Erkl. 718.** Bezeichnet man die von beliebigen Punkten einer Parabel auf die Achse gefällten Senkrechten mit dem Namen Ordinaten und die Abstände der Fusspunkte dieser Senkrechten (der Ordinaten) von dem Scheitel $A$ mit dem Namen Abscissen (Scheitelabscissen), so hat man für den Inhalt $F$ einer Parabelfläche, welche von einer Abscisse $x$ und der zugehörigen Ordinate $y$ begrenzt wird, die Relation:

$$F = \frac{2}{3} x \cdot y$$

(s. Kleyers Lehrbuch der analytischen Geometrie).

**Erkl. 719.** Bezeichnet man die von einem beliebigen Punkt einer Parabel auf deren Achse gefällte Senkrechte (Ordinate) mit $y$, den Abstand des Fusspunkts derselben vom Scheitel $A$ der Parabel mit $x$ (Abscisse), den Parameter $MN$ mit 2p, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

$$y^2 = 2px$$

Diese Gleichung heisst Scheitelgleichung der Parabel (s. Kleyers Lehrbuch der analytischen Geometrie).

**Erkl. 720.** Hat man, siehe Fig. 244, einen Bogen $BAC$, dessen Höhe $AD$ gegen die Sehne $BC$ des Bogens sehr klein ist, welches also ein sogenannter gedrückter Parabelbogen oder ein gedrückter Kreisbogen etc. ist, so hat man für die Länge $L$ des Bogens $BAC$ annähernd:

$$1) \;\ldots\; L = s\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{s}\right)^2\right]$$

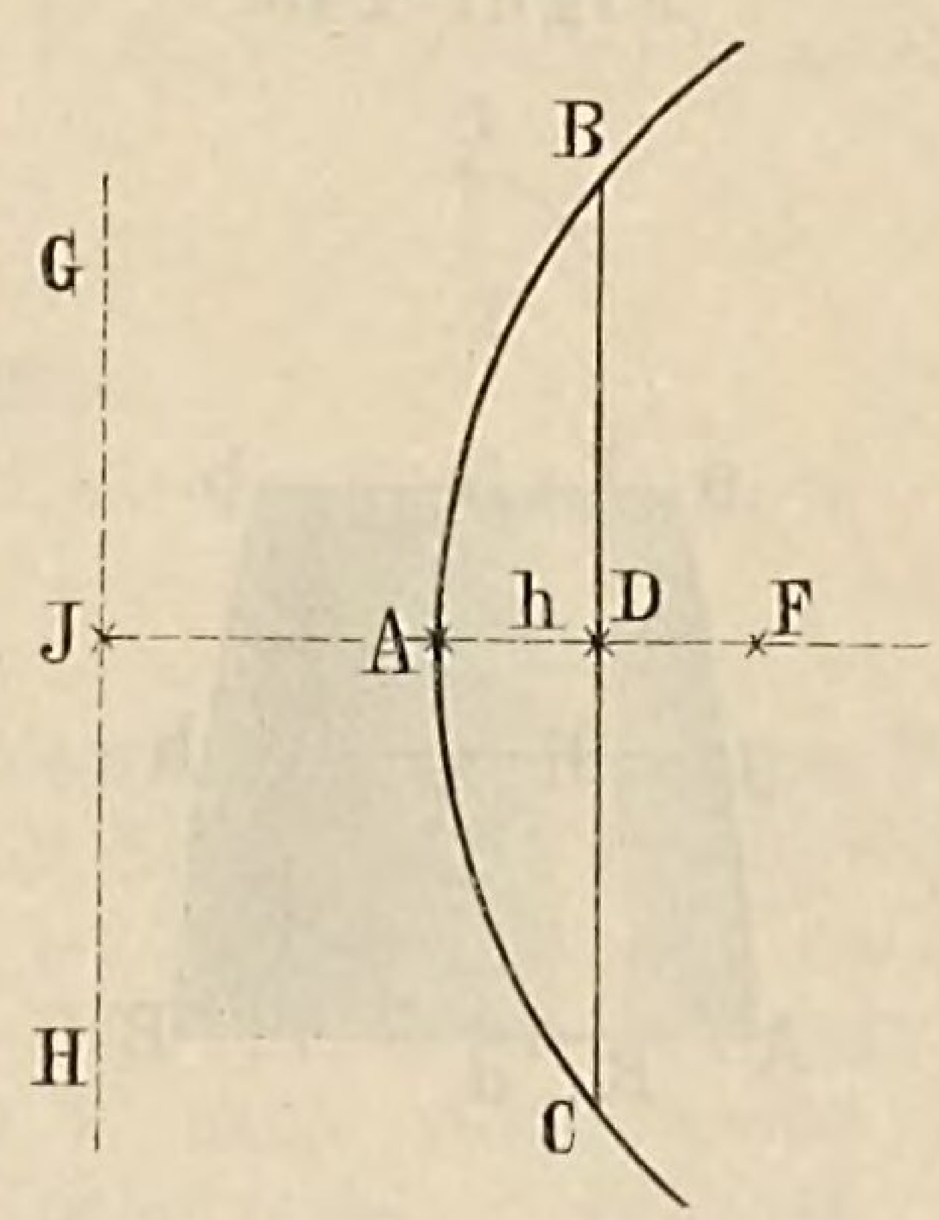
in welcher Gleichung $h$ die Höhe $AD$ und $s$ die Länge der zu jenem Bogen gehörigen Sehne $BC$ bedeutet.

Für den Inhalt $F$ einer durch die Fig. 244 dargestellten Parabelfläche $BAC$ hat man, wenn man in der in der Erkl. 718 aufgestellten Formel:

$$F = \frac{2}{3} xy$$

$$x = \overline{AD} \text{ und } y = \overline{DB}, \text{ bezw.} = \overline{DC}$$

Figur 244.



setzt:

$$F = \frac{2}{3}\overline{AD}\cdot\overline{DB} + \frac{2}{3}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DC}$$

oder

$$F = \frac{2}{3}\overline{AD}(\overline{DB}+\overline{DC})$$

mithin, wenn man für die Höhe $\overline{AD}$ des Parabelsegments $BAC = h$ und für die Sehne $\overline{BC}\,(=\overline{DB}+\overline{DC})$ desselben $= s$ setzt:

$$2)\;\ldots\; F = \frac{2}{3}hs$$

d. h. der Flächeninhalt eines durch die Fig. 244 dargestellten Parabelsegments ist gleich der Anzahl von Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man die das Segment begrenzende Sehne mit der Höhe des Segments multipliziert und $^2/_3$ von dem somit erhaltenen Produkte nimmt.

**Erkl. 721.** Bezeichnet man die Höhe des durch die Fig. 242 dargestellten Paraboloids mit $H$, den Radius des Grundkreises mit $R$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in umstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Relation:

$$1)\;\ldots\; V = \frac{1}{2}R^2\pi\cdot H$$

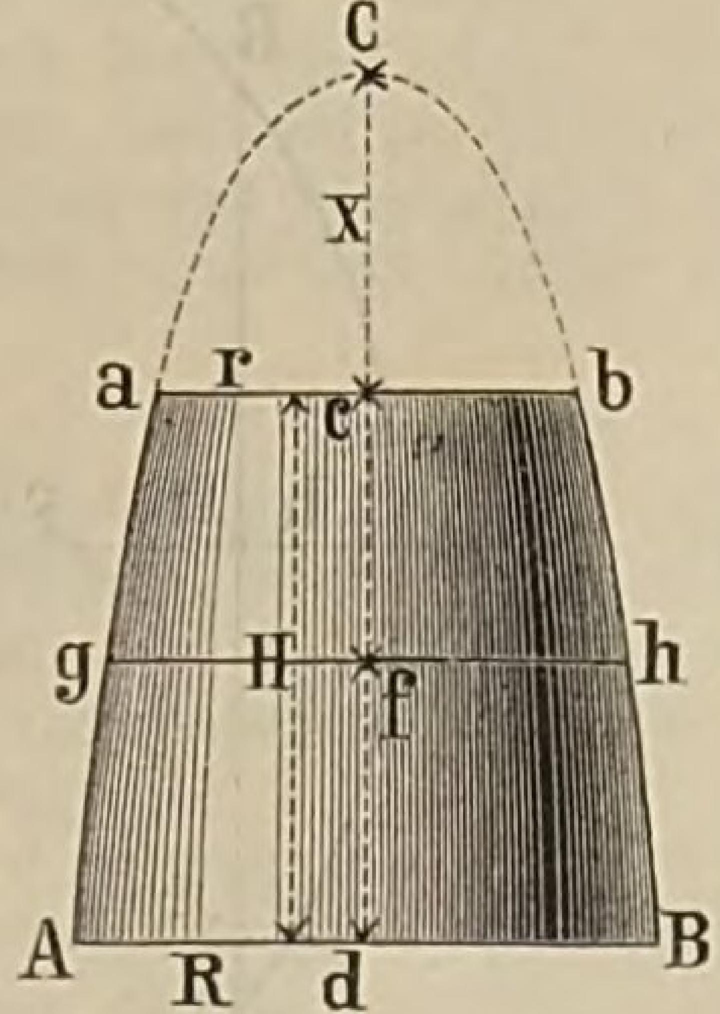
d. h. das Volumen eines durch die Fig. 242 dargestellten Paraboloids ist gleich dem Inhalt $R^2\pi$ von dessen Grundfläche $G$ multipliziert mit der halben Höhe $H$, in Zeichen:

$$2)\;\ldots\; V = \frac{G\cdot H}{2}$$

---

**Aufgabe 737.** Wie gross ist das Volumen eines Paraboloidenstumpfs, wenn die Höhe desselben $= H$, der Inhalt der unteren (grösseren) Grundfläche $= G$ und der Inhalt der oberen Grundfläche $= g$ ist?

Figur 245.




**Formel:**

$$V = \frac{G\cdot H}{2} \quad \text{(s. Erkl. 721).}$$

**Auflösung.** Das gesuchte Volumen $V$ des durch die Figur 245 dargestellten Paraboloidenstumpfs (siehe Erkl. 722) kann man als die Differenz des Paraboloids $CAB$ und des Paraboloids $Cab$ betrachten.

Nach vorstehender Formel hat man somit, wenn man die unbekannte Höhe $Cc$ des Paraboloids $Cab$ mit $x$ bezeichnet:

$$1)\;\ldots\; V = \frac{G\cdot(H+x)}{2} - \frac{g\cdot x}{2}$$

Zur Bestimmung von $x$ beachte man, dass nach der Erkl. 723 zwischen dem Radius $\overline{Ad}$, dem Radius $\overline{ac}$, der Höhe $\overline{dc}+\overline{Cc}$ oder $(H+x)$ und der Höhe $\overline{cC}$ oder $x$ die Relation besteht:

$$a)\;\ldots\; \overline{Ad}^2 : \overline{ac}^2 = (H+x):x$$

**Erkl. 722.** Unter einem Paraboloidenstumpf, siehe Figur 245, versteht man den Teil eines Paraboloids, welcher zwischen der Grundfläche desselben und einer durch das Paraboloid zu jener Grundfläche parallel gelegten Ebene liegt.

**Erkl. 723.** Nach der in der Erkl. 719 angeführten Scheitelgleichung einer Parabel hat man zwischen der Ordinate $y$ und der zugehörigen Abscisse $x$ die Beziehung:

a) . . . $y^2 = 2px$

und zwischen der Ordinate $y_1$ und der zugehörigen Abscisse $x_1$ die analoge Beziehung:

b) . . . $y_1^2 = 2px_1$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

1) . . . $\dfrac{y^2}{y_1^2} = \dfrac{x}{x_1}$

**Erkl. 724.** Aus der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichung b) ergibt sich der Satz, dass sich die Inhalte paralleler Schnittfiguren eines Paraboloids wie die Entfernungen derselben von dem Scheitel des Paraboloids ververhalten.

**Erkl. 725.** Bezeichnet man den Inhalt der grösseren Grundfläche eines Paraboloidenstumpfs mit $G$, den Inhalt der kleineren Grundfläche desselben mit $g$, die Höhe des Stumpfs mit $H$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$V = \frac{H}{2}(G + g)$$

Formt man diese Proportion wie folgt um:

b) . . . $\overline{Ad}^2 \cdot \pi : \overline{ac}^2 \cdot \pi = (H + x) : x$ (s. die Erkl. 724)

und setzt $\overline{Ad}^2 \cdot \pi = G$

und $\overline{ac}^2 \cdot \pi = g$

so erhält man für die unbekannte Höhe $x$ die Bestimmungsgleichung:

2) . . . $G : g = (H + x) : x$

Diese Gleichung nach $x$ aufgelöst, gibt:

$$G \cdot x = gH + gx$$
$$G \cdot x - gx = gH$$
$$x(G - g) = gH$$

oder

3) . . . $x = \dfrac{gH}{G - g}$

Aus den Gleichungen 1) und 3) folgt:

$$V = \frac{G}{2}\left(H + \frac{gH}{G-g}\right) - \frac{g}{2} \cdot \frac{gH}{G-g}$$

oder

$$V = \frac{H \cdot G}{2} + \frac{H \cdot G \cdot g}{2(G-g)} - \frac{H \cdot g^2}{2(G-g)}$$

$$V = \frac{H}{2} \cdot \frac{G(G-g) + G \cdot g - g^2}{G-g}$$

$$V = \frac{H}{2} \cdot \frac{G - Gg + G \cdot g - g^2}{G-g}$$

$$V = \frac{H}{2} \cdot \frac{G^2 - g^2}{G-g}$$

$$V = \frac{H}{2} \cdot \frac{(G+g)(G-g)}{G-g}$$

oder

A) . . . $V = \dfrac{H}{2} \cdot (G + g)$ (s. die Erkl. 725).

---

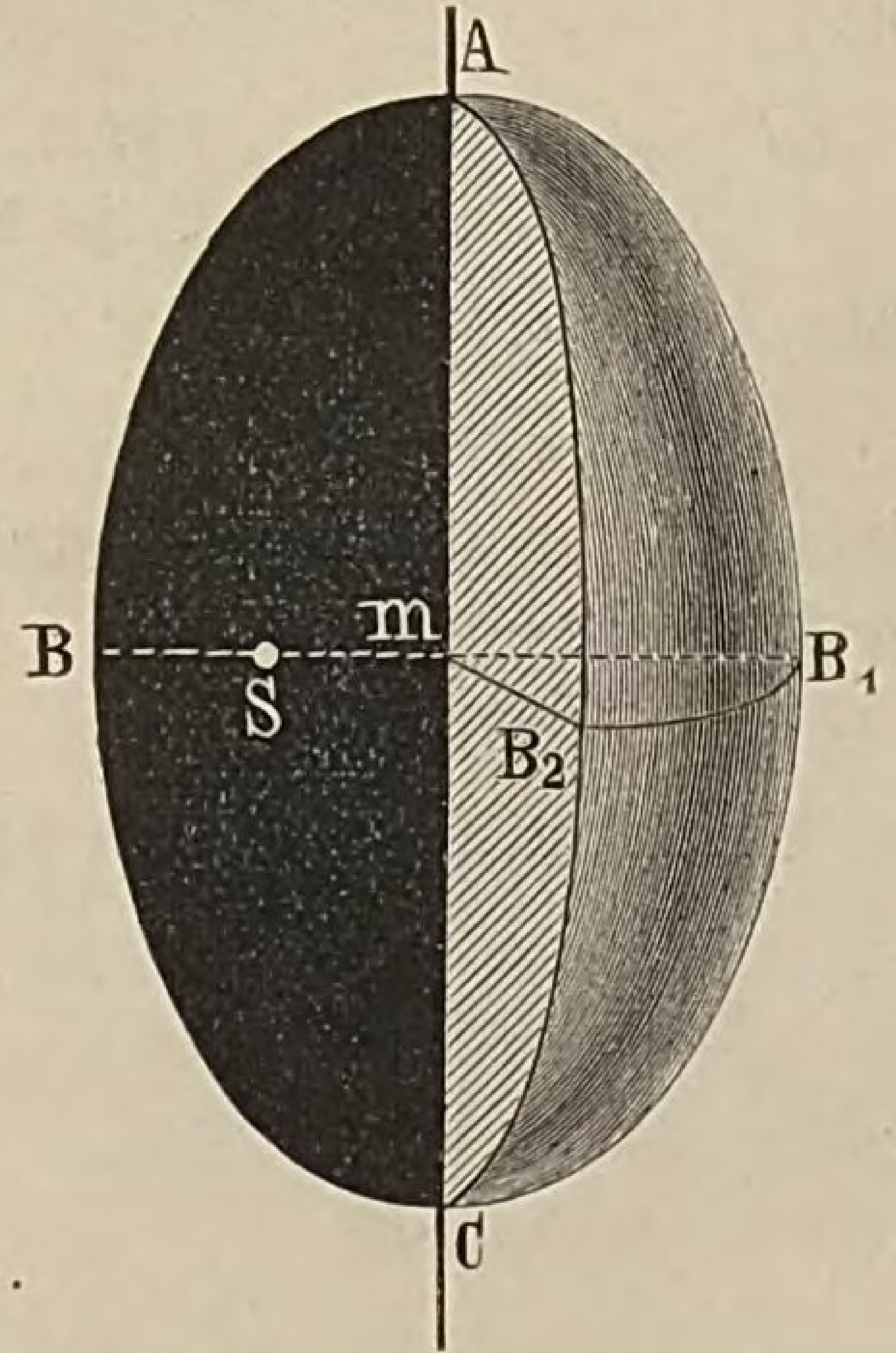
**Aufgabe 738.** Man berechne das Volumen eines Ellipsoids, welches durch Rotation einer Ellipse um ihre grosse Achse entstanden ist, wenn die halbe grosse Achse der erzeugenden Ellipse $= a$, die halbe kleine Achse derselben $= b$ gegeben ist.

**Formel:**

$V = 2s\pi \cdot F$ (s. Erkl. 707).

**Auflösung.** Rotiert, siehe Fig. 246, die halbe Ellipse $ABC$ (s. die Erkl. 726) um ihre grosse Achse $AC$, so entsteht (s. Erkl. 727) ein Rotationskörper, dessen Volumen $V$ nach vorstehender Guldinischer Körperregel berechnet werden kann.

Figur 246.




Setzt man in derselben:

a) . . . $s = \overline{Sm} = \frac{4}{3\pi} \cdot b$, nämlich gleich der Entfernung des Schwerpunkts $S$ jener halben Ellipse von der Rotationsachse $AC$, s. Gleich. 12 in der Erkl. 711.

und

b) . . . $F = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{2}$ nämlich gleich dem Inhalt der halben Ellipse $ABC$, siehe Erkl. 728

so erhält man:

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3\pi} b \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot b \cdot \pi}{2}$$

oder

A) . . . $V = \frac{4}{3} ab^2\pi$ (s. die Erkl. 729).

**Erkl. 726.** Unter einer elliptischen Linie, kurzweg auch Ellipse genannt, siehe Figur 247, versteht man eine solche krumme Linie $ABCD$, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe der Entfernungen, wie z. B. $Fp$ und $F_1p$ eines jeden auf ihr liegenden Punktes $p$ von zwei bestimmten innerhalb der Kurve liegenden Punkten $F$ und $F_1$, den sogenannten Brennpunkten, konstant ist.

Verbindungslinien wie $Fp$ und $F_1p$ heissen Leitstrahlen oder Fahrstrahlen.

Die Gerade $AC$, welche die Brennpunkte $F$ und $F_1$ enthält, heisst grosse Achse.

Die in der Mitte $m$ der grossen Achse $AC$ errichtete Senkrechte $BD$ heisst kleine Achse.

Die Endpunkte $A$ und $C$ der grossen Achse heissen die Scheitel der Ellipse.

Die Entfernung eines der Brennpunkte $F$ und $F_1$ von dem Mittelpunkt $m$ heisst die Excentricität der Ellipse.

Die grosse Achse ist stets gleich der Summe der Leitstrahlen, welche man von einem beliebigen Punkt der Ellipse nach den Brennpunkten $F$ und $F_1$ ziehen kann; hieraus ergibt sich, dass $\overline{FB} = \overline{F_1B} = \frac{\overline{AC}}{2}$ ist.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $FmB$ ergibt sich ferner:

$$\overline{Fm} = \sqrt{\overline{FB}^2 - \overline{Bm}^2}$$

oder

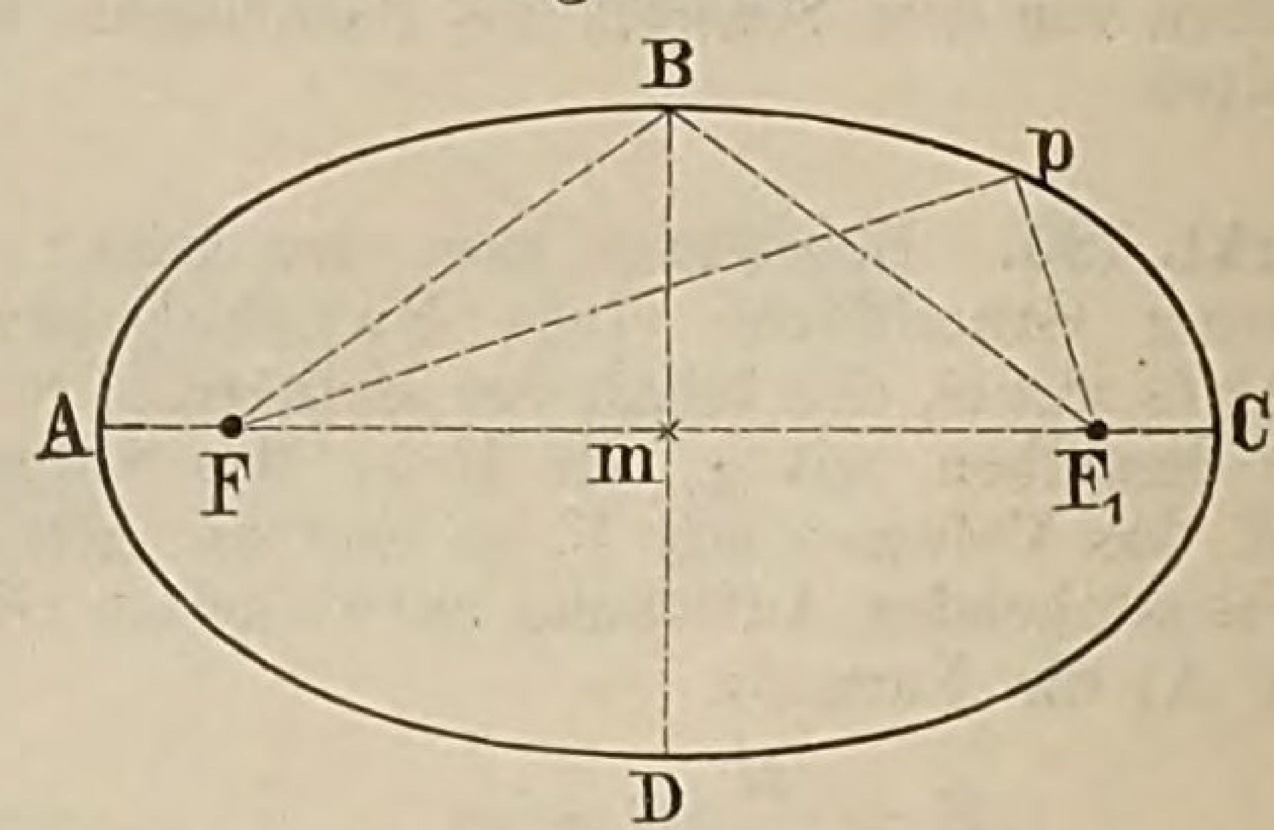
$$\overline{Fm} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2}$$

und, wenn man die halbe grosse Achse $AC = a$, die halbe kleine Achse $BD = b$ und die Excentricität $Fm$ mit $e$ bezeichnet:

1) . . . $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

**Erkl. 727.** Rotiert eine Ellipse um ihre grosse Achse, so entsteht das durch die Figur 246 dargestellte längliche oder eiför-

Figur 247.



mige Ellipsoid (Sphäroid). Rotiert hingegen eine Ellipse um ihre kleine Achse, so entsteht das durch die Figur 248 dargestellte abgeplattete oder linsenförmige Ellipsoid (Sphäroid).

**Erkl. 728.** Für den Flächeninhalt $F$ einer Ellipse, d. i. eine ebene Figur, welche von einer elliptischen Linie (s. Erkl. 726) begrenzt wird, hat man, wenn $a$ die halbe grosse Achse, $b$ die halbe kleine Achse und $\pi$ die irrationale Zahl 3,1415··· bedeutet, die Relation:

1) . . . $F = a \cdot b \cdot \pi$

Die Berechnung des Umfangs einer Ellipse geschieht mittels der Formel:

2) . . . $U = 2a\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \cdots\right]$

in welcher $a$ die halbe grosse Achse und $e$ die Excentricität [siehe Gleichung 1) in der Erkl. 726] bedeutet. Je weiter die in vorstehender Gleichung enthaltene Reihe entwickelt wird, um so genauer wird der für den Umfang $U$ erhaltene Wert. (Siehe Kleyers Lehrbuch der analytischen Geometrie.)

**Erkl. 729.** Bezeichnet man die halbe grosse Achse eines länglichen Ellipsoids mit $a$, die halbe kleine Achse mit $b$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

1) . . . $V = \frac{4}{3} ab^2\pi$

Zerlegt man diese Formel wie folgt:

2) . . . $V = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot b^2\pi$

so kann man sagen:

Das Volumen eines länglichen Ellipsoids (siehe Erkl. 727) ist $= \frac{2}{3}$ des Volumens des Cylinders, den man um das Ellipsoid konstruirt denken kann, bezw. dessen Grundfläche $= b^2\pi$ und dessen Höhe $= 2a$, nämlich gleich der grossen Achse ist (siehe Erkl. 730).

---

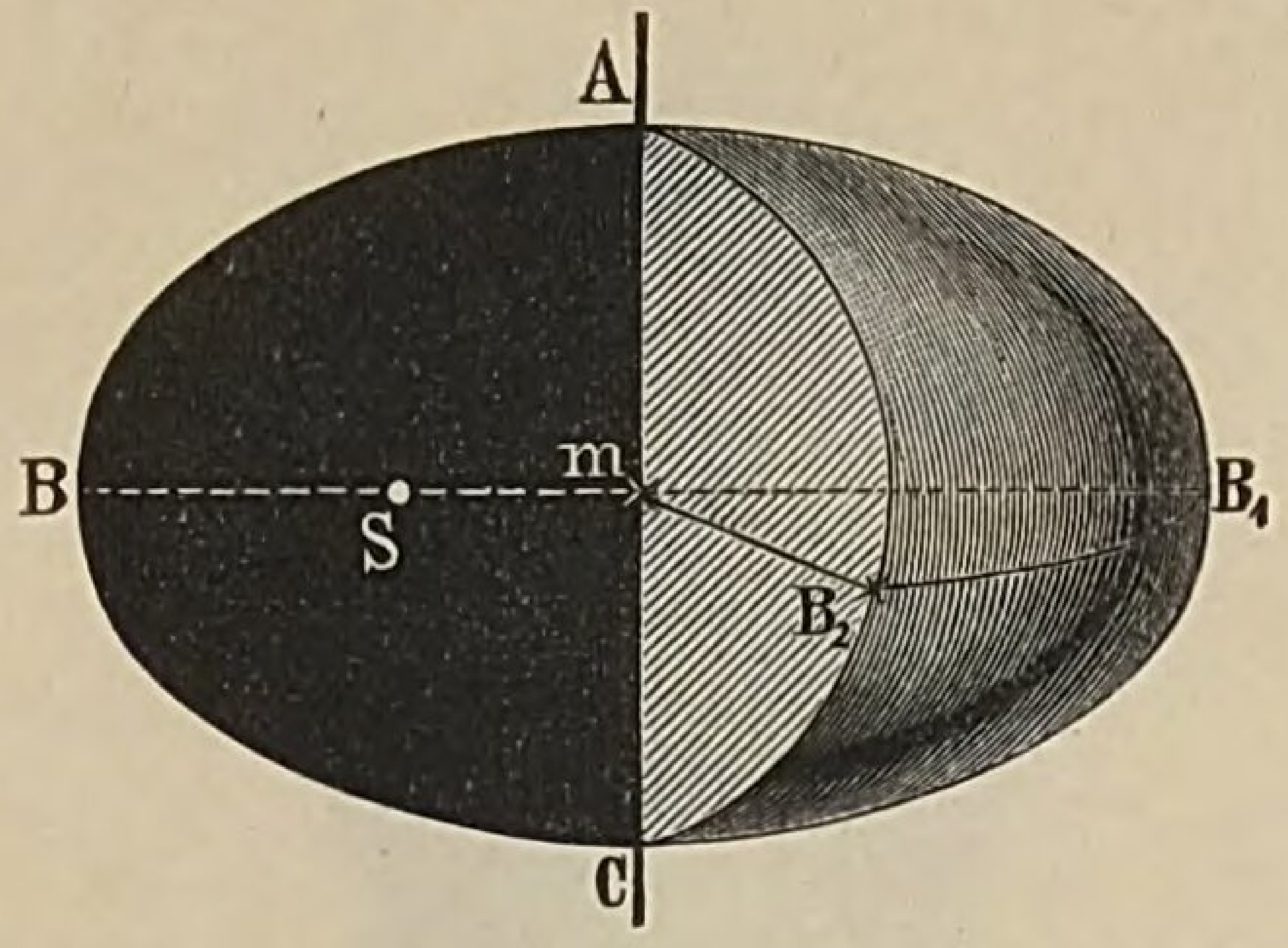
**Aufgabe 739.** Man berechne das Volumen eines Ellipsoids, welches durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Achse entstanden ist, wenn die halbe grosse Achse der erzeugenden Ellipse $= a$, die halbe kleine Achse derselben $= b$ gegeben ist.

**Formel:**

$V = 2s\pi \cdot F$ (s. Erkl. 707).

**Auflösung.** Rotiert, siehe Fig. 248, die halbe Ellipse $ABC$ um ihre kleine Achse $AC$, so entsteht (siehe Erkl. 727) ein Rotationskörper, dessen Volumen $V$ nach vorstehender Guldinischer Körperregel berechnet werden kann.

Figur 248.




**Erkl. 730.** Bezeichnet man die halbe grosse Achse eines abgeplatteten Ellipsoids mit $a$, die halbe kleine Achse mit $b$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$1) \ldots V = \frac{4}{3} a^2 b \pi$$

Zerlegt man diese Formel wie folgt:

$$1) \ldots V = \frac{2}{3} \cdot 2b \cdot a^2 \pi$$

so kann man sagen:

Das Volumen eines abgeplatteten Ellipsoids ist $= \frac{2}{3}$ des Volumens des Cylinders, den man um das Ellipsoid konstruirt denken kann, bezw. dessen Grundfläche $= a^2\pi$ und dessen Höhe $= 2b$, ähnlich gleich der kleinen Achse ist (s. die Erkl. 729).

Setzt man in derselben:

a) . . . $s = \overline{Sm} = \frac{4}{3\pi} a$, nämlich gleich der Entfernung des Schwerpunkts $S$ jener halben Ellipse von der Rotationsachse $AC$, siehe die Gleich. 12a) in der Erkl. 711.

und

b) . . . $F = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{2}$, nämlich gleich dem Inhalt der halben Ellipse $ABC$, siehe Erkl. 728)

so erhält man:

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3\pi} a \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot b \cdot \pi}{2}$$

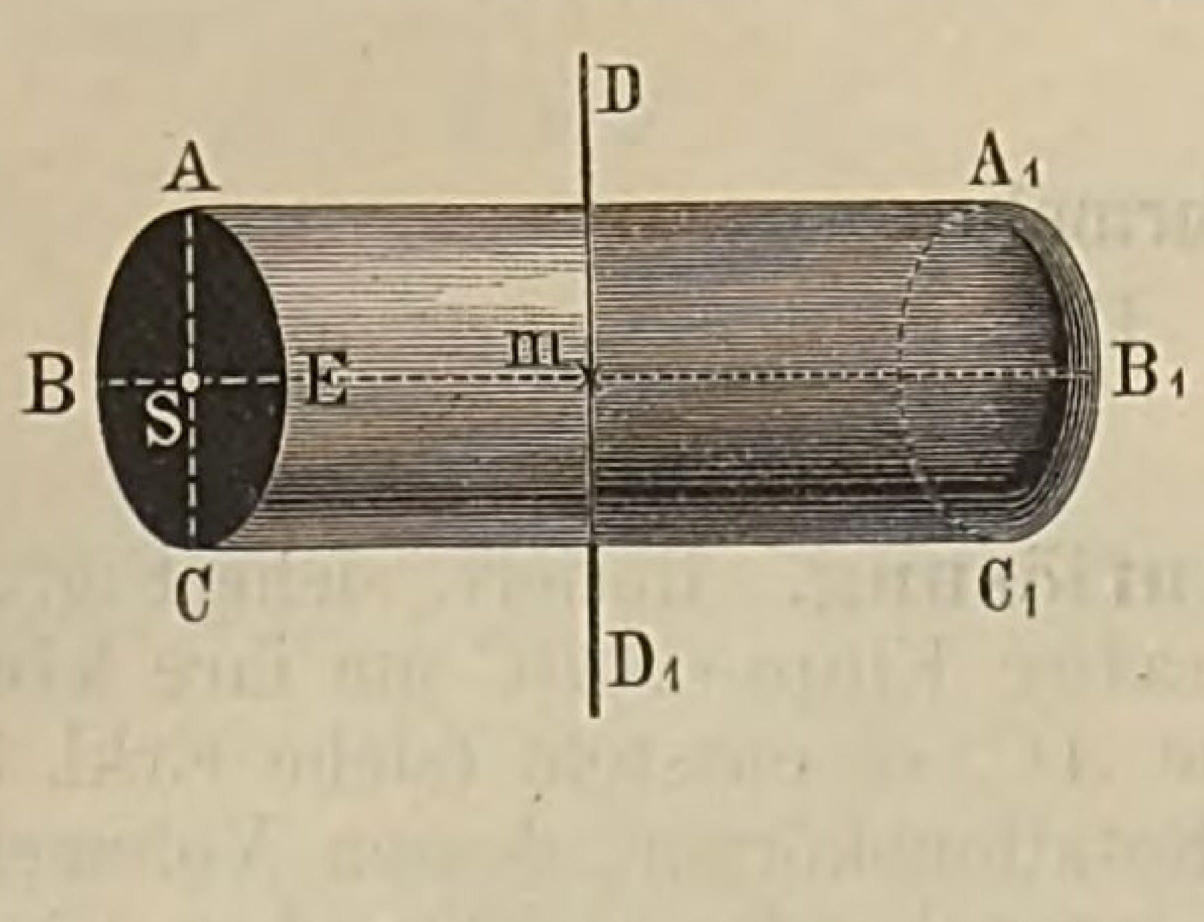
oder

$$A) \ldots V = \frac{4}{3} a^2 b \pi \text{ (s. die Erkl. 730).}$$

---

**Aufgabe 740.** Eine Ellipse, deren halbe grosse Achse $= a$, deren halbe kleine Achse $= b$ ist, rotiere um eine Gerade als Drehachse, die parallel der grossen Achse ist und den Abstand $c$ von derselben hat. Wie gross ist das Volumen des hierdurch erzeugten, ringförmigen Körpers?

Figur 249.




**Formel:**

$$V = 2 s \pi \cdot F \text{ (s. Erkl. 707).}$$

**Auflösung.** Rotiert, siehe Fig. 249, die Ellipse $ABCE$ um die Gerade $DD_1$ als Drehachse, so entsteht ein ringförmiger Körper, ein sogenanntes, elliptisches Annuluid, dessen Volumen $V$ nach vorstehender Guldinischer Körperregel berechnet werden kann.

Setzt man in derselben:

$s = \overline{Sm} = c$, nämlich gleich der Entfernung des Schwerpunkts $S$ der erzeugenden Ellipse von der Drehachse $DD_1$

$F = a \cdot b \cdot \pi$, nämlich gleich dem Inhalt $F$ der Erzeugungsfigur $ABCE$, (s. Erkl. 728)

so erhält man:

$$V = 2 \cdot c \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \pi$$

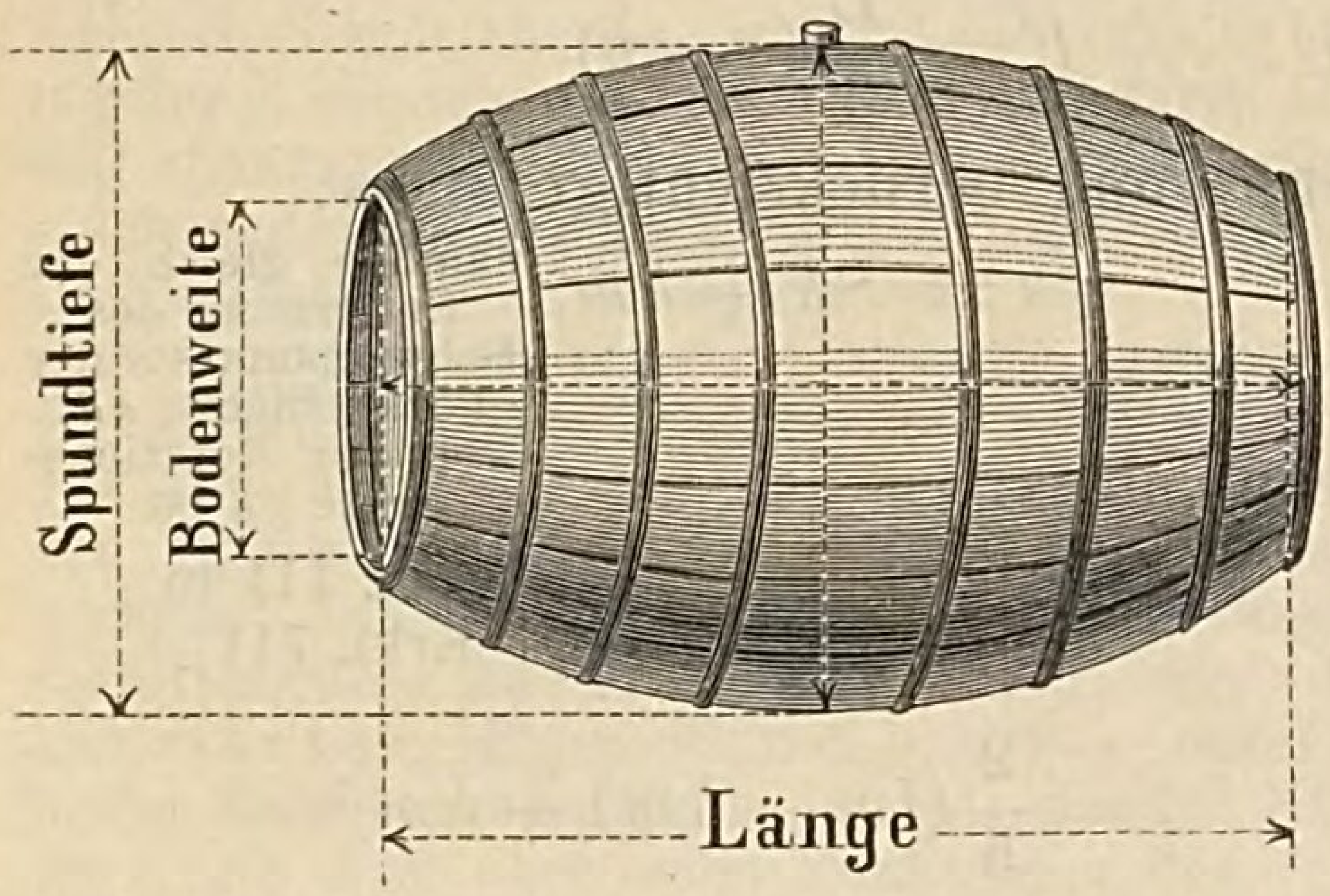
oder

$$A) \ldots V = 2abc\pi^2$$

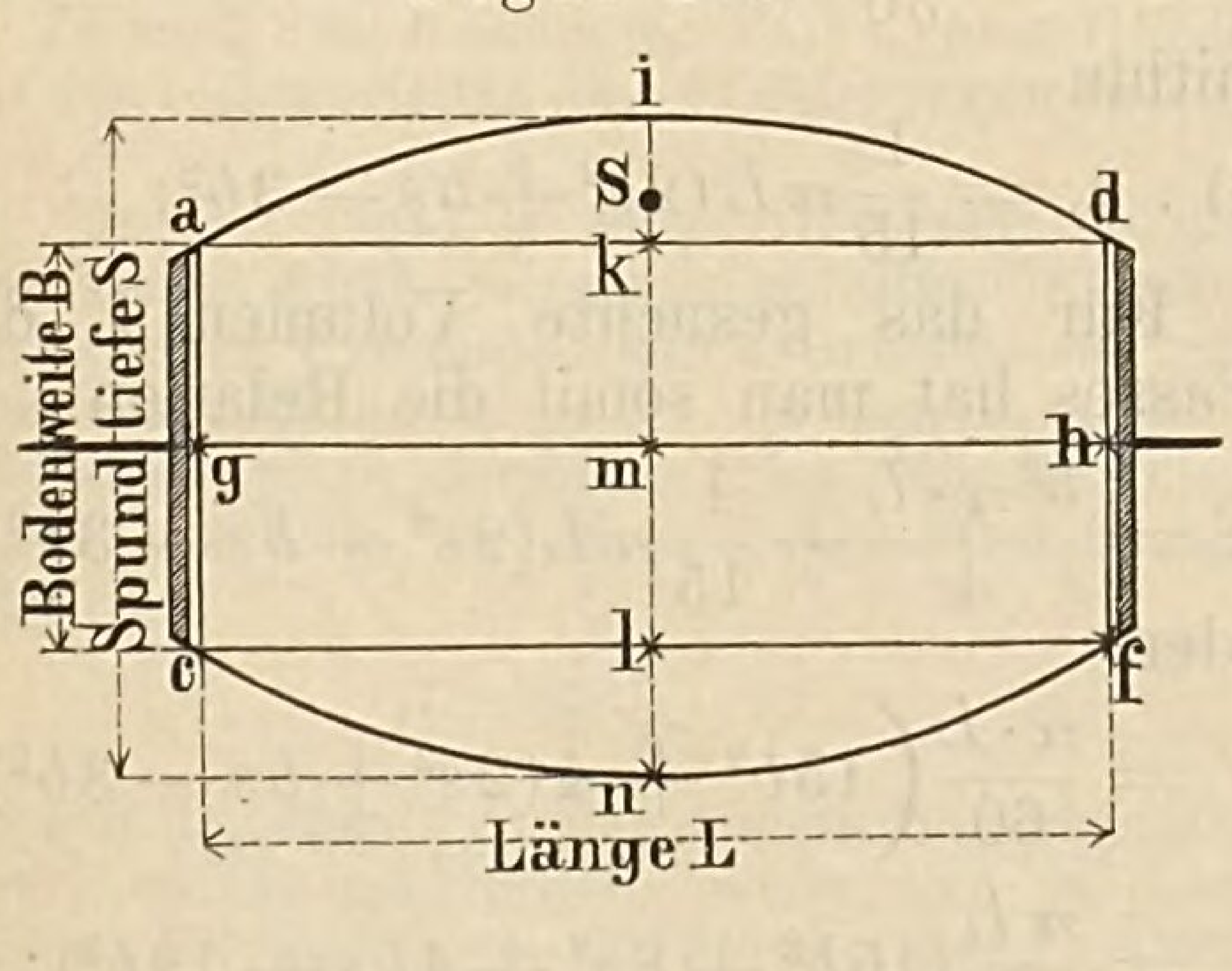
---

**Aufgabe 741.** Man berechne das Volumen eines Fasses aus der Spundtiefe $s$, der Bodenweite $b$ und der Länge $L$ desselben.

Figur 250.




Figur 251.




**Formeln:**

Für einen Cylinder:

I. . . . $V = R^2 \pi H$ (s. Erkl. 33)

Für einen Rotationskörper:

II. . . . $V = 2 s \pi \cdot F$ (s. Erkl. 707).

**Auflösung.** Stellt die Figur 251 einen Durchschnitt des durch die Fig. 250 dargestellten Fasses dar (s. Erkl. 58), so kann man sich den inneren hohlen Raum des Fasses, als Körper gedacht, durch Rotation der Fläche $acfd$ um die Achse $gh$ entstanden denken. Verbindet man $a$ mit $d$ und $c$ mit $f$, so kann man sich ferner jenen Rotationskörper zusammengesetzt denken aus dem geraden Kreiscylinder, welcher durch Rotation des Rechtecks $aghd$ um $gh$ als Drehachse entsteht, und aus einem ringförmigen Körper, der durch Rotation des Segments $aid$ um die Linie $gh$ als Drehachse entsteht.

Für das Volumen $v_1$ jenes geraden Kreiscylinders hat man nach vorstehender Formel I:

$$V = R^2 \pi H$$

wenn man in derselben:

$$R = \overline{ag} = \overline{dh} = \frac{b}{2},$$ nämlich gleich der halben Bodenweite $b$

und

$$H = \overline{gh} = \overline{ad} = \overline{cf} = L,$$ nämlich gleich der Länge $L$ des Fasses

setzt

$$v_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi \cdot L$$

oder

$$1) \; . \; . \; . \; v_1 = \frac{b^2 \cdot \pi \cdot L}{4}$$

Für das Volumen $v_2$ jenes ringförmigen Rotationskörpers hat man nach vorstehender Formel II:

$$V = 2 s \pi \cdot F$$

wenn man den Bogen $aid$ als Parabelbogen betrachtet und dementsprechend in dieser Formel:

$$F = \frac{2}{3} \cdot \overline{ik} \cdot \overline{ad},$$ nämlich gleich dem Inhalt der Parabelfläche $adi$ setzt, siehe Gleich. 2) in der Erkl. 720

bezw.

$$F = \frac{2}{3} \cdot (\overline{im} - \overline{km}) \cdot \overline{ad}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\overline{in}}{2} - \frac{\overline{df}}{2}\right) \cdot \overline{ad}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{s}{2} - \frac{b}{2}\right) \cdot L$$

oder:

a) . . . $F = \frac{L}{3}(s - b)$

setzt, und berücksichtigt, dass:

$s = \overline{Sk} + \overline{km}$, nämlich gleich der Entfernung des Schwerpunkts $S$ der Parabelfläche $adi$ von der Rotationsachse $gh$ ist

bezw., dass:

$s = \frac{2}{5}\,\overline{ik} + \overline{km}$ [s. Gleich. 11) in der Erkl. 711]

$$= \frac{2}{5}(\overline{im} - \overline{km}) + \overline{km}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{\overline{in}}{2} - \frac{\overline{df}}{2}\right) + \frac{\overline{df}}{2}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{s}{2} - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}$$

$$= \frac{2}{5}\,\frac{s}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$

oder

b) . . $s = \frac{1}{10}(2s + 3b)$

ist:

$$v_2 = 2 \cdot \frac{1}{10}(2s + 3b) \cdot \pi \cdot \frac{L}{3}(s - b)$$

oder

$$v_2 = \frac{1}{30}\pi L(2s^2 + 3bs - 2bs - 3b^2)$$

mithin

2) . $v_2 = \frac{1}{15}\pi L(2s^2 + bs - 3b^2)$

Für das gesuchte Volumen $V$ des Fasses hat man somit die Relation:

$$V = \frac{b^2\pi \cdot L}{4} + \frac{1}{15}\pi L(2s^2 + bs - 3b^2)$$

oder

$$V = \frac{\pi \cdot L}{60}\Big(15b^2 + 4(2s^2 + bs - 3b^2)\Big)$$

$$V = \frac{\pi L}{60}(15b^2 + 8s^2 + 4bs - 12b^2)$$

mithin

A) . . . $V = \frac{\pi L}{60}(8s^2 + 3b^2 + 4bs)$

(s. die Erkl. 731).

**Erkl. 731.** Bezeichnet man die Spundtiefe eines Fasses mit $S$, die Bodenweite mit $B$, die Länge des Fasses mit $L$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$V = \frac{\pi L}{60}(8S^2 + 3B^2 + 4BS)$$

(s. die Erkl. 58, 737, 738 und 739).

## d). Erklärungen über die Simpsonschen Regeln und gelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern mittels der Simpsonschen Körperregel.

**Erkl. 732.** Legt man parallel zur Grundfläche einer Pyramide, eines Pyramidenstumpfs, eines Kegels, eines Kegelstumpfs, eines Paraboloids, eines Paraboloidenstumpfs, einer Halbkugel, eines Prismatoids, eines Obelisken etc. etc. mehrere Schnittebenen, so sind die Inhalte der hierdurch entstehenden Durchschnittsfiguren einmal abhängig von den konstanten Bestimmungsstücken des betreffenden Körpers, ein andermal sind sie aber auch abhängig von den verschiedenen, veränderlichen Abständen, in welchen jene Schnittebenen von einem festen Punkt, z. B. von dem Mittelpunkt der Grundfläche oder von der Spitze des betreffenden Körpers gelegt werden. Die Inhalte $f$, $f_1$, $f_2 \cdots$ jener Durchschnittsfiguren sind also einmal Funktionen* der konstanten, allgemein mit $p$, $q$, $r \cdots$ bezeichneten Bestimmungsstücke des betreffenden Körpers; sie sind aber auch Funktionen der veränderlichen Abstände $x$, $x_1$, $x_2$ jener Schnittebenen von einem festen Punkte (z. B. von dem Mittelpunkt der Grundfläche, oder von der Spitze des betreffenden Körpers).

Bezeichnet man die Höhe eines jener oben erwähnten Körpers mit $h$, so kann man die Abhängigkeit der Inhalte $f$, $f_1$, $f_2 \cdots$ jener Schnittfiguren von jenen konstanten Grössen $p$, $q$, $r \cdots$ und den bezüglichen Entfernungen $x$, $x_1$, $x_2$ der Schnittfiguren von einem festen Punkt allgemein durch Gleichungen wie:

$$\text{a)} \ldots f = p + q\frac{x}{h} + r\frac{x^2}{h^2} + t\frac{x^3}{h^3}$$

$$\text{b)} \ldots f_1 = p + q\frac{x_1}{h} + r\frac{x_1^2}{h^2} + t\frac{x_1^3}{h^3}$$

$$\text{c)} \ldots f_2 = p + q\frac{x_1}{h} + r\frac{x_2^2}{h^2} + t\frac{x_2^3}{h^3}$$

ausdrücken.

Je nach dem besonderen Fall werden Glieder auf den rechten Seiten dieser Gleichungen = Null. z. B.:

Für den Inhalt $f$ einer Durchschnittsfigur, welche man erhält, wenn man parallel zur Grundfläche einer Pyramide, deren Grundfläche $= g$ und deren Höhe $= H$ ist, in dem Abstand $x$ von der Spitze derselben eine Ebene gelegt denkt, hat man, wie schon früher öfter gezeigt wurde:

$$f = G \cdot \frac{x^2}{H^2}$$

Für den Inhalt $f_1$ einer andern Durchschnittsfigur, welche man erhält, wenn man in einem andern Abstand $x_1$ von der Spitze jener Pyramide eine Ebene legt, hat man in analoger Weise:

$$f_1 = G \cdot \frac{x_1^2}{H^2}$$

Für diesen speziellen Fall sind also die drei ersten Glieder jener Gleichungen = Null.

*) Jede veränderliche Grösse, die in irgend einer Weise von einer andern veränderlichen Grösse oder von mehreren andern veränderlichen Grössen abhängig ist, nennt man eine Funktion der letzteren.

**Erkl. 733.** Jeder Körper, welcher zwei ebene und parallele Figuren, die auch, wie bei dem Kegel, der Pyramide, dem Paraboloid, dem Doppelkegel etc., auf Punkte, oder wie bei dem Keil auf gerade Linien reduziert sein können, zu Grundflächen hat und der von ebenen oder krummen Flächen als Seitenflächen begrenzt wird und welcher ferner die Eigenschaft hat, dass der Flächeninhalt einer jeden, den Grundflächen parallelen Schnittfigur, durch eine Gleichung ausgedrückt werden kann, die inbezug auf die Entfernung jener Schnittfigur von einem festen Punkt (der Spitze oder dem Mittelpunkt der Grundfläche des Körpers) als Unbekannte, den dritten Grad nicht übersteigt (s. Erkl. 732), nennt man einen „Simpsonschen Körper“.

**Erkl. 734.** Das Volumen eines jeden Simpsonschen Körpers (s. Erkl. 733) kann nach der in der Erkl. 594 für das Prismatoid aufgestellten Kubikinhaltsformel:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

berechnet werden.

Diese Formel heisst daher die Simpsonsche Regel und zwar im Gegensatz zu der in Erkl. 735 erwähnten Simpsonschen Regel, nach welcher man den Inhalt einer Fläche berechnen kann, Simpsonsche Körperregel.

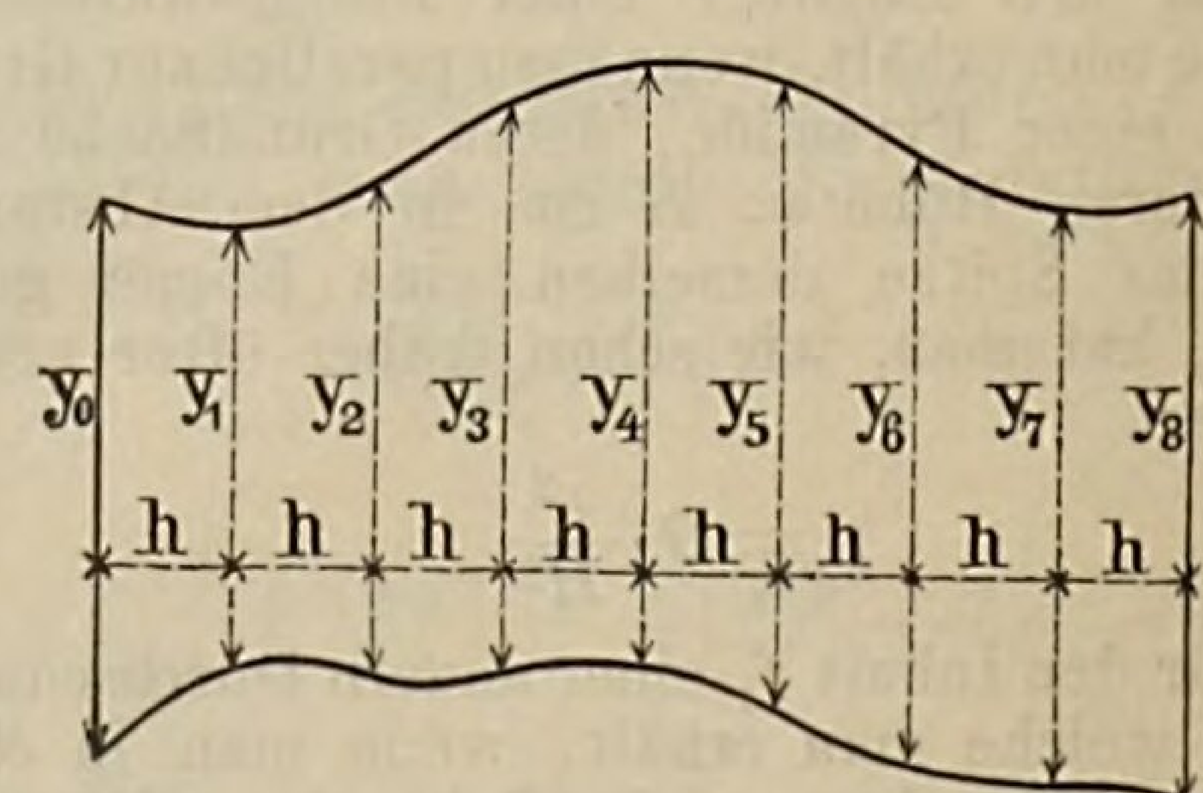
In den Erkl. 594, 596, 600, 604, 605, 608, 612, 629, 638, 645, 648 etc. wurde bereits gezeigt, dass das Volumen von Körpern, wie das Prismatoid, der Obelisk, der Keil, das Ponton, die Pyramide, nach dieser Formel berechnet werden kann; dass somit jene Körper zu den Simpsonschen Körpern gehören (siehe die Erkl. 738).

**Erk. 735.** Hat man den Inhalt einer ebenen Figur zu berechnen, welche nicht von gesetzmässigen, sondern von willkürlichen krummen Linien begrenzt wird, siehe Figur 252, so kann dies annähernd durch die sogenannte Simpsonsche Regel geschehen.

Dieselbe heisst:

Zieht man, siehe Figur 252, in einer von krummen Linien begrenzten ebenen Figur, in den gleichen Abständen $h$ parallele Linien, die sogenannten Ordinaten, und betrachtet die kleinen Bogen, in welche hierdurch die krummen Begrenzungslinien zerlegt werden, als Parabelbogen, so findet man den Inhalt $F$ jener Figur, indem man die erste und letzte Ordinate (in der Figur 252: $y_0$ und $y_8$) addiert, das vierfache aller der Ordinaten mit ungeraden Stellenzeigern und das zweifache aller der Ordinaten mit geraden Stellenzeigern zu jener Summe addiert und das ganze mit dem 3. Teil des Abstands $h$ zweier jener Ordinaten multipliziert, in Zeichen:

Figur 252.




$$F = \frac{1}{3}h\left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 \cdots + y_{n-2})\right]$$

**Erkl. 736.** Ueber die Entwicklung der Simpsonschen Regeln findet man ausführliches in Kleyers Lehrbücher: Die Berechnung des Inhalts der ebenen Figuren, der analytischen Geometrie, und der höheren Analysis.

**Erkl. 737.** Nach den Angaben Newtons kann die in der Erkl. 734 erwähnte Simpsonsche Körperregel:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

zur näherungsweisen Berechnung des Volumens beliebiger Rotationskörper benutzt werden (siehe die Erkl. 738).

**Erkl. 738.** Will man die Simpsonsche Körperregel zur Berechnung des Volumens eines beliebigen Rotationskörpers benutzen, so teilt man den betreffenden Körper parallel den Grundflächen in $2n$, nämlich in eine gerade Anzahl von Stücke, sogenannte Sektionen, von gleicher Höhe $h$ und berechnet jedes dieser Stücke nach der Simpsonschen Regel:

$$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$$

Man wird hierbei einen um so genaueren Wert für das Volumen der betreffenden Körperschicht erhalten, je kleiner $h$, bezw. je grösser die Anzahl $2n$ gewählt wird.

Zu einer allgemein diesbezüglichen Formel gelangt man, wie folgt:

Bezeichnet man die Inhalte der durch die Enden jener Sektionen gehenden Durchschnittsfiguren der Reihe nach mit $f_1, f_2, f_3, f_4 \cdots f_{2n+1}$, so hat man nach der Simpsonschen Körperregel für das Volumen der ersten und zweiten Schicht:

$$\frac{2h}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3),$$

für das Volumen der dritten und vierten Schicht:

$$\frac{2h}{6}(f_3 + 4f_4 + f_5) \text{ u. s. f.,}$$

schliesslich für das Volumen der $(2n - 1)$ten und der $n$ten Schicht:

$$\frac{2h}{6}(f_{2n-1} + 4f_{2n} + f_{2n+1}),$$

Für das Volumen $V$ des ganzen Körpers erhält man also:

$$V = \frac{2h}{6}(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + 4f_6 + \cdots 2f_{2n-1} + 4f_{2n} + f_{2n+1})$$

oder die Formel:

$$1) \ldots V = \frac{h}{3}[(f_1 + f_{2n+1}) + 2(f_3 + f_5 + \cdots f_{2n-1}) + 4(f_2 + f_4 + f_6 + \cdots f_{2n})]$$

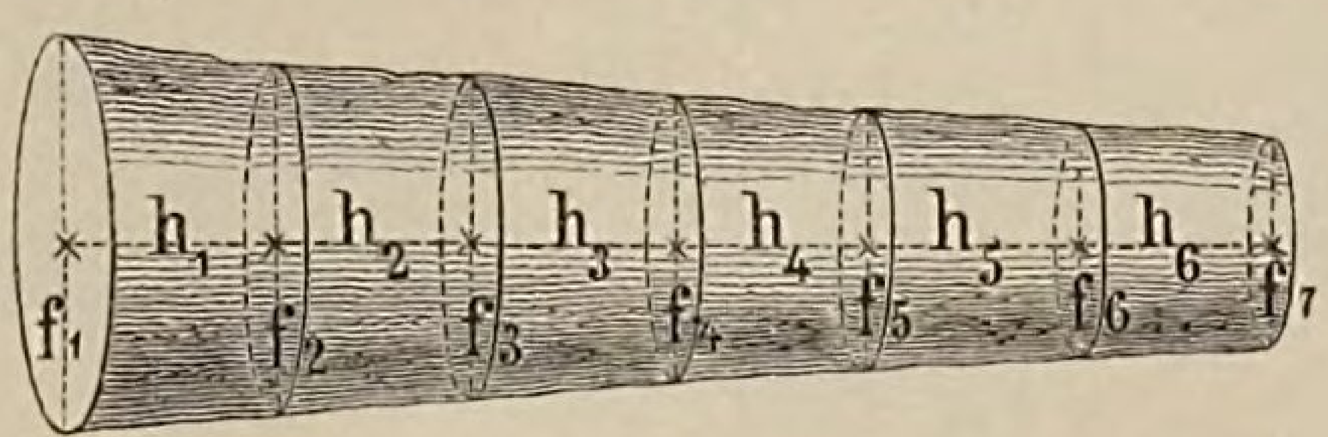
d. h. will man das Volumen $V$ eines beliebigen Rotationskörpers bestimmen, so bestimme man zunächst die Summe der Inhalte der Endflächen, addiere dazu die doppelte Summe der Inhalte der ungeradstelligen und die vierfache Summe der Inhalte der geradstelligen Durchschnittsfiguren und multipliziere die Gesamtsumme mit $\frac{1}{3}$ des Abstands (mit der sogenannten Sektionslänge) jener Durchschnittsfiguren.

Vorstehende Formel I, welche zur näherungsweisen Berechnung des Volumens beliebiger Rotationskörper benutzt werden kann, heisst die **erweiterte** Simpsonsche Körperregel.

---

**Aufgabe 742.** Ein Baumstamm von der Länge $L = 12$ m ist in 6 gleiche Sektionen eingeteilt. Die Durchmesser des Baumstamms an den Stellen, welche diese Sektionen begrenzen, sind bezw. $= 40, 36, 28, 26, 22, 18$ und $16$ cm; wie gross ist das Volumen des Baumstamms?

Figur 253.




**Formel:**

$$V = \frac{h}{3}[(f_1 + f_{2n+1}) + 2(f_3 + f_5 + \cdots f_{2n-1}) + 4(f_2 + f_4 + f_6 \cdots f_{2n})]$$

(s. Erkl. 738).

**Auflösung.** Das Volumen des in der Aufgabe erwähnten und durch die Figur 253 dargestellten Baumstamms kann man mittels der erweiterten Simpsonschen Körperregel (siehe vorstehende Formel) berechnen.

Setzt man in vorstehender Formel (siehe Erkl. 738):

a) . . . $h = \frac{12}{6}$ m, bezw. $= \frac{1200}{6}$ cm, nämlich gleich einer Sektionsbreite

b) . . . $f_1 + f_2n + 1 = f_1 + f_7 = \left(\frac{40}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{16}{2}\right)^2 \pi$

oder $= \pi\,(20^2 + 8^2) \ldots$ nämlich gleich der Summe der Inhalte der Durchschnittsfiguren am Anfang und Ende des Baumstamms (s. Erkl. 738).

c) . . . $2(f_3 + f_5 + \cdot\cdot) = 2\left[\left(\frac{28}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{22}{2}\right)^2 \pi\right]$

oder $= 2\pi\,(14^2 + 11^2)$, nämlich gleich der doppelten Summe der Inhalte der ungeraden Durchschnittsfiguren (s. Erkl. 738).

d) . . . $4(f_2 + f_4) = 4\left[\left(\frac{36}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{26}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{18}{2}\right)^2 \pi\right]$

oder $= 4\pi\,(18^2 + 13^2 + 9^2)$, nämlich gleich der vierfachen Summe der Inhalte der geraden Durchschnittsfiguren (s. Erkl. 738).

so erhält man für das gesuchte Volumen $V$:

$$V = \frac{1200}{6}[\pi\,(20^2 + 8^2) + 2\pi\,(14^2 + 11^2) + 4\pi\,(18^2 + 13^2 + 9^2)]$$

oder

$$V = \frac{1200}{6} \cdot 4\pi\left[\frac{20^2 + 8^2}{4} + \frac{14^2 + 11^2}{2} + 18^2 + 13^2 + 9^2\right]$$

$$V = 800 \cdot \pi\left[\frac{400 + 64}{4} + \frac{196 + 121}{2} + 324 + 169 + 81\right]$$

$$V = 800 \cdot \pi\,(116 + 158{,}5 + 574)$$

$$V = 800 \cdot \pi \cdot 848{,}5; \quad V = 678800 \cdot 3{,}14$$

mithin:

$$V = 2131432 \text{ ccm}$$

oder

$$V = 2131{,}432 \text{ cdm}$$

oder abgerundet

$$V = 2{,}131 \text{ cbm}$$

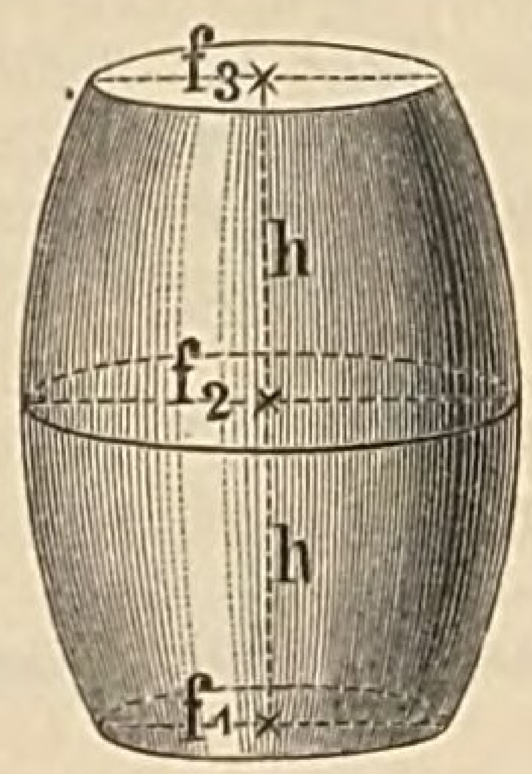
Das gesuchte Volumen des Baumstamms beträgt also:

2,131 cbm

---

**Aufgabe 743.** Wie gross ist das Volumen eines Fasses, dessen Spundtiefe $= s$, dessen Bodenweite $= b$ und dessen Länge $= L$ ist, wenn der Berechnung die Simpsonsche Körperregel zu Grunde gelegt wird?

Figur 254.




**Erkl. 739.** Bezeichnet man die Spundtiefe eines Fasses mit $S$, die Bodentiefe mit $B$, die Länge desselben mit $h$, das Volumen mit $V$, so besteht nach der in nebenstehender Auflösung entwickelten Gleichung A) die Formel:

$$V = \frac{\pi L}{12}(B^2 + 2S^2)$$

(siehe die Erkl. 58, 731, 740 und 741).

**Erkl. 740.** Die von dem Mathematiker Joh. Heinrich Lambert, geb. 1728 zu Mühlhausen, im Jahre 1765 aufgestellte sogen. Lambertsche Regel kann man aus der in vorstehender Erkl. 739 aufgestellten Formel, wie folgt, herleiten. Formt man jene Formel, wie folgt um:

$$\text{a)} \ldots V = \frac{\pi \cdot L}{4} \cdot \frac{B^2 + 2S^2}{3}$$

und setzt:

$$\text{b)} \ldots \frac{B^2 + 2S^2}{3} = \left(\frac{B + 2S}{3}\right)^2$$

was man annähernd auch kann, so erhält man die Formel:

$$1) \ldots V = \frac{\pi \cdot L}{4}\left(\frac{2}{3}S + \frac{1}{3}B\right)^2$$

bezw. die Formel:

$$2) \ldots V = \left(\frac{\frac{2}{3}S + \frac{1}{3}B}{2}\right)^2 \pi \cdot L$$

Diese Formel in Worten ausgedrückt, lautet:

Das Volumen $\left[R^2\pi \cdot H \text{ oder } \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot H\right]$ eines geraden Cylinders, dessen Durchmesser ($D$) gleich $\frac{2}{3}$ der Spundtiefe $S$ plus

**Formel:**

$$V = \frac{h}{3}[(f_1 + f_{2n+1}) + 2(f_3 + f_5 + \cdots f_{2n-1}) + 4(f_2 + f_4 + f_6 + \cdots f_{2n})]$$

(s. Erkl. 738).

**Auflösung.** Berücksichtigt man, dass ein Fass, siehe Figur 254, ein Rotationskörper ist, der aus zwei Sektionen besteht, die von den beiden Bodenflächen und der parallel zu diesen durch den Mittelpunkt des Spunds gelegt gedachten Ebene begrenzt werden, so kann man zur Berechnung des Volumens desselben vorstehende Formel benutzen. Setzt man in derselben:

a) ... $h = \frac{L}{2}$, nämlich gleich einer Sektionsbreite

b) ... $f_1 + f_{2n+1} = f_1 + f_3 = \left(\frac{b}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{b}{2}\right)^2\pi$, nämlich gleich der Summe der Inhalte der Durchschnittsfiguren am Anfang und End des Fasses (siehe Erkl. 738).

c) ... $2(f_3 + f_5 + \cdots) = 2 \cdot 0$, nämlich gleich der doppelten Summe der Inhalte der ungeraden Durchschnittsfiguren (s. Erkl. 738), von welchen hier aber keine vorhanden sind

und

d) ... $4(f_2 + f_4 + \cdots) = 4 \cdot f_2 = 4 \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2\pi$, nämlich gleich der vierfachen Summe der Inhalte der geraden Durchschnittsfiguren (siehe Erkl. 738), von welchen hier aber nur die Durchschnittsfigur $f_2$ vorhanden ist

so erhält man:

$$V = \frac{L}{3 \cdot 2}\left[\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{b}{2}\right)^2\pi\right) + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2\pi\right]$$

oder

$$V = \frac{L}{6}\left(\frac{b^2}{4}\pi + \frac{b^2}{4}\pi + 4 \cdot \frac{s^2}{4}\pi\right)$$

$$V = \frac{\pi L}{6}(2b^2 + s^2)$$

$$V = \frac{\pi L}{6}\left(\frac{2b^2}{4} + \frac{4s^2}{4}\right)$$

$^1/_3$ der Bodenweite $B$, und dessen Höhe ($H$) gleich der Länge $L$ eines Fasses ist, ist gleich dem Volumen jenes Fasses oder:

$^2/_3$ der Spundtiefe $S$ plus $^1/_3$ der Bodenweite $B$ ist gleich dem Durchmesser ($D$) eines geraden Cylinders, welcher dieselbe Länge (Höhe) als jenes Fass hat und dessen Volumen gleich dem jenes Fasses ist.

Die vorstehend unter 2) aufgestellte Formel ist die unter dem Namen **Lambertsche Regel** bekannte Regel; dieselbe wird fast allgemein zur Berechnung des Inhalts von Fässern angewandt. Mittels der Lambertschen Regel erhält man das Volumen eines Fasses auf ca. $^1/_{250}$ genau.

**Erkl. 741.** Durch weitere Umformung der in vorstehender Erkl. 740 aufgestellten Formel 2):

$$V = \left(\frac{\frac{2}{3}S + \frac{1}{3}B}{2}\right)^2 \pi \cdot L$$

erhält man:

$$V = \left(\frac{2S + B}{6}\right)^2 \pi \cdot L$$

$$V = (2S + B)^2 \frac{\pi \cdot L}{36}$$

oder

$$1) \ldots V = \frac{\pi L}{36}(4S^2 + 4BS + B^2)$$

oder

$$2) \ldots V = 0{,}0873 \cdot \pi \cdot L(4S^2 + 4BS + B^2)$$

Man vergleiche hiermit die in den Erkl. 731 und 739 aufgestellten Formeln.

$$V = \frac{\pi L}{6} \cdot \frac{2}{4}(b^2 + 2s^2)$$

oder

$$A) \ldots V = \frac{\pi L}{12}(b^2 + 2s^2)$$

(siehe die Erkl. 739, 740 und 741).

**Erkl. 741 a.** Ausführliches über Fassberechnungen findet man in Kleyers Lehrbuch der Inhaltsberechnungen von Fässern.

## e). Ungelöste Aufgaben über die Berechnung von Rotationskörpern.

**Aufgabe 744.** Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a$ und $b$ rotiere einmal um die Kathete $a$, ein andermal um die Kathete $b$ als Drehachse. In welchem Verhältnis stehen die krummen Begrenzungsflächen und die Volumen der beiden hierdurch erzeugten Rotationskörper?

**Aufgabe 745.** Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete $= a$, dessen andere Kathete $= 2a$ ist, rotiere einmal um seine Kathete $a$, ein andermal um seine Kathete $2a$ und ein drittesmal um seine Hypotenuse. In welchem Verhältnis stehen die Volumen der drei hierdurch erzeugten Rotationskörper?

**Aufgabe 746.** Die Seite $a$ eines Quadrats sei $= 5$ dm; welches Volumen und welche Oberfläche hat der Rotationskörper, der erzeugt wird, wenn jenes Quadrat um eine seiner Diagonalen als Drehachse rotiert?

**Andeutung.** Die Aufgaben 744 bis 758 sind analog den gelösten Aufgaben in vorstehendem Abschnitt b). zu lösen.

**Aufgabe 747.** Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen eines Körpers, welcher entsteht, wenn sich ein Quadrat mit der Seite $a = 5$ dm um eine Achse dreht, die durch einen Endpunkt des Quadrats geht und parallel zu einer Diagonale desselben ist?

---

**Aufgabe 748.** Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei $a$; in dasselbe ist der einbeschriebene Kreis konstruiert. Wie gross sind die Oberflächen und die Volumen der Körper, welche entstehen, wenn jenes Dreieck um eine seiner Höhen als Drehachse rotiert; und in welchem Verhältnis stehen die Volumen und die Oberflächen jener entstandenen Rotationskörper?

---

**Aufgabe 749.** Um einen Kreis mit dem Radius $r$ ist ein reguläres Sechseck konstruiert; wie gross ist der Körper, welcher durch Rotation jenes Sechsecks um einen seiner Durchmesser entsteht?

---

**Aufgabe 750.** Um zwei kongruente reguläre Sechsecke rotiert das eine um einen Durchmesser des demselben umbeschriebenen Kreises, das andere um einen Durchmesser des demselben einbeschriebenen Kreises. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der beiden hierdurch erzeugten Rotationskörper zu einander?

---

**Aufgabe 751.** Ein Kreissektor, dessen Radius $= r$ und dessen Centriewinkel gleich $60^0$ ist, rotiere um einen der ihn begrenzenden Radien. Wie gross ist das Volumen des entstandenen Kugelausschnitts?

---

**Aufgabe 752.** Wie gross ist das Volumen eines Körpers, der durch Rotation eines Oktanten eines Kreises, dessen Radius $r$ ist, um einen seiner begrenzenden Radien erzeugt wird?

---

**Aufgabe 753.** Beschreibt man um einen Kreis ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck, so dass eine Quadrat- und eine Dreieckseite zusammenfallen, und man denkt sich die drei Flächen um die zu dieser Seite des Dreiecks gehörige Höhe gedreht, so entstehen drei Rotationskörper. In welchem Verhältnis stehen die Kubikinhalte dieser drei Körper zu einander?

---

**Aufgabe 754.** Ein Dreieck mit den Seiten $a$, $b$ und $c$ rotiere einmal um die Seite $a$, ein andermal um die Seite $b$ und ein drittesmal um die Seite $c$, als Drehachse. In welchem Verhältnis stehen die Volumen und die Oberflächen der drei hierdurch entstandenen Rotationskörper?

---

**Aufgabe 755.** Die Seiten eines Rechtecks sind, bezw. $= a$ und $b$. Dieses Rechteck rotiert um eine Gerade als Drehachse, welche durch

einen Eckpunkt desselben geht und parallel zu einer Diagonale ist. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche dieser Rotationskörper?

---

**Aufgabe 756.** Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei $= a$. Dieses Dreieck rotiere um eine Gerade, als Drehachse, welche durch die Mitte einer Seite desselben geht, dabei aber auch zugleich senkrecht auf einer andern Seite dieses Dreiecks steht. Wie gross ist das Volumen des von dem grössten Teil dieses Dreiecks hierdurch erzeugten Rotationskörpers?

---

**Aufgabe 757.** Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn ein reguläres Sechseck mit der Seite $a$ um eine seiner Seiten als Drehachse rotiert?

---

**Aufgabe 758.** Ein Antiparallelogramm habe die Parallelseiten $a$ und $b$; die nicht parallelen Seiten desselben seien $= c$. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn dieses Antiparallelogramm um eine seiner nicht parallelen Seiten rotiert?

---

**Aufgabe 759.** Wie gross ist das Volumen eines Körpers, der durch Rotation eines Parallelogramms um eine ausserhalb desselben liegende Achse entsteht, wenn der Abstand $a$ des Durchschnittpunkts seiner Diagonalen von der Rotationsachse $=$ 3,4 dm und der Flächeninhalt $F$ des || grs. $=$ 1000 qcm beträgt?

**Andeutung.** Die Aufgaben 759 bis 763 sind analog den gelösten Aufgaben in vorstehendem Abschnitt c). zu lösen.

---

**Aufgabe 760.** Ein Halbkreis mit dem Radius $r$ rotiere um eine zu seinem Durchmesser parallelen Gerade als Drehachse, wie gross ist das Volumen des hierdurch erzeugten ringförmigen Körpers, wenn der Abstand jener Drehachse von dem Durchmesser $= a$ ist?

**Andeutung.** Man beachte die Erkl. 711 und die Andeutung zur Aufgabe 759.

---

**Aufgabe 761.** Man berechne das Volumen eines Körpers, welcher durch Rotation eines regulären Polygons um eine ausserhalb desselben in seiner Ebene liegende Gerade als Drehachse entsteht, wenn der Inhalt $J$ desselben $=$ 250 qdm und der Abstand $s$ des Mittelpunkts von der Drehachse $=$ 40 cm misst.

---

**Aufgabe 762.** Man berechne das Volumen eines Bottichs, der parabolisch ausgebaucht ist, aus der Tiefe $t =$ 1,8 m, der oberen lichten Weite $a = 4\frac{1}{2}$ m und der unteren lichten Weite $b = 1\frac{3}{4}$ m.

**Andeutung.** Siehe die Figur 245 und die Erkl. 725.

---

**Aufgabe 763.** Ein Heuhaufen habe die Gestalt eines Paraboloids mit der Höhe $H = 4\frac{1}{2}$ m und einen Grundflächenumfang von 18,2 m. Wie viel Zentner Heu enthält derselbe, wenn im Durchschnitt 0,45 cbm Heu 50 kg wiegen?

---

**Aufgabe 764.** Man berechne mittels der erweiterten Simpsonschen Körperregel das Volumen des durch die Figur 255 dargestellten Kessels, dessen Tiefe $lk = 1{,}03$ m, dessen lichte Weite bei $ab = 1{,}36$ m, bei $cd = 1{,}10$ m, bei $ef = 0{,}95$ m und bei $gh = 0{,}90$ m misst.

**Andeutung.** Die Aufgaben 764 bis 767 sind analog den in dem vorstehenden Abschnitt d) gelösten Aufgaben zu lösen.

---

**Aufgabe 765.** Man berechne mittels der Simpsonschen Körperregel das Volumen eines abgestumpften Kegels aus den Grundflächenradien $R = 10$ dm, $r = 5{,}2$ dm und der Höhe $H = 18{,}6$ dm.

**Andeutung.** Man beachte, dass der Radius des Mittelkreises $= \frac{R + r}{2}$ ist.

---

**Aufgabe 766.** Welche Werte findet man für das Volumen eines Fasses, das eine Bodenweite von 80 cm, eine Spundtiefe von 1,02 m und eine Länge von 1,6 m hat, wenn man einmal die in der Erkl. 731 aufgestellte Formel, ein andermal die in der Erkl. 739 aufgestellte Formel und ein drittesmal die in der Erkl. 740 erwähnte Lambertsche Regel der Berechnung zu Grunde legt?

---

**Aufgabe 767.** Analog der Aufgabe 766 berechne man nach den drei daselbst angeführten Formeln die Kubikinhalte von Fässern, welche bezw. die Bodenweiten:

0,64 m, 0,65 m und 0,74 m,

die entsprechenden Spundtiefen:

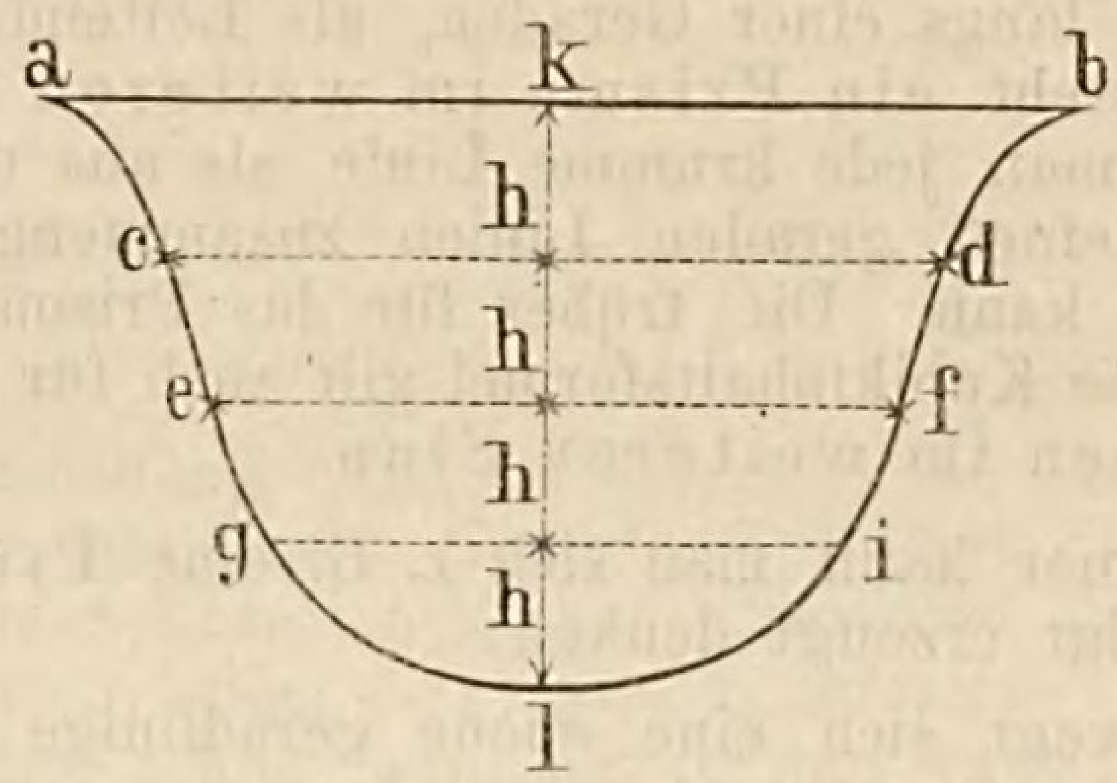
0,82 m, 0,72 m und 0,81 m

und die entsprechenden Längen:

1,64 m, 1,24 m und 2,08 m

haben.

Figur 255.




# XIII.

# Ueber die Berechnung besonderer Körper.

**Erkl. 742.** Hat man solche Körper zu berechnen, für welche in vorstehendem keine speziellen Formeln aufgestellt wurden, so suche man dieselben, wenn es eckige Körper, sog. Polyeder, sind, in solche Körper zu zerlegen, welche sich mittels der gegebenen Bestimmungsstücke und mittels bekannter Formeln berechnen lassen, wobei bemerkt sei, dass sich viele eckige Körper, wie z. B. das Prismatoid, der Keil etc. in Pyramiden zerlegen lassen.

Sind die zu berechnenden Körper krummflächige Körper und sind zugleich die den Körper begrenzenden krummen Flächen Rotationsflächen, so suche man den Körper nach den Regeln, welche für die Rotationskörper (s. die Erkl. 707, 708, 734 und 738) aufgestellt wurden, zu berechnen.

Sind schliesslich die zu berechnenden Körper solche krummflächige Körper, deren Begrenzungsflächen aus ebenen und verschiedenen krummen Flächen zusammengesetzt sind (siehe nachstehende Aufgaben), so denke man sich den Körper auf eine Art erzeugt, die mit der Art der Erzeugung bekannter Körper identisch ist.

Man kann sich z. B. ein Prisma auf folgende Art erzeugt denken:

„Bewegt sich eine ebene geradlinige Figur (als Erzeugende, Generatrix) so längs einer Geraden (als Leitenden, Direktrix) hin, dass die Ebene dieser Figur ihrer ursprünglichen Lage stets parallel bleibt und dass ein und derselbe Punkt jener Figur, der Erzeugenden, stets an der Geraden, der Leitenden, hingleitet, so ist der Raum, welchen jener Körper durchläuft, ein prismatischer Raum, bezw. ein Prisma (siehe Antwort der Frage 2, Seite 2 im 1. Buch der Körperberechnungen).“

Bewegt sich in analoger Weise eine ebene, aber krummlinige oder gemischtlinige Figur längs einer Geraden, als Leitende, hin, so entsteht ein Prisma im weiteren Sinn, indem man jede krumme Linie als aus unendlich kleinen geraden Linien zusammengesetzt denken kann. Die früher für das Prisma aufgestellte Kubikinhaltsformel gilt auch für solche Prismen im weiteren Sinn.

Ferner kann man sich z. B. eine Pyramide wie folgt erzeugt denken:

Bewegt sich eine ebene geradlinige Figur so längs einer Geraden hin, dass sie stets ihrer ursprünglichen Lage parallel und stets ihrer ursprünglichen Form ähnlich bleibt, dass ferner ein und derselbe Punkt jener Figur an der Geraden hingleitet, und werden die Seiten der Figur in demselben Verhältnis stetig kleiner und kleiner als sie fortschreitet, so ist der Raum, welchen die Figur zurücklegt, ein pyramidalischer Raum, bezw. eine Pyramide (siehe Antwort der Frage 2, Seite 17 im 1. Buch der Körperberechnungen).

Jeder andere Körper, welchen man sich auf dieselbe Weise erzeugt denken kann, ist eine Pyramide im weiteren Sinn, und man kann das Volumen eines solchen Körpers, mittels der für die Pyramide früher aufgestellten Kubikinhaltsformel berechnen.

In ähnlicher Weise, wie vorstehend für das Prisma und die Pyramide angegeben ist, kann man sich den Cylinder und den Kegel erzeugt denken u. s. f.

---

**Aufgabe 768.** Ein reguläres Oktaeder und ein Würfel, mit den Kanten $k$, durchdringen sich so, dass jede Diagonale des Oktaeders durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen des Würfels geht. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche des beiden Körpern gemeinsamen Körperteils und welches ist das Gesamtvolumen und die Gesamtoberfläche des ganzen Körpers?

**Andeutung.** Man beachte die vorstehende Erklärung.

---

**Aufgabe 769.** Ueber jeder Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei ein Kreisbogen beschrieben, dessen Mittelpunkt in der gegenüberliegenden Ecke liegt und dessen Radius gleich der Seite

**Andeutung.** Man betrachte die von den drei gleichen Kreisbogen, deren zugehörige Centriewinkel je $= 60^0$ sind, begrenzte Figur als die Grundfläche eines Prismas. Umfang und Inhalt

des Dreiecks ist. Die entstandene dreiseitige, krummlinige Figur bewege sich, indem ihre Ebene ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so, dass jeder Eckpunkt eine zu der Ebene jenes Dreiecks senkrechte Gerade von der Länge einer Dreieckseite beschreibe. Man berechne den Mantel, die Oberfläche und das Volumen des so entstehenden Körpers aus der Seite $a$ jenes Dreiecks.

jener Figur kann mittels einfacher geometrischer Sätze leicht berechnet werden.

---

**Aufgabe 770.** Das Volumen einer Kugel sei $= V$ cbm. Wie viel beträgt der Inhalt derjenigen Fläche, welche die Peripherie des horizontalen grössten Kugelkreises beschreibt, wenn sich die Kugel, bezw. deren Mittelpunkt, in vertikaler Richtung um $h$ Meter tiefer senkt?

**Andeutung.** Die bei der vertikalen Fortbewegung der Kugel durch deren horizontalen grössten Kreis erzeugte Fläche ist eine gerade Cylinderfläche.

---

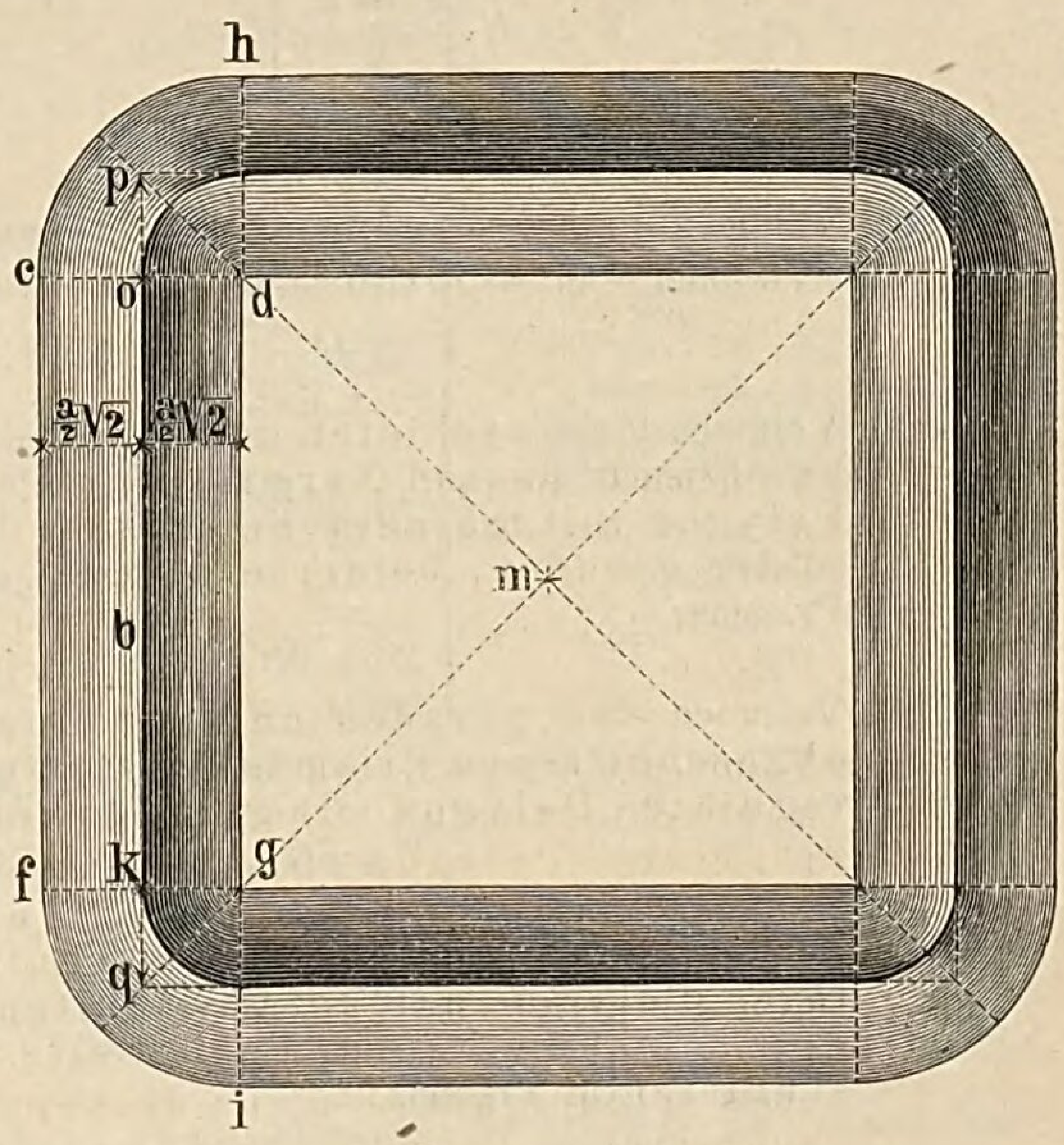
**Aufgabe 771.** Aus einem geraden Cylinder seien zwei Kegel herausgeschnitten, deren Grundfläche, bezw. diejenigen des Cylinders sind, und deren gemeinschaftliche Spitze ein beliebiger Punkt der Cylinderaxe ist. Der übrig gebliebene Körper soll durch eine zweite gerade Cylinderfläche, welche mit der ersten dieselbe Achse hat, halbiert werden. Wie gross ist der Grundflächenradius der letzteren?

**Andeutung.** Den in der Aufgabe erwähnten übrig gebliebenen Teil des Cylinders kann man als einen Rotationskörper betrachten, der durch Rotation eines Antiparallelogramms um die kleinere seiner parallelen Seiten entstanden ist (siehe die Erkl. 707 und 711).

---

**Aufgabe 772.** Der durch die Fig. 256 dargestellte Rahmen ist ein Körper, den man sich dadurch entstanden denken kann, dass sich ein Quadrat $A$ mit der Seite $a$ so um ein grösseres Quadrat $B$ mit der Seite $b$ hinbewegt, dass der Mittelpunkt des Quadrats $A$ stets auf den Seiten des Quadrats $B$ bleibt und dass eine Diagonale des Quadrats $A$ stets in der Ebene des letzteren bleibt und dass dessen andere Diagonale stets senkrecht auf den Seiten des Quadrats $B$ bleibt, und dass, wenn die Ecke des Quadrats $A$, welche bei dessen Fortbewegung im Innern des Quadrats $B$ bleibt, auf eine der Diagonalen des Quadrats $B$ stösst, das Quadrat $A$ um die durch jene innere Ecke desselben gehende Vertikallinie als Drehachse eine Vierteldrehung (um 90°) macht. Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche dieses Körpers?

Figur 256.



# XIV.
# Zusammenstellung der in diesem Buche vorkommenden stereometrischen Formeln.

## I. Formeln für das gerade Prisma:

1). Volumen $V = G \cdot H$ . . . . . . . siehe Erkl. 1

2). Mantel $M = U \cdot H$ . . . . . . . . „ „ 89a

3). Oberfläche $O = M + 2 \cdot G$ . . Seite 5 im 1. Buch

## II. Formeln für das schiefe Prisma:

4). Volumen $V = G \cdot H$ . . . . . . . . „ „ 541

oder

5). Volumen $V = N \cdot A$ . . . siehe Erkl. 548 und 549

6). Mantel $M = U_n \cdot A$ . . . „ „ 550 und 542

$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche;
$U$ bedeutet den Umfang der Grundfläche;
$H$ bedeutet die Höhe;
$N$ bedeutet den Inhalt des Normalschnitts;
$U_n$ bedeutet den Umfang des Normalschnitts;
$A$ bedeutet die Achse, bezw. die Länge einer Seitenkante des Prismas.

## III. Formeln für den Prismenstumpf:

7). Volumen $V$ eines schiefen und schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas oder eines geraden, aber beiderseits schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas:

$$V = N \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad . . \text{ siehe Erkl. } 546$$

8). Volumen $V$ eines geraden, nur einerseits schief abgeschnittenen, dreiseitigen Prismas:

$$V = G \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad . . \text{ siehe Erkl. } 547$$

$N$ bedeutet den Inhalt des Normalschnitts;
$k_1$, $k_2$ und $k_3$ bedeuten die Längen der drei Kanten;
$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche.

9). Volumen $V$ eines schiefen und schief abgeschnittenen Parallelepipedons oder eines geraden, beiderseits schief abgeschnittenen Parallelepipedons:

a) . . . $V = N \cdot \frac{k_1 + k_3}{2}$

oder . . . . siehe Erkl. 552

b) . . . $V = N \cdot \frac{k_2 + k_4}{2}$

10). Volumen $V$ eines geraden, aber nur einerseits schief abgeschnittenen Parallelepipedons:

$$V = G \cdot \frac{a + b}{2} \quad . . \text{ siehe Erkl. } 553$$

$N$ bedeutet den Inhalt des Normalschnitts;
$k_1$ und $k_3$, ebenso $k_2$ und $k_4$ bedeuten bezw. die Längen zweier Seitenkanten, welche einer Diagonalebene angehören;
$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche;
$a$ und $b$ bedeuten die Längen zweier Seitenkanten, welche einer Diagonalebene angehören.

11). Volumen $V$ eines schiefen und schief abgeschnittenen Prismas, dessen Normalschnitt ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist, oder eines solchen geraden, beiderseits schief abgeschnittenen Prismas:

$$V = N \cdot A \quad . . . \text{ siehe Erkl. } 555$$

12). Volumen eines geraden und nur einerseits schief abgeschnittenen Prismas, dessen Grundfläche ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist:

$$V = G \cdot A \quad . . . \text{ siehe Erkl. } 556$$

13). Mantel $M$ eines schiefen und schief abgeschnittenen Prismas, dessen Normalschnitt ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist, oder eines solchen geraden, beiderseits schief abgeschnittenen Prismas:

$$M = U_n \cdot A \quad . . \text{ siehe Erkl. } 557$$

14). Mantel $M$ eines geraden und einerseits schief abgeschnittenen Prismas, dessen Grundfläche ein reguläres Polygon mit gerader Seitenzahl ist:

$$M = U \cdot A \quad . . . \text{ siehe Erkl. } 558$$

$N$ bedeutet den Inhalt des Normalschnitts;
$A$ bedeutet die Länge der Achse;
$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche;
$U_n$ bedeutet den Umfang des Normalschnitts;
$U$ bedeutet den Umfang der Grundfläche.

**IV. Formeln für die gerade Pyramide:**

15). Volumen $V = \frac{G \cdot H}{3}$ . . . . . . siehe Erkl. 28

16). Mantel $M = \frac{U \cdot h}{2}$ . . . . . . . „ „ 23

17). Oberfläche $O = \frac{U \cdot h}{2} + G$ . . . . „ „ 27

**V. Formeln für die gerade Doppelpyramide:**

18). Volumen $V = \frac{G \cdot A}{3}$ . . . . . . . . „ „ 537

**VI. Formeln für die schiefe Pyramide:**

19). Volumen $V = \frac{G \cdot H}{3}$ . . . . . . . . „ „ 532

20). Mantel und Oberfläche . . . . . . „ „ 533

$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche;
$H$ bedeutet die körperliche Höhe;
$h$ bedeutet die seitliche Höhe;
$U$ bedeutet den Umfang der Grundfläche;
$A$ bedeutet die Länge der Achse, bezw. die Verbindungslinie d. beiden Spitzen einer geraden Doppelpyramide.

**VII. Formeln für den geraden Pyramidenstumpf:**

21). Volumen $V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{G \cdot g} + g)$ . siehe Erkl. 31

22). Mantel $M = \frac{U + u}{2} \cdot h$ . . (s. im 1. Buch, Seite 37)

23). Oberfläche $O = \frac{U + u}{2} \cdot h + G + g$ (s. im 1. Buch, S. 38)

**VIII. Formeln für den schiefen Pyramidenstumpf:**

24). Volumen $V = \frac{H}{3}(G + \sqrt{G \cdot g} + g)$ siehe Erkl. 538

25). Mantel und Oberfläche . . . . . . „ „ 539

$H$ bedeutet die Höhe des Stumpfs;
$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche;
$g$ bedeutet den Inhalt der Deckfläche;
$U$ bedeutet den Umfang der Grundfläche;
$u$ bedeutet den Umfang der Deckfläche;
$h$ bedeutet die seitliche Höhe.

**IX. Formeln für den geraden Kreiscylinder:**

26). Volumen $V = R^2 \pi H$ . . . . . . siehe Erkl. 33

27). Mantel $M = 2 R \pi \cdot H$ . . . . . . . „ „ 47

28). Oberfläche $O = 2 R \pi (H + R)$ . . . „ „ 100

29). Volumen $V$ eines gleichseitigen Cylinders $= 2 \pi R^3$ siehe Erkl. 118

30). Oberfläche $O$ „ „ Cylinders $= 6 \pi R^2$ siehe Erkl. 119

31). Volumen $V$ „ Hohlcylinders $= \pi H (R^2 - r^2)$ siehe Erkl. 46

**X. Formeln für den schiefen Kreiscylinder:**

32). Volumen $V = R^2 \pi \cdot H$ . . . . . . siehe Erkl. 575

33). Mantel und Oberfläche . . . . . „ „ 576

$R$ bedeutet den Radius der Grundfläche;
$H$ bedeutet die Höhe;
$r$ bedeutet bei dem Hohlcylinder den Radius des inneren hohlen, cylindrischen Raums.

**XI. Formeln für den Kreiscylinderstumpf:**

34). Volumen $V$ eines geraden, aber schief abgeschnittenen Cylinders:

a) . . . $V = R^2 \pi \cdot \frac{a + b}{2}$ . . . . siehe Erkl. 214

oder

b) . . . $V = R^2 \pi \cdot A$ . . . . . „ „ 579

35). Mantel $M$ eines geraden, aber schief abgeschnittenen Cylinders:

a) . . . $M = 2 R \pi \cdot \frac{a + b}{2}$ . . . siehe Erkl. 214

oder

b) . . . $M = 2 R \pi \cdot A$ . . . . . . siehe Erkl. 579

$R$ bedeutet den Radius der Grundfläche;
$a$ bedeutet die längste und
$b$ bedeutet die kürzeste Seitenlinie, oder umgekehrt;
$A$ bedeutet die Achse;

36). Volumen $V$ eines schiefen und schief abgeschnittenen Kreiscylinders oder eines geraden und beiderseits schief abgeschnittenen Kreiscylinders: $V = \varrho^2 \pi \cdot A$ . . . siehe Erkl. 578

37). Mantel $M$ eines schiefen und schief abgeschnittenen Kreiscylinders oder eines geraden und beiderseits schief abgeschnittenen Kreiscylinders: $M = 2\varrho\pi \cdot A$ . . . siehe Erkl. 578

$\varrho$ bedeutet den Radius des Normalschnitts.

**XII. Formeln für einen Cylinderhuf, dessen Grundfläche ein Halbkreis ist:**

38). Volumen $V = \frac{2R^2 \cdot H}{3}$ . . . . . . . siehe Erkl. 584

39). Mantel $M = 2R \cdot H$ . . . . . . . „ „ 583

**XIII. Formeln für einen Cylinderhuf, dessen Grundfläche ein Kreis ist:**

40). Volumen $V = \frac{R^2 \pi H}{2}$ . . . . . . . siehe Erkl. 585

41). Mantel $M = R\pi \cdot H$. . . . . . . . „ „ 585

$R$ bedeutet den Radius des Grundkreises des zugehörigen, geraden Kreiscylinders;
$H$ bedeutet die Höhe des hufförmigen Abschnitts.

**XIV. Formeln für den geraden Kreiskegel:**

42). Volumen $V = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot H}{3}$ . . . . . . . siehe Erkl. 50

43). Mantel $M = \pi \cdot R \cdot s$ . . . . . . . . „ „ 49

44). Oberfläche $O = \pi R(s + R)$ . . . . „ „ 107

45). Volumen $V$ für einen gleichseitigen Kegel:

a) . . . $V = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$ . . . . . . siehe Erkl. 116

oder

b) . . . $V = \frac{H^3 \pi}{9}$ . . . . . . . . „ „ 473

46). Oberfläche $O$ eines gleichseitigen Kegels: $O = 3\pi R^2$ . . . . siehe Erkl. 117

**XV. Formeln für den schiefen Kreiskegel:**

47). Volumen $V = \frac{R^2 \pi H}{3}$ . . . . . . . siehe Erkl. 564

48). Mantel und Oberfläche . . . . . . . „ „ 565

$R$ bedeutet den Radius der Grundfläche;
$H$ bedeutet die Höhe;
$s$ bedeutet die Seitenlinie.

**XVI. Formeln für den geraden Kreiskegelstumpf:**

49). Volumen $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ . . siehe Erkl. 53

50). Mantel $M = \pi s(R + r)$ . . . . . . „ „ 56

51). Oberfläche $O = \pi[s(R + r) + R^2 + r^2]$ „ „ 148

**XVII. Formeln für den schiefen Kreiskegelstumpf:**

52). Volumen $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ . siehe Erkl. 571

53). Mantel und Oberfläche . . . . . . . „ „ 572

$R$ bedeutet den Radius der Grundfläche;
$r$ bedeutet den Radius der Deckfläche;
$H$ bedeutet die Höhe;
$s$ bedeutet die Seitenlinie.

**XVIII. Formeln für die Kugel und ihre Teile.**

54). Volumen $V$ einer Kugel:

a) . . . $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . . . . . . . . siehe Erkl. 67

oder

b) . . . $V = \frac{\pi d^3}{6}$ . . . . . . . . . „ „ 67

55). Oberfläche $O$ einer Kugel:

a) . . . $O = 4\pi r^2$
oder
b) . . . $O = \pi d^2$ . . . . . . . . siehe Erkl. 62

56). Volumen $V$ einer Halbkugel:

a) . . . $V = \frac{2}{3}\pi r^3$
oder
b) . . . $V = \frac{\pi d^3}{12}$ . . . . . . . . „ „ 359

57). Inhalt $O$ einer Halbkugelfläche:

a) . . . $O = 2\pi r^2$
oder
b) . . . $O = \frac{\pi d^2}{2}$ . . . . . . . . siehe Erkl. 359

58). Volumen $V$ einer Hohlkugel:

a) . . . $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$
oder
b) . . . $V = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$ . . . . siehe Erkl. 70

$r$ bedeutet den Radius einer Kugel; $d$ bedeutet den Durchmesser einer Kugel. Bei einer Hohlkugel bedeutet: $R$ den Radius der als massiv gedachten Kugel und $r$ den Radius des inneren kugelförmigen Hohlraums, dessgleichen bedeuten bei einer Hohlkugel $D$ und $d$ die Durchmesser $2R$ und $2r$.

59). Inhalt $J$ einer Calotte und eines Kugelgürtels:

$J = 2\pi r h$ . . . . . . . . siehe Erkl. 63

60). Volumen $V$ eines Kugelabschnitts oder Kugelsegments:

a) . . . $V = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2)$ . . . . . siehe Erkl. 69
oder
b) . . . $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ . . . . . „ „ 151

61). Volumen $V$ einer Kugelschicht:

a) . . . $V = \frac{\pi h}{6}[3(\varrho^2 + \varrho_1^2) + h^2]$ s. Erkl. 68 und 286
oder
b) . . . $V = \pi\left[(H^2 - H_1^2)r - \frac{1}{3}(H^3 - H_1^3)\right]$ siehe Erkl. 158

62). Volumen $V$ eines Kugelausschnitts oder Kugelsektors:

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ . . . . . siehe Erkl. 71

$r$ bedeutet den Radius einer Kugel; $h$ bedeutet die Höhe einer Calotte oder eines Gürtels oder einer Kugelschicht od. eines Kugelsegments; bei dem Kugelsektor bedeutet $h$ die Höhe des zugehörigen Kugelsegments; $\varrho$ bedeutet den Radius des ein Kugelsegment begrenzenden Kreises; $\varrho$ und $\varrho_1$ bedeuten die Radien der Kreise, welche eine Kugelschicht begrenzen; $H$ und $H_1$ bedeuten die Höhen der Kugelsegmente als deren Differenz man eine Kugelschicht betrachten kann.

## XIX. Formeln für die regulären Polyeder:

### A). Für das Tetraeder:

63). Volumen $V = \frac{k^3}{12}\sqrt{2}$

64). Oberfläche $O = k^2 \cdot \sqrt{3}$

65). Höhe $H = \frac{k}{3} \cdot \sqrt{6}$

66). Radius $R$ der umbeschriebenen Kugel $= \frac{k}{4}\sqrt{6}$

67). „ $r$ „ einbeschriebenen „ $= \frac{k}{12}\sqrt{6}$

68). „ $\varrho$ „ alle Kanten berührenden Kugel $= \frac{k}{4}\sqrt{2}$

s. Erkl. 353

$k$ bedeutet die Kante des regulären Tetraeders.

B). Für das Hexaeder, den Würfel oder Kubus:

69). Volumen $V = k^3$

70). Oberfläche $O = 6k^2$

71). Körperdiagonale $D = k\sqrt{3}$

72). Radius $R$ der umbeschriebenen Kugel $= \frac{k}{2}\sqrt{3}$

73). „ $r$ „ einbeschriebenen „ $= \frac{k}{2}$

74). „ $\varrho$ „ alle Kanten berührenden Kugel $= \frac{k}{2}\sqrt{2}$

(69–74: siehe Erkl. 358; $k$ bedeutet die Kante des regulären Hexaeders.)

C). Für das Oktaeder:

75). Volumen $V = \frac{k^3}{3}\sqrt{2}$

76). Oberfläche $O = 2k^2\sqrt{3}$

77). Körperdiagonale $D = k\sqrt{2}$

78). Radius $R$ der umbeschriebenen Kugel $= \frac{k}{2}\sqrt{2}$

79). „ $r$ „ einbeschriebenen „ $= \frac{k}{6}\sqrt{6}$

80). „ $\varrho$ „ alle Kanten berührenden Kugel $= \frac{k}{2}$

(75–80: siehe Erkl. 361; $k$ bedeutet die Kante des regulären Oktaeders.)

D). Für das Dodekaeder:

81). Volumen $V = \frac{k^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$

82). Oberfläche $O = 3k^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$

83). Grösste Körperdiagonale $D = \frac{k}{2}(1 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3}$

oder $D = \frac{k}{2}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$

84). Radius $R$ der umbeschriebenen Kugel

$= \frac{k}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$

oder $= \frac{k}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$

85). Radius $r$ der einbeschriebenen Kugel

$= \frac{k}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$

oder $= \frac{k}{4}\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$

86). Radius $\varrho$ der alle Kanten berührenden Kugel

$= \frac{k}{4}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$

oder $= \frac{k}{4}(3 + \sqrt{5})$

(81–86: siehe Erkl. 363; $k$ bedeutet die Kante des regulären Dodekaeders.)

E). Für das Ikosaeder:

87). Volumen $V = \frac{5}{12}k^3\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$

oder $= \frac{5}{12}k^3(3 + \sqrt{5})$

88). Oberfläche $O = 5k^2\sqrt{3}$

89). Grösste Körperdiagonale $D = \frac{k}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

90). Radius $R$ der umbeschriebenen Kugel $= \frac{k}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

(87–90: siehe Erkl. 366; $k$ bedeutet die Kante des regulären Ikosaeders.)

91). Radius $r$ der einbeschriebenen Kugel $= \frac{k}{12} \sqrt{42 + 18\sqrt{5}}$

oder $= \frac{k}{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})$

92). Radius $\varrho$ der alle Kanten berührenden Kugel $= \frac{k}{4}(1 + \sqrt{5})$

## XX. Allgemeine Formeln für das Prismatoid, das Antiprisma, den Obelisken, das Ponton, den Keil etc.

93). Volumen $V = \left(2D + \frac{G+g}{2}\right) \cdot \frac{H}{3}$

oder

94). „ $V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$

siehe Erkl. 594

$D$ bedeutet den Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur;
$G$ bedeutet den Inhalt der unteren, grösseren Grundfläche;
$g$ bedeutet den Inhalt der oberen, kleineren Grundfläche:
$H$ bedeutet die Höhe.

## XXI. Spezielle Formeln für das Antiprisma:

95). Volumen $V$ eines dreiseitigen Antiprismas, dessen Grundflächen gleichseitige Dreiecke und dessen Seitenflächen kongruente Dreiecke sind:

$V = \frac{1}{3} H \cdot m^2 \cdot \sqrt{3}$ . . . siehe Erkl. 607

$m$ bedeutet eine Grundkante;
$H$ bedeutet die Höhe.

## XXII. Spezielle Formeln für den Obelisken.

96). Volumen $V = HD + \frac{1}{3} HE$ . . . siehe Erkl. 615

$H$ bedeutet die Höhe.
$D$ bedeutet den Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur;
$E$ bedeutet die Differenz zwischen der halben Summe der beiden Grundflächen $G$ und $g$ des Obelisken und der mittleren Durchschnittsfigur $D$; es ist also:

$$E = \frac{G+g}{2} - D$$

oder: $G + g = 2(D + E)$.

97). Volumen $V$ eines dreiseitigen Obelisken:

a) $V = \frac{H}{12}[AB + (A+a)(B+b) + ab]$

oder

b) $V = \frac{H}{2}\left[\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}\right]$

siehe Erkl. 618

$H$ bedeutet die Höhe;
$A$ eine Grundkante der unteren Grundfläche;
$a$ eine homologe Grundkante der oberen Grundfläche;
$B$ die zu $A$ gehörige Höhe der unteren Grundfläche und
$b$ die zu $a$ gehörige Höhe der oberen Grundfläche.

98). Volumen $V$ eines Obelisken mit quadratischen Grundflächen:

a) $V = \frac{H}{3}(A^2 + Aa + a^2)$

oder

b) $V = H\left[\left(\frac{A+a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{A-a}{2}\right)^2\right]$

siehe Erkl. 623 und 624

$H$ bedeutet die Höhe;
$A$ bedeutet eine Seite der unteren Grundfläche;
$a$ bedeutet eine Seite der oberen Grundfläche.

99). Volumen $V$ eines Obelisken mit paralleltrapezförmigen Grundflächen:

a) $V = \frac{H}{6}(2MC + mC + Mc + 2mc)$

oder

b) $V = H\left[\frac{M+m}{2} \cdot \frac{C+c}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{M-m}{2} \cdot \frac{C-c}{2}\right]$

siehe Erkl. 628

$M$ bedeutet die Mittellinie und $C$ die Höhe der unteren Grundfläche;
$m$ bedeutet die Mittellinie und $c$ die Höhe der oberen Grundfläche;
$H$ bedeutet die Höhe.

100). Volumen $V$ eines Antiobelisken, dessen untere Grundfläche eine Raute und dessen obere Grundfläche ein Rechteck ist, dessen Seiten parallel den Diagonalen jener Raute sind:

$$V = \frac{5}{3} m \cdot n \cdot H \quad . \quad . \quad \text{siehe Erkl. 634}$$

$H$ bedeutet die Höhe;
$m$ bedeutet die Hälfte der einen Diagonale und
$n$ bedeutet die Hälfte der andern Diagonale der rautenförmigen Grundfläche.

101). Volumen $V$ eines Antiobelisken, dessen untere Grundfläche ein Quadrat und dessen obere Grundfläche ebenfalls ein Quadrat ist, dessen Seiten parallel den Diagonalen jenes ersten Quadrats und halb so lang als diese sind:

$$V = \frac{5}{6} A^2 \cdot H \quad . \quad . \quad . \quad \text{siehe Erkl. 637}$$

$A$ bedeutet die Seite der quadratförmigen Grundfläche;
$H$ bedeutet die Höhe.

**XXIII. Spezielle Formeln für das Ponton:**

102). a) Volumen $V = \frac{H}{6}[AB + (A + a)(B + b) + ab]$

oder

b) „ $V = \frac{H}{6}[2AB + aB + Ab + 2ab]$

oder

c) „ $V = \frac{H}{6}[(2A + a)B + (2a + A)b]$

(a)–c) siehe Erkl. 640)

oder

d) „ $V = H\left(\frac{A+a}{2} \cdot \frac{B+b}{2} + \frac{1}{3} \frac{A-a}{2} \cdot \frac{B-b}{2}\right)$ siehe Erkl. 641

$H$ bedeutet die Höhe;
$A$ und $B$ bedeuten die Seiten der unteren Grundfläche;
$a$ und $b$ bedeuten die Seiten der oberen Grundfläche.

e) Volumen $V$ eines Pontons mit quadratischen Grundflächen:

$$V = H\left[\left(\frac{A + a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{A - a}{2}\right)^2\right] \quad \text{siehe Erkl. 643}$$

$H$ bedeutet die Höhe;
$A$ bedeutet eine Seite der unteren Grundfläche;
$a$ bedeutet eine Seite der oberen Grundfläche.

**XXIV. Spezielle Formeln für den Keil:**

103). Volumen $V$ eines gewöhnlichen Keils (siehe Fig. 217) mit rechteckigem Rücken:

a) $V = \frac{Hs}{2}\left(\frac{A + a}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A - a}{2}\right)$

oder

b) $V = \frac{Hs}{6}(2A + a)$

(a) und b) siehe Erkl. 647)

$H$ bedeutet die sogenannte Länge;
$s$ bedeutet die Schneide;
$A$ und $a$ bedeuten die Seiten des rechteckigen Rückens;

104). Volumen $V$ des durch die Figur 218 dargestellten Keils, eines sogenannten Spheniskes:

$$V = \frac{2}{3} a \cdot b \cdot H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{siehe Erkl. 651}$$

$H$ bedeutet die Höhe;
$a$ und $b$ bedeuten die Seiten des rechteckigen Rückens.

**XXV. Formeln zur Berechnung von Rotationskörpern und Rotationsflächen.**

**A). Guldinische Regeln:**

105). Volumen $V$ eines beliebigen Rotationskörpers:

$$V = 2s\pi \cdot F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{siehe Erkl. 707}$$

$s$ bedeutet den Abstand des Schwerpunkts der erzeugenden Figur von der Drehachse (siehe Erkl. 711);
$F$ bedeutet den Inhalt der erzeugenden Figur;

106). Inhalt $F$ einer beliebigen Rotationsfläche:

$$F = 2s\pi \cdot L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{siehe Erkl. 708}$$

$s$ bedeutet den Abstand des Schwerpunkts der erzeugenden Linie von der Drehachse (siehe Erkl. 712);
$L$ bedeutet die Länge der erzeugenden Linie.

### B). Spezielle Formeln für einige Rotationskörper:

107). Volumen $V$ eines Rotationsparaboloids:

a) . . . $V = \frac{1}{2} R^2 \pi H$

oder . . . siehe Erkl. 721

b) . . . $V = \frac{G \cdot H}{2}$

$R$ bedeutet den Radius der Grundfläche;
$H$ bedeutet die Höhe und
$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche des Paraboloids.

108). Volumen $V$ eines abgestumpften Rotationsparaboloids:

$V = \frac{H}{2}(G + g)$ . . . . siehe Erkl. 725

$H$ bedeutet die Höhe;
$G$ bedeutet den Inhalt der Grundfläche und
$g$ bedeutet den Inhalt der Deckfläche des Stumpfs.

109). Volumen $V$ eines länglichen Rotationsellipsoids:

a) . . . $V = \frac{4}{3} a b^2 \cdot \pi$

oder . . . siehe Erkl. 729

b) . . . $V = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot b^2 \pi$

110). Volumen $V$ eines abgeplatteten Rotationsellipsoids:

a) . . . $V = \frac{4}{3} a^2 b \pi$

oder . . . siehe Erkl. 730

b) . . . $V = \frac{2}{3} \cdot 2b \cdot a^2 \pi$

$a$ bedeutet die halbe grosse Achse;
$b$ bedeutet die halbe kleine Achse des Ellipsoids.

### C). Simpsonsche Körperregeln:

111). Einfache Simpsonsche Körperregel:

$V = \frac{H}{6}(G + 4D + g)$ . . siehe Erkl. 734

$H$ bedeutet die Höhe;
$D$ bedeutet den Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur;
$G$ bedeutet den Inhalt der unteren Grundfläche und
$g$ bedeutet den Inhalt der oberen Grundfläche.

112). Erweiterte Simpsonsche Körperregel:

$$V = \frac{h}{3}\Big[(f_1 + f_{2n+1}) + 2(f_3 + f_5 + \cdots \cdots f_{2n-1}) + 4(f_2 + f_4 + f_6 + \cdots f_{2n})\Big]$$ siehe Erkl. 738

$h$ bedeutet die Sektionsbreite;
$(f_1 + f_{2n+1})$ bedeutet die Summe der Inhalte der beiden Endflächen;
$2(f_3 + f_5 + \cdots f_{2n-1})$ bedeutet die doppelte Summe der Inhalte der ungeraden Durchschnittsfiguren;
$4(f_2 + f_4 + f_6 + \cdots f_{2n})$ bedeutet die vierfache Summe der Inhalte der geraden Durchschnittsfiguren, durch welche die gerade Anzahl von Sektionen abgegrenzt werden.

### E). Formeln zur Berechnung des Inhalts von Fässern:

113). $V = \frac{\pi L}{60}(8S^2 + 3B^2 + 4BS)$ . . . siehe Erkl. 731

114). $V = \frac{\pi L}{12}(B^2 + 2S^2)$ . . . . . . „ „ 739

Lamberts Formeln:

115). $V = \left(\frac{\frac{2}{3}S + \frac{1}{3}B}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot L$ . . . siehe Erkl. 740

116). $V = \frac{\pi L}{36}(4S^2 + 4BS + B^2)$

117). $V = 0{,}0873 \cdot \pi L (4S^2 + 4BS + B^2)$ siehe Erkl. 741

$L$ bedeutet die Fasslänge;
$B$ bedeutet die Bodentiefe;
$S$ bedeutet die Spundtiefe.

# Berichtigungen.

1). Seite 5, in der Aufgabe 7 soll es heissen: 5,4 m, statt: 30 m.

2). „ 12, in der Lösung der Aufgabe 13 soll es heissen:
Setzt man nämlich hierin: $U = 8 \cdot a = 8 \cdot 1{,}6$, statt:
„ „ „ „ $U = 6 \cdot a = 6 \cdot 1{,}6$, dementsprechend erhält man als Lösung der Aufgabe 1138 *M.* 75 *₰*, statt: 854 *M.* 6 *₰*.

3). „ 17, in der Lösung der Aufgabe 18 soll es heissen: die lichte Weite (der Durchmesser) des Neuscheffels ist somit 4,57078 cm, statt: 9,14156 cm, dementsprechend erhält man für die Tiefe des Neuscheffels 3,04718 cm statt 6,09436 cm.

4). „ 25, in der Lösung der Aufgabe 26 soll in dem Bruche rechts in der Gleichung 4) der Nenner 3 statt dem Nenner 2 stehen, dementsprechend erhält man:

$x = 2{,}8330$, statt: $x = 2{,}4748$,
$= 3 \cdot 2{,}8330 = 8{,}4990$, statt: $t = 7{,}4244$ cm
$W = 4 \cdot 2{,}8330 = 11{,}3320$, „ $W = 9{,}8992$ „
$w = 2 \cdot 2{,}8330 = 5{,}6660$, „ $w = 4{,}9496$ „

5). „ 57, in der Aufgabe 104 soll es heissen: rechteckigen, statt: achteckigen.

6). „ 117, in der Erkl. 210 soll es heissen: Jene Seite, statt: Jede Seite.

7). „ 167, „ „ „ 270 „ „ „ $R = \frac{\sqrt{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

statt: $R = \frac{\sqrt{(a \cdot b + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

dementsprechend ändert sich die Auflösung in Aufgabe 329.

8). „ 244, „ „ „ 366 soll es in Formel 2) heissen: $O = 5k^2\sqrt{3}$, statt: $O = 5k_1^2\sqrt{3}$.

9). „ 429, „ „ „ 584 soll es heissen: $V = \frac{2R^2 \cdot H}{3}$, statt: $V = \frac{2R^2 \cdot H}{5}$.

10). „ 448. „ „ „ 623 „ „ „ $D = \left(\frac{A+a}{2}\right)^2$, statt: $\left(\frac{A+c}{2}\right)^2$.

Verlag von L. v. Vangerow, Bremerhaven und Leipzig.

# Verzeichnis
## der bisher erschienenen Bände
von

# Kleyers Encyklopädie

der gesamten

## mathematischen technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herausgegeben unter Mitwirkung bewährter Fachmänner.

---

Preisgekrönt in Frankfurt a. M., St. Louis, Athen.

---

**Wer niedere und höhere Mathematik**, z. B.: **bürgerliches und kaufmännisches Rechnen, Buchstabenrechnung, Gleichungen 1. 2. 3. und 4. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Differential- und Integralrechnung etc., Planimetrie, Stereometrie, analytische Geometrie, Projektionszeichnen (darstellende Geometrie). ebene uud sphärische Trigonometrie, Goniometrie (Winkelmessungslehre), Vermessungskunde (Geodäsie), Astronomie, Physik, Mechanik, Geostatik, Geodynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik, Elektrizität, Chemie und deren Hilfswissenschaften** studieren, oder wer, in der Praxis stehend, in diesen Fächern sich weiterbilden oder seine Kenntnisse auffrischen will, erhält durch

## Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften : : :

mit ca. 10,000 in den Text gedruckten Figuren,

herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner,

**eine auch auf die praktischen Bedürfnisse des Technikers** Rücksicht nehmende Auswahl von leichtverständlichen Lehrbüchern, die sowohl **dem Studierenden, dem Fachlehrer, als dem ausübenden Techniker** ein wohlvorbereitetes Material zum Studium und zum Nachschlagen darbieten; besonders wertvoll erscheinen dieselben dadurch, dass durch sie die Befähigung zur Lösung mathematischer und technischer Probleme ausserordentlich gefördert wird.

**Jeder Band ist einzeln käuflich, und zu beziehen durch jede Buchhandlung des In- und Auslandes.**

# P. P.

Hiermit beehre ich mich, Ihnen das neueste Verzeichnis von:

## Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften

zu überreichen.

Aus der überaus großen Zahl der anerkennendsten Besprechungen, welche in Schul-, technischen und Tagesblättern erschienen und von welchen eine kleine Anzahl dem Kataloge beigegeben sind, bringe ich besonders den folgenden Ausspruch des „Pf. Courier“ zum Abdruck:

„In einzig dastehender Weise werden hier die mathematischen und die damit verwandten technischen und exakten Natur-Wissenschaften in ihrem ganzen Umfang von den elementarsten Regeln der Arithmetik bis zu dem stolzen Gebäude der höheren Mathematik behandelt. Das Werk dient gleichmässig den Zwecken des Schulunterrichts, wie denjenigen des Selbststudiums. Es enthält nicht nur die sonst in jedem Lehrbuch vorkommenden Definitionen, Lehrsätze, Formeln usw., sondern auch ausser vielen ungelösten Aufgaben eine Reihe Aufgabenlösungen, die in Bezug auf die Exaktheit und Sauberkeit der Darstellung unübertroffen dastehen, daneben häufig historische Exkursionen. Wer an der Hand dieser Lehrmittel von Stufe zu Stufe fortschreitend die mathematischen Disziplinen durcharbeitet, wird unstreitig schöne Erfolge erzielen, und die oft verhängnisvolle Ansicht, dass es zum Betrieb der trockenen Mathematik besonderer Talente bedürfe, wird dann von manchem als unzutreffend aufgegeben werden müssen.“

Die Lehrbücher der Kleyerschen Encyklopädie eignen sich ganz besonders zur Unterstützung des Unterrichts und Vortrags an den verschiedensten Lehranstalten, zum Selbststudium, zur Forthilfe bei Schularbeiten, zur Repetition, zur Vorbereitung für Examina und zum Nachschlagen für Fachleute, da bei den ausführlichen Lösungen gut gewählter Aufgaben, welche alle Teile dieser Encyklopädie enthalten, überall die Anwendungen der Gesetze, der Sätze, Regeln, Formeln etc. gezeigt werden.

Jährlich erscheinen von diesem Werke eine Anzahl neuer Bände, und sowohl die beteiligten Autoren, als auch die Verlagsbuchhandlung lassen es sich angelegen sein, den Ausbau des grossen Unternehmens nach Möglichkeit zu fördern.

Hochachtungsvoll

**Bremerhaven.** **L. v. Vangerow**, Verlagsbuchhandlung.

## I. Mathematik.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik).

**Lehrbuch der Grundrechnungsarten.** Erstes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.** Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **A. Frömter.** Preis: Mk. 3,—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

**Lehrbuch der Grundrechnungsarten.** Zweites Buch: **Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Frömter** und **Neubüser.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

**Lehrbuch der Grundrechnungsarten.** Drittes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.)** Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. G. Maier.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

**Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen** (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen.** Zweiter Teil: **Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen.** Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. **Hans Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens.** Erster Teil: **Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen.** Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer **Münz-, Mass- und Gewichtstabelle.** Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Richard Olbricht.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

**Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens.** Zweiter Teil: **Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente.** Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von **Dr. R. Olbricht.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung** nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln** nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Adolf Kleyer**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten.** Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Otto Prange.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

**Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades.** (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des **Bachez de Méziriac,** im französischen Originale mit beigefügter deutscher Übersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von **W. Fr. Schüler.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

**Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten** (Quadratische Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Dr. Aug. Blind.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

**Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten.** (Quadratische Gleichungen.) Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades.** Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der Körperberechnungen.** Erstes Buch: Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 Figuren. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der Körperberechnungen.** Zweites Buch: Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

**Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erklärungen und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

# Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

**Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen,** nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen.** (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der Logarithmen** nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln** nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: in einfachem Leineneinband Mk. 2.50.

**Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen.** Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: kartonniert 60 Pfg.

**Lehrbuch der Integralrechnung.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

**Lehrbuch der Integralrechnung.** Zweiter Teil: Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik.** Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

**Lehrbuch der Differentialrechnung.** Erster Teil: **Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen.** Ohne Anwendung der Grenzen und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben und Formelverzeichnis. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—

**Lehrbuch der Differentialrechnung.** Zweiter Teil: **Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima.** Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren, 230 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch der Differentialrechnung.** Dritter Teil: **Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.** Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren, 138 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

**Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen.** Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Krüger.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.** Mit 23 Figuren. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 1.50. In einfachem Leinenband Mk. 2.—.

**Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie.** Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

**Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. G. Weichold.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Erster Teil: **Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 1.80. Geb. nur mit Teil II zus. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Zweiter Teil: **Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 2.20. Geb. nur mit Teil I zus. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Dritter Teil: **Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie)). Vierter Teil: **Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Örter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Fünfter Teil: **Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Sechster Teil: **Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Siebenter Teil: **Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Achter Teil: **Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke.** Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. —.50.

**Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie).** Erster Teil: **Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Seipp.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis.** Erster Teil: **Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis.** Zweiter Teil: **Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 Figuren. Bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

**Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis.** Dritter Teil: **Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren.** Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Bearbeitet von **Prof. E. R. Müller.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

**Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene.** Erster Teil: **Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden.** Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene.** Zweiter Teil: **Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades.** Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie).** Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Faches, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte usw. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

**Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben.** Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach **System Kleyer** durchaus neu bearbeitet. Zweite Auflage. Von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik** gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert.** Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

**Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.** Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 18.—. Geb. Mk. 19.50.

**Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre)** mit 307 Erklärungen und 52 Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

**Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).** Erster Teil: **Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 361 Erklärungen und 97 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).** Zweiter Teil: **Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).** Dritter Teil: **Pol und Polare. Mittelpunktseigenschaften. Involution. Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 550 Erklärungen und 172 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen.** Mit 259 Fragen und Antworten, 199 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. A. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Erster Teil: **Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

**Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Zweiter Teil: **Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

**Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Dritter Teil: Erste Hälfte: **Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie.** Mit 195 Erklärungen und 169 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

**Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Dritter Teil: Zweite Hälfte: **Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.** Mit 218 Erklärungen und 210 Figuren. Von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Vierter Teil: Erste Hälfte: **Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Vierter Teil: Zweite Hälfte: In Vorbereitung.

**Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

**Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie.** Erster Teil: **Sphärische Astronomie.** Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten, bearbeitet von **Prof. Dr. W. Laska.** Preis Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Die Nautik in elementarer Behandlung.** Einführung in die Schiffahrtkunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Fr. Bolte,** Direktor der Navigationsschule in Hamburg. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch der Kartographie. Die Kartographie nach Einführung der Terraindarstellung in Karten und Plänen.** Erster Teil. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Victor Wessely.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

## II. Physik, Elektrizität, Chemie, Akustik.

**Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.)** Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper.** Mit 35 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

**Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen.** Mit 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus** nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckten Figuren und 10 Karten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik)** mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik)** mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.

**Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

**Lehrbuch der Elastizität und Festigkeit** mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.50. Geb. Mk. 6.50.

**Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik)** mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 13.50. Geb. 14.50.

**Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).** Erster Band: **Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter, sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen.** Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).** Zweiter Band: Erste Hälfte: **Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand.** Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

**Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).** Zweiter Band: Zweite Hälfte: **Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger.** Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

**Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität),** erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

**Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus)** nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik).** Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Ad. Krebs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

**Lehrbuch der Elektrodynamik.** Erster Teil: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

**Lehrbuch des Elektromagnetismus.** Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. O. May** und **Ad. Krebs.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

**Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie.** Erster Band. **Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—

**Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie.** Zweiter Band. **Die Metalle.** Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.

**Lehrbuch der Akustik.** Erster Band: **Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen.** Mit 257 Erklärungen und 106 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 70 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 4,50. Geb. Mk. 5,50.

**Lehrbuch der Akustik.** Zweiter Band: **Die verschiedenen Tonerreger.** Mit 465 Erklärungen und 315 in den Text eingedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 114 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

**Lehrbuch der Akustik.** Dritter Band. Erste Hälfte: **Die Fortpflanzungserscheinungen des Schalles, nebst den Erscheinungen zusammengesetzter Schwingungsbewegungen.** Mit 393 Erklärungen und 235 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 66 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

**Lehrbuch der Akustik.** Dritter Band. Zweite Hälfte: **Praktische Akustik d. i. die Akustik in großen begrenzten Räumen, in Konzert- und Hörsälen, in Kirchen und Theatern.** Mit 136 Erklärungen und 85 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 3,50. Geb. Mk. 4,50.

**Entstehung und Entladung der Gewitter, sowie ihre Zerstreuung durch den „Blitzkamm"** (Fulgura frango). Eine metereologische Betrachtung von **Richard Klimpert.** Preis gebunden Mk. 2.—.

# Anerkennungen aus dem Publikum
## über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herr Pfarrer Kaspar-Altlussheim schreibt: „Ich werde dieses vorzügliche Werk Ihres Verlages empfehlen, wo ich kann. Ich habe es als das einzige kennen gelernt, das die für Manchen etwas trockene Wissenschaft der Algebra und Geometrie mit Geist und Leben füllt und imstande ist, auch ohne Lehrer die größten Schwierigkeiten überwinden zu helfen. Es ist ein gewaltiges Stück Arbeit, das in den verschiedenen, nach einheitlichem, erprobtem Plane verfaßten Bänden liegt und für das jeder Lernende den Bearbeitern und dem Verlag vielen Dank schuldet. Ich wünsche Ihrem Unternehmen im Interesse der Lernenden die weiteste Verbreitung."

**Bonn.** Mit vielem Interesse habe ich Ihre Unternehmung verfolgt, eine praktische math.-naturwissenschaftliche Bibliothek zu schaffen, und in der Erkenntnis, wie sehr eine solche billige Bibliothek dem allgemeinen Bedürfnis entspricht, werde ich nach Kräften für ihre weitere Verbreitung mich bemühen. Ich bin Ihnen dankbar für die Erleichterung, welche Sie auch mir durch Ihr Werk bei meinen Studien geschaffen haben. Namentlich freue ich mich, dass in der Differentialrechnung, bei welcher ja eine einfache, dem Wissen des Anfängers entsprechende Darstellung große Schwierigkeiten bietet, eine so praktische, mit Konsequenz durchgeführte Darstellungsweise von Ihnen gegeben worden ist u. s. f.
Fr. Blencke, stud. rer. nat.

**Dahbruch b. Siegen.** . . . . . Im Uebrigen kann ich von Ihren Lehrbüchern nur lobenswertes erwähnen und wünsche nur, dass dieselben ein Jahrzehnt eher zur Welt gekommen wären. Es ist mir bis jetzt noch kein Werk in die Hände gekommen, das in so leicht faßlicher Weise dem Schüler die exakten Wissenschaften beizubringen imstand wäre, u. s. f.
W. Altpeter, Ing.

**Budapest.** Vor allem sei es mir gestattet, Ihnen für den Verlag der Kleyerschen Encyklopädie meine vollste Anerkennung auszusprechen. — Einem Bedürfnis in wirklich vorzüglicher Weise abhelfend, behandeln die Publikationen der erwähnten Sammlung, die mathematischen Disziplinen nach theoretisch und praktisch richtiger Lehrmethode, was ich aus eigener Erfahrung als Lehrer an einer Militärbildungsanstalt vollauf bestätigen kann: indem die handlichen Heftchen mit ihrem reichen Stoff ein wirkliches Lehrbuch für den Schüler und ein vorzügliches Hilfsbuch für den Lehrer bilden. . . . .
Ferd. von Jerzabek, k. k. Leutnant.

**Engelberg,** Benediktiner-Stift. Da Ihr Werk „math.-tech.-naturwissenschaftliche Encyklopädie", soweit es bis heute vollendet vorliegt, auch an unserem Gymnasium allseitig wohlverdiente Anerkennung gefunden hat, so möchte speziell ich, als Lehrer der Mathematik, Ihnen heute die Gefühle meines Dankes und meiner Hochachtung für das treffliche Werk bekunden. Die bis ins Detail gehende, dabei doch so übersichtlich geordnete, leicht faßliche, klare Entwicklung der Beweise ist es ganz besonders, die mir Ihr Werk lieb und teuer macht, deswegen meinen herzlichsten Dank für Ihre mühevolle, so meisterhaft ausgeführte Arbeit, u. s. f. P. Basilius Fellmann, O. S. B.

**Oberwinterthur.** . . . . Vor allem empfangen Sie meinen wärmsten Dank für die Initiative und im allgemeinen glückliche Ausführung der Idee. Gewiß kann jeder mit fleißiger Benutzung Ihrer geschätzten Hefte durch Selbstunterricht schöne Erfolge in dieser Disziplin erzielen, u. s. f.
Jacob Flur, Lehrer.

**Hartford** (Connecticut). Ich wünsche Ihnen unaufgefordert meinen Gefallen über den Vorteil auszudrücken, welchen ich bei verschiedentlichem Gebrauch bei der Behandlung Ihrer wirklich ausgezeichneten Kleyerschen mathematisch-technischen-naturwissenschaftlichen Encyklopädie gehabt habe. Ich habe nicht allein eine große persönliche Begeisterung für sie, sondern ich habe dieselbe mit Nutzen auch in meiner Schule gebraucht. Ich bin Lehrer der Mathematik an der Public Highe School (gleichbedeutend mit Ihren Gymnasien und Realschulen), u. s. f. Homer W. Brainard.

**Berlin.** Seit zwei Jahren beziehe ich nun schon von meiner Buchhandlung Ihre Kleyer-Bandausgaben. Welche Dienste sie mir geleistet, vermag ich auf diesem kleinen Raume nicht auszusprechen. H. Schaepel jr., Gymnasiast.

Herr **Dr. Otto Willareth in Sand i. Elsass** schreibt an den Verleger: Vermutlich mache es Ihnen Freude und ist es in Ihrem Geschäfts-Interesse wichtig, meine Anzeige über Ihr Verlagsunternehmen **Kleyers Encyklopädie** zu erhalten, welche ich in der **„Straßburger Post"**, dem größten Blatt von Südwest-Deutschland, No. 809 vom 11. September 1901, habe erscheinen lassen. Deshalb gestatte ich mir, Ihnen diese Besprechung als Drucksache zu übersenden. Mit dieser Besprechung möchte ich Ihnen und den Verfassern dieser Encyklopädie eine Dankesschuld abtragen für eines der segensreichsten litterarischen Unternehmen der Gegenwart. Ich besitze einen bedeutenden Teil Ihrer Encyklopädie und stets ist es mir eine Freude, darin zu arbeiten. Jedenfalls liegt es im Interesse der Sache, dass sie möglichst bekannt und verbreitet wird, damit Ihnen und den Herren Verfassern die Lust nicht an dem mühevollen Unternehmen ausgeht etc.

**Berlin.** Durch einen glücklichen Zufall wurde ich vor Kurzem mit Kleyers Encyklopädie bekannt und ich bemerkte nach kurzem Studium derselben, dass ein vortreffliches Werk im Erscheinen begriffen sei, u. s. f. Edm. Koebke, stud. math.

**Währing b. Wien.** . . . . Da das unter Ihrer werten Leitung erscheinende voluminöse Werk leider erst einige Teile vollständig enthält, aber entschieden das Vortrefflichste in Bezug auf Selbststudium leistet, u. s. f. Joseph Hackenberg, Beamter.

**Traunstein.** Es würde mich herzlich freuen, wenn es mir in meiner Besprechung gelungen wäre, das Interesse eines weiteren Leserkreises für Ihr großartiges, wahrhaft zeitgemäßes und eminent praktisches Unternehmen nachhaltig anzuregen.
R. Knilling, Lehrer.

**Braunschweig** . . . . ich war überrascht und hocherfreut über ein Unternehmen (bezieht sich auf den chemischen Teil der Encyklopädie. Die Redakt.), welches mir so ganz aus der Seele herausgeschrieben war. . . . Wie Sie den Stoff behandeln, wird er noch von keiner Seite auch nur annähernd gehandhabt, abgesehen von Katechismen, u. s. f. . . . . . Gestatten Sie mir als praktischem Lehrer der Chemie, der viele heterogene Elemente zu unterrichten hat, Ihnen zu diesem schönen Werke meinen verbindlichsten Glückwunsch auszusprechen. Möge es Ihnen vergönnt sein, das Werk in dem Sinne des Prospektus zu Ende zu führen, und glaube ich fest, dass die wirklichen Lehrer der Chemie Ihnen zu vollem Dank verpflichtet sein werden, u. s. f.
Dr. Ed. Freise, Direktor der Droguisten-Fachakademie.

**Cambridge** (England). Während meines Besuches in Kreuznach habe ich mich interessiert, einige deutsche Schulbücher mit unseren englischen zu vergleichen. Ich habe mehrere Hefte der Kleyerschen Encyklopädie durchgeblättert und finde, dass dieselben höchst praktisch und brauchbar sind, besonders für die zuwachsende Anzahl selbstunterrichtender Studenten. Ich bin ein Sachkenner in der reinen und angewandten Mathematik, Ehrengraduatus (etwa wie deutscher Ph.-Doktor) und Dozent in der Cambridge Universität und würde sehr gerne helfen, einige Hefte zu übersetzen. Ich werde auch Mitarbeiter finden können, dass es möglich wird, nach und nach vielleicht das ganze Werk in englisch herauszugeben. Wenn Ihnen dieser Vorschlag gefällt, können wir später Näheres darüber erörtern. Ich glaube, dass eine Uebersetzung einen sehr guten Verkauf haben würde, nicht nur in Großbritannien und Irland, sondern auch in Amerika und in den britischen Kolonien.
Theodore E. Worlledge.

**Wien.** Gestatten Sie uns, Ihnen unsern Dank für Ihre einzig dastehende Aufgabensammlung, die wir schon bei ihrem ersten Erscheinen mit Freuden begrüßten, u. s. f. . . . Genehmigen Sie deshalb den Dank für Ihre ausgezeichnete Encyklopädie.
Mehrere Studierende der Wiener Universität.

**Sundswall** (Schweden). Im Besitze einiger Hefte der ausgezeichneten Kleyerschen Encyklopädie bin ich so frei gewesen, in der beigefügten Zeitung die Aufmerksamkeit des schwedischen Publikums darauf zu richten und ist es meine Hoffnung, sowohl den Interessenten, als Ihnen einen Dienst erwiesen zu haben. Das Werk ist in Schweden leider zu wenig bekannt. D. F. Lundgren.

**Brünn.** Als erster Abnehmer Ihrer in der Tat sehr vortrefflichen Encyklopädie, u. s. f. . . . . Meine zahlreichen Schüler machen den besten Gebrauch von dieser einzig dastehenden Aufgabensammlung und bitten unaufhörlich, zu veranlassen, dass weitere Teile erscheinen. Franz Schwaben, Lehrer.

**Bergedorf** bei Hamburg. Bereits im Besitze mehrerer Bände der Kleyerschen Encyklopädie habe ich die vortrefflichen Werke schon vielen Interessenten mit Erfolg empfohlen. Albert Zander, Lehrer an der Hansaschule.

**Gleiwitz.** . . . . .; deshalb habe ich mit Freuden Ihr Werk begrüßt, u. s. f. . . . ,; ich aber mit förmlicher Begierde Ihre so klar gelösten Aufgaben, u. s. f. George Feumer.

**Coburg.** Bitte um sehr gefl. Mitteilung, bis wann die Lehrbücher über Bau- und Ingenieurwissenschaften nach System Kleyer erscheinen werden. Mit derartigen Büchern würden Sie die ganze Welt erfreuen. Ist Integralrechnung II. Teil erschienen? J. Eichhorn, Zivilingenieur und Patentanwalt.

**Selmeczbanya** (Ungarn). . . . . und ich muß offen gestehen, dass, wenn ich mich auch der deutschen Sprache noch nicht mächtig genug fühle, so werde ich doch am schnellsten aus diesem Werke zum Ziel gereichen, und eher lerne ich die Sprache, als dass ich das Werk nicht benutze, u. s. f. Ludwig Veress.

**Linz.** . . . . Anschließend spreche ich Euer Wohlgeboren meinen herzlichsten Dank aus für die Herausgabe Ihrer trefflichen Aufgabenhefte, die mir Gelegenheit verschaffen, mir privat und ohne große Auslagen Kenntnis von allen Partien der reinen und angewandten Mathematik zu verschaffen, u. s. f. Herrmann Bauernberger, stud. theol.

**Bochum i. W.** . . . . Ew. Hochwohlgeboren im Erscheinen begriffenes, so lehrreiches und auch von Laien leichtverständlich gehaltenes Werk: „Die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen" habe ich mit Freuden begrüßt, u. s. f. C. P. Kupfer.

---

# Urteile der Presse

## über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

**Pädagogisches Jahrbuch von Emil Schneider.** Dem Verlage von L. v. Vangerow, Bremerhaven, gebührt das Verdienst, durch Herausgabe der Kleyerschen Encyklopädie ein Werk geschaffen zu haben, das durch die Art seines Erscheinens und durch die Eigentümlichkeit in der Behandlung des Stoffes auch diejenigen, die keine gelehrte Schule besucht haben, in den Stand setzt, sich durch eigenen Fleiß ein reiches und gründliches Wissen zu erwerben. Der vorliegende Band ist in jeder Beziehung eine Musterleistung und wird hiermit wie das ganze Werk nachdrücklichst empfohlen. Man kann nur wünschen, dass uns der rühmlichst bekannte Verfasser bald mit einem nach demselben Plane bearbeiteten Lieferungswerke über die beschreibenden Naturwissenschaften beschenken möge.

**Naturae Novitates.** Die Kleyersche Encyklopädie ist dem Studierenden schon längst ein wohlbekanntes, unentbehrliches Hilfsmittel geworden, so dass man als die beste Empfehlung der neu vorliegenden Bände bezeichnen kann, dass diese sich in Inhalt und Form würdig ihren Vorgängern anschließen.

# Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

**Literaturblatt für höhere Schulen. Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil.** Wenn man nach der vorliegenden Schrift die ganze Kleyersche Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften beurteilen darf, so verdient dieses Unternehmen weit mehr Beachtung und Unterstützung, als es bislang in Kollegenkreisen gefunden hat. Offen gestanden bin ich mit dem Verdachte an die Lektüre dieses Buches herangetreten, dass es, als für den Selbstunterricht und die elementare Technik berechnet, in wissenschaftlicher Beziehung manches zu wünschen übrig lassen werde. Aber ich bin sehr angenehm enttäuscht worden; das Buch ist durchaus wissenschaftlich angelegt und weit gründlicher durchdacht, als die meisten Lehrbücher der Stereometrie; dass es dabei auch vielfach auf die Praxis des Lebens eingeht, kann ihm nur zur weiteren Empfehlung gereichen. Mir ist keine Schrift bekannt, welche die räumlichen Lageverhältnisse von Geraden und Ebenen mit der Allgemeinheit und Gründlichkeit untersucht, wie die vorliegende Stereometrie. Ganz besonderen Wert hat das Buch auch dadurch, dass eine große Menge konstruktiver Aufgaben erschöpfend oder wenigstens mit Andeutungen zur Lösung vorgeführt wird; besonders sorgfältig ist stets die Determination behandelt. Allen Kollegen, die bislang die konstruktive Seite der Stereometrie weniger beachtet haben, sei hiermit das Seippsche Buch nachdrücklichst empfohlen; ebenso seien die Studierenden zur Ausbildung ihrer Raumanschauung darauf hingewiesen, um so lieber, als die Zeichnungen durchweg mustergültig sind.

**Pfälzische Lehrerzeitung.** Von diesem großartigen, bis jetzt unerreicht dastehenden Unternehmen liegen uns weitere Bände vor. Für die Zwecke des Selbststudiums sind diese Werke das Beste, was es giebt. Auch in Schulen dürften sie mit großem Nutzen zu gebrauchen sein.

**Literaturblatt für katholische Erzieher.** Bezüglich dieser nach Kleyers System bearbeiteten Lehrbücher können wir uns kurz fassen. „Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen etc. Wissenschafen bietet, wie bereits allgemein anerkannt, die besten Unterrichtsmittel."

**Pädagogisches Literaturblatt. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Anlage und Ausführung des Sachsschen Lehrbuchs sind vorzüglich. Der Verleger hat für eine gute Ausstattung Sorge getragen, die Figuren insbesondere zeichnen sich durch wohltuende Klarheit und Schärfe aus. Gesamturteil: das Buch ist für den Selbstunterricht, wie auch zum Gebrauch an entsprechenden Unterrichtsanstalten nach jeder Richtung hin aufs beste geeignet.

**Der Techniker, New York.** Die systematische Einteilung und Behandlung des umfangreichen Lehrmaterials mit zahlreichen erläuternden Aufgaben und Beispielen, wie in dem vorliegenden Werke, ist sehr fördernd und anregend für das Studium und ein allseitig anerkannter Vorzug der Kleyerschen Unterrichtsmethode; so verfaßte Lehrbücher sind nicht allein für Schulunterricht, sondern auch zum Selbststudium und als Nachschlagebücher für den praktischen Fachmann von hohem Nutzen.

**Zeitschrift für Realschulwesen, Wien. Hovestadt, Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Größen.** Das Buch, welches den Gegenstand mit der möglichsten Vollständigkeit behandelt, zeigt bei einer anfangs ausführlichen, später knappen Darstellung doch durchgehends jene Klarheit, die gerade für diesen Teil der Wissenschaft nötig ist. Es wird sich dasselbe daher überall als eine gute Einleitung in das wissenschaftliche Studium der Physik empfehlen.

**Magazin für Pädagogik. Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben,** gelöst durch geometrische Analysis. Erster und Zweiter Teil. An solchen Werken haben wir freilich noch keinen Ueberfluß und wir möchten einem jeden raten, der sich ohne Hilfe eines Lehrers tiefer in dieses Gebiet einzuarbeiten wünschte, sei es zum Zwecke der Erstehung einer Prüfung, sei es aus besonderer Liebhaberei zu diesem schönen Zweig der Mathematik, zu diesem ausgezeichneten Werke zu greifen. Nur mit hoher Befriedigung und reichem Gewinn wird er dasselbe aus der Hand legen.

**Prakt. Physik.** Der Verfasser hält vollkommen, was er verspricht; er ist ein Meister in der Entwicklung und Klarstellung der Grundbegriffe und macht dadurch seine Arbeit vor allem für den angehenden Lehrer und für die Selbstausbildung geeignet, und mancher ältere Lernende wird sagen: Hätte man mir solches in meiner Jugend geboten!

# Baukunde.

**Statik für Hoch- und Tiefbautechniker.** Ein Lehrbuch für den Unterricht an bautechnischen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und Nachschlagen mit 194 Uebungsaufgaben und 486 Figuren nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 3. Auflage. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 5,50.

**Darstellende Geometrie für Bauhandwerker.** Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Erster Teil: **Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.** Mit 345 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn.** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W.. 2. Auflage. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

**Darstellende Geometrie für Bauhandwerker.** Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Zweiter Teil: **Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive.** Anhang: **Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Mit 354 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 2. Auflage. Preis: 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

**Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen.** Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen usw. **12 Tafeln mit erläuterndem Texte.** Entworfen und gezeichnet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. In Mappe: Mk. 5,50.

**Das Zeichnen der Stereometrie.** Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von **Prof. A. Brude.** Preis: Mk. 6.—.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kleyer, Adolph

Lehrbuch der Körperberechnungen zum Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie zum rationellen Selbststudium ; bearbeitet nach eigenem System
Bd.: 2

1886

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.167-m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841080-9